МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ
(Вычислительные системы)
1981 год Выпуск 87

УДК 519.652

О КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ ПРИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ

Б.И. Квасов

I. Пусть на отрезке $[a, b]$ задано равномерное разбиение $\Delta: x_i = a+ih$, $i = 0,\dots,N$; $h = (b-a)/N$, в узлах которого известны значения некоторой функции $f_i = f(x_i)$, $i = 0,\dots,N$. Интерполяционным параболическим сплайном называется функция $S(x)$, которая на каждом промежутке между узлами сетки $\delta = \{x_0, \bar{x}_i, x_N \mid i = 0,\dots,N-1\}$, $\bar{x}_i = (x_i + x_{i+1})/2$, совпадает с некоторым квадратным многочленом, непрерывно дифференцируема на $[a,b]$ и принимает на Δ заданные значения $S(x_i) = f_i$, $i = 0,\dots,N$.

Как известно [I], для однозначного определения $S(x)$ требуется наложить на сплайн два краевых условия, которые обычно задают в виде ограничений на значения сплайна и его производных на концах отрезка $[a,b]$ (или вблизи концов). Существуют различные виды краевых условий, из которых наиболее употребительными являются следующие типы [I]:

I. $S'(a) = f'(a)$, $S'(b) = f'(b)$.

П. $S''(a) = f''(a)$, $S''(b) = f''(b)$.

Ш. Условия периодичности: $S^{(r)}(a) = S^{(r)}(b)$, $r = 1,2$.

IУ. $S''(\bar{x}_i - 0) = S''(\bar{x}_i + 0)$, $i = 0, N-1$.

В данной статье в предположении, что известны только узловые значения f_i, рассматривается общий подход к выбору краевых условий. Как частные случаи получаются краевые условия типа IУ и разностные аппроксимации краевых условий типов I, П. Найдены "оптимальные" краевые условия. В качестве критерия оптимальности, так же как в [2], взято условие минимизации главного члена погрешности приближения в равномерной метрике.

2. Введем обозначение $M_i = S''(x_i)$, $i = 0,\dots,N$. Тогда для $x \in [x_i, \bar{x}_i]$ имеет место

$$S(x) = (1-t)f_i + tf_{i+1} - th^2[(3-4t)M_i + M_{i+1}]/8, \qquad (1)$$

где $h = x_{i+1} - x_i$, $t = (x-x_i)/h$, с заменой местами индексов i и $i+1$ для $x \in [\bar{x}_i, x_{i+1}]$.

Краевые условия возьмем в виде

$$\alpha M_0 + M_1 = d_0^*, \quad M_{N-1} + \alpha M_N = d_N^*, \qquad (2)$$

где

$$d_0^* = (\alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)/h^2, \quad d_N^* = (\alpha_0 f_N + \alpha_1 f_{N-1} + \alpha_2 f_{N-2})/h^2.$$

Предположим, что интерполируемая функция $f(x) \in W_\infty^4[a,b]$, и постараемся определить параметры α, α_0, α_1, α_2 таким образом, чтобы сплайн $S(x)$ определялся однозначно и выполнялись соотношения

$$\| S^{(r)}(x) - f^{(r)}(x) \|_\infty = O(h^{3-r}), \ r = 0,1,2. \qquad (3)$$

Здесь $\|\cdot\|_\infty$ – норма в пространстве $L_\infty[a,b]$.

С учетом условий непрерывности $S'(x)$ в узлах сетки Δ для определения параметров сплайна M_i получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha M_0 + M_1 = d_0^*, \\ &M_{i-1} + 6M_i + M_{i+1} = 8(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1})/h^2, \quad i=1,\dots,N-1, \\ &M_{N-1} + \alpha M_N = d_N^*. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Используя полученные в [3] результаты о необходимых и достаточных условиях невырожденности трехдиагональных матриц, нетрудно показать, что определитель системы (4) отличен от нуля тогда и только тогда, когда

$$\alpha \neq \frac{\theta(1 \pm \theta^{N-2})}{1 \pm \theta^N},$$

$$\theta = 3 - 2\sqrt{2}, \quad N \geq 3.$$

В этом случае сплайн $S(x)$ существует и единствен. В табл. I приведены несколько первых значений величин

Таблица I

N	$\tilde{\alpha}_1$	$\tilde{\alpha}_2$
3	I/7	I/5
4	I/6	3/I7
5	7/4I	5/29
6	6/35	I7/99

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{\theta(1-\theta^{N-2})}{1-\theta^N}, \quad \tilde{\alpha}_2 = \frac{\theta(1+\theta^{N-2})}{1+\theta^N} .$$

Очевидно, $\lim\limits_{N\to\infty} \tilde{\alpha}_1 = \lim\limits_{N\to\infty} \tilde{\alpha}_2 = 3 - 2\sqrt{2}$.

Для упрощения изложения в дальнейшем будем считать, что $N \geq 5$. Тогда $7/41 \leq \tilde{\alpha}_1 < (3-2\sqrt{2}) < \tilde{\alpha}_2 \leq 5/29$.

3. Из (I), пользуясь разложением по формуле Тейлора, находим

$$S(x) = f(x) + \frac{t(1-4t^2)}{24} h^3 f'''(x) + h^4 I - \frac{(3-4t)t}{8} h^2 (M_i - f''_i) -$$

$$- \frac{t}{8} h^2 (M_{i+1} - f''_{i+1}) ,$$

где

$$I = \int_0^t [(1-t)\frac{\tau^3}{6} - \frac{(3-4t)t}{8}\tau] f^{IV}(x_i + \tau h) d\tau +$$

$$+ t \int_t^1 \left[\frac{(1-\tau)^3}{6} - \frac{1}{8}(1-\tau) \right] f^{IV}(x_i + \tau h) d\tau .$$

Оценивая I через неравенство Гёльдера, нетрудно получить

$$\|S^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)\|_\infty \leq C_{0r} h^{3-r} \|f'''\|_C + C_{1r} h^{4-r} \|f^{IV}\|_\infty +$$

$$+ C_{2r} h^{2-r} \max_i |M_i - f''_i|, \; r=0,1,2, \qquad (5)$$

где $C_{00} = \sqrt{3}/216$, $C_{01} = 1/12$, $C_{02} = 1/2$, $C_{10} = 5/384$, $C_{11} = 5/192$, $C_{12} = C_{20} = 1/8$, $C_{21} = 1/2$, $C_{22} = 1$.

Обозначим $Q_i = M_i - f''_i$. При краевых условиях типа П или Ш, используя развитый в [4] подход, имеем

$$|Q_i| \leq \frac{5}{48} h^2 \| f^{IV} \|_\infty . \qquad (6)$$

Поэтому в оценке (5) слагаемое, содержащее Q_i , не влияет на величину главного члена погрешности.

В рассматриваемом нами случае краевых условий общего вида (2) систему (4) перепишем следующим образом:

$$\alpha Q_0 + Q_1 = \tilde{d}_0^* , \qquad (7)$$

$$(1-6\alpha)Q_1-\alpha Q_2 = \tilde{d}_0^*-\alpha\tilde{d}_1, \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} (6-35\alpha)Q_2+(1-6\alpha)Q_3 &= (1-6\alpha)\tilde{d}_2+\alpha\tilde{d}_1-\tilde{d}_0, \\ Q_{i-1}+6Q_i+Q_{i+1} &= \tilde{d}_i, \quad i = 3,\dots,N-3, \\ (1-6\alpha)Q_{N-3}+(6-35\alpha)Q_{N-2} &= (1-6\alpha)\tilde{d}_{N-2}+\alpha\tilde{d}_{N-1}-\tilde{d}_N^*, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$-\alpha Q_{N-2}+(1-6\alpha)Q_{N-1} = \tilde{d}_N^*-\alpha\tilde{d}_{N-1}, \tag{10}$$

$$Q_{N-1}+\alpha Q_N = \tilde{d}_N^*, \tag{11}$$

где

$$\tilde{d}_0^* = (\alpha_0 f_0+\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2)/h^2 -\alpha f_0''-f_1'',$$

$$\tilde{d}_i = 8(f_{i+1}-2f_i+f_{i-1})/h^2-f''_{i-1}-6f''_i-f''_{i+1},$$

$$\tilde{d}_N^* = (\alpha_0 f_N+\alpha_1 f_{N-1}+\alpha_2 f_{N-2})/h^2-f''_{N-1}-\alpha f''_N.$$

При $\alpha = 1/6$ уравнения (8), (10) заменяются на

$$Q_{i-1}+6Q_i+Q_{i+1} = \tilde{d}_i, \quad i=2,N-2, \tag{12}$$

а при $\alpha = 0$ на такие же уравнения с $i=1,N-1$.

Для $\alpha < 7/41$ или $\alpha > 5/29$ матрица A системы (9) имеет строгое диагональное преобладание. Более того, если для некоторого $\delta_0>0$ выполняется неравенство $|35\alpha-6| \geq |6\alpha-1| + \delta_0$, то, согласно [3, с. 334], имеем оценку

$$\|A^{-1}\| \leq \max_{1\leq i\leq N}\{|a_{ii}| - \sum_{j\neq i}|a_{ij}|\}^{-1}=\max\left(\frac{1}{\delta_0},\frac{1}{4}\right)=\gamma. \tag{13}$$

В частности, при $\alpha \leq 1/29$ или $\alpha \geq 9/29$ получаем $\gamma = 1/4$.

Для правых частей $\tilde{d}_i$ системы (9), пользуясь разложением по формуле Тейлора, находим

$$\tilde{d}_i = \frac{h^3}{3}\left\{ \int_0^1\varphi(\tau)\, f^{IV}(x_{i-1}+h\tau)d\tau + \int_0^1\varphi(1-\tau)f^{IV}(x_i + h\tau)d\tau \right.,$$

где $\varphi(\tau) = 4\tau^2-3\tau$.

Отсюда, применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$|\tilde{d}_i| \le \frac{5}{12} h^2 \|f^{IV}\|_\infty . \qquad (14)$$

Пусть $\tilde{d}^* = \max\{|\tilde{d}_0^*|, |\tilde{d}_N^*|\}$. Тогда из системы (9), учитывая неравенства (I3), (I4), имеем

$$\max_{2 \le i \le N-2} |Q_i| \le Kh^2 \| f^{IV}\|_\infty + \gamma\tilde{d}^* \qquad (15)$$

с постоянной $K = \frac{5}{12}\gamma \max\{1, |1-6\alpha|+|\alpha|\}$.

В предположении $\alpha \ne 1/6$ из уравнений (8), (I0) находим

$$|Q_i| \le Bh^2 \|f^{IV}\|_\infty + C\tilde{d}^*, \quad i = 1, N-1 , \qquad (16)$$

с коэффициентами $B = |\alpha|(K+\frac{5}{12})/|1-6\alpha|$, $C = (|\alpha|\gamma+1)/|1-6\alpha|$, а из (7), (II) для $\alpha \ne 0$ соответственно получаем

$$|Q_i| \le \frac{1}{|\alpha|} Bh^2 \|f^{IV}\|_\infty + \frac{1}{|\alpha|}(C+1)\tilde{d}^*, \quad i = 0, N. \qquad (17)$$

При $\alpha = 1/6$ имеем такие же оценки, но с постоянными $B = 7K + 5/12$, $C = 7\gamma$.

Для $\alpha = 0$, используя уравнения (I2) при $i = 1, N-1$, вместо (I7) находим

$$|Q_i| \le (K + \frac{5}{12})h^2 \|f^{IV}\|_\infty + (6+\gamma)\tilde{d}^*, \quad i = 0, N. \qquad (18)$$

Из оценок (5), (I5)-(I8) следует, что соотношения (3) будут справедливы, если только $\tilde{d}^* = O(h)$. Для выполнения этого условия достаточно положить

$$\alpha_0 = \alpha_2 = -\alpha_1/2 = \alpha + 1 . \qquad (19)$$

В этом случае, применяя формулу Тейлора, получаем

$$\tilde{d}_0^* = \alpha h f_1''' + F_0 h^2 , \qquad \tilde{d}_N^* = -\alpha h f_{N-1}''' + F_N h^2, \qquad (20)$$

где

$$|F_i| \le \frac{1}{12}(|1+\alpha| + 6|\alpha|)\|f^{IV}\|_\infty, \; i = 0, N. \qquad (21)$$

Из формул (20) следует, что "оптимальным" будет выбор $\alpha = 0$, когда $\tilde{d}^* = O(h^2)$. В силу неравенств (I4), (2I) при этом значении параметра α получаем оценки

$$| Q_i | \le \begin{cases} \dfrac{5}{48} h^2 \|f^{IV}\|_\infty, & i = 2,\dots,N-2, \\ \dfrac{1}{12} h^2 \|f^{IV}\|_\infty, & i = 1, N-1, \\ \dfrac{49}{48} h^2 \|f^{IV}\|_\infty, & i = 0, N. \end{cases}$$

Порядки приближения здесь такие же, как в (6). Увеличились лишь значения постоянных при $i = 0, N$. Однако это не влияет на величину главного члена в оценке (5). Следовательно, полагая в краевых условиях (2) $\alpha = 0$, $\alpha_1' = \alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = -2$, получаем практически такую же точность приближения, как и в случае, когда заданы f_0'', f_N''.

4. Считая, что выполняются соотношения (19), укажем некоторые полезные следствия из проведенного анализа. Пусть $p_i(x)$ - квадратный многочлен, принимающий значения f_i, f_{i+1}, f_{i+2} в точках x_i, x_{i+1}, x_{i+2}. Тогда нетрудно убедиться, что краевые условия (2) можно записать в виде

$$\alpha M_0 + M_1 = (\alpha+1) p_0''(x), \quad M_{N-1} + \alpha M_N = (\alpha+1) p_{N-2}''(x) \tag{22}$$

или, выражая величины M_i через $m_i = S'(x_i)$ посредством формулы (1), в виде

$$\left.\begin{aligned} &(1-3\alpha) m_0 + (3-\alpha) m_1 = (1-3\alpha) p_0'(x_0) + (3-\alpha) p_0'(x_1), \\ &(3-\alpha) m_{N-1} + (1-3\alpha) m_N = (3-\alpha) p_{N-2}'(x_{N-1}) + (1-3\alpha) p_{N-2}'(x_N). \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Как частные случаи, формулы (22), (23) содержат односторонние разностные аппроксимации краевых условий типа I, II. В самом деле, поделив уравнения (22) на α, в пределе при $\alpha \to \infty$ имеем $M_0 = p_0''(x)$, $M_N = p_{N-2}''(x)$. При $\alpha = 3$ из (23) находим $m_0 = p_0'(x_0)$, $m_N = p_{N-2}'(x_N)$.

Используя соотношения непрерывности (4) при $i = 1, N-1$, краевые условия (22) можно переписать также в виде

$$(7\alpha-1)(M_1 - M_0) = (\alpha+1)(M_2 - M_1), \quad (\alpha+1)(M_{N-1} - M_{N-2}) = (1-7\alpha)(M_N - M_{N-1}). \tag{24}$$

Так как $S''(\bar{x}_i+0) - S''(\bar{x}_i-0) = M_{i+1} - M_i$, то соотношениями (24) связаны величины скачков второй производной сплайна в соседних точках $\bar{x}_0, \bar{x}_1$ и $\bar{x}_{N-2}, \bar{x}_{N-1}$ соответственно. В частном случае для $\alpha = -1$ получаем $M_1 - M_0 = M_N - M_{N-1} = 0$, т.е. краевые условия типа IV.

Таблица 2

x	Краевые условия						
	$\alpha=-1$	$\alpha=0$	$\alpha=1/7$	$\alpha=1/6$	$\alpha=3$	$\alpha=\infty$	$M_0=0$ $M_N=0$
0.0I	4.8	0.95	34	230	6.7	5.7	I30
0.02	5.7	0.95	42	280	7.6	7.6	I50
0.07	9.5	0.00	7.6	48	0.95	0.95	27
0.09	0.95	0.95	2.9	I3	0.95	0.95	7.6
0.22	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.36	0.95	0.95	0.95	0.95	0.95	0.95	0.95
0.62	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.93	5.7	2.9	I4	II0	5.7	5.7	7.4
0.96	6.7	I.9	22	I60	7.6	6.7	II0
0.98	I5	0.95	97	660	20	I8	420
0.99	I2	0.95	8I	540	I5	I4	340

5. В табл.2 представлены численные результаты, полученные при интерполяции функции $f(x) = \exp(x)$, заданной на сетке $\Delta : x_i = i/20$, $i = 0, I, \ldots, 20$, с помощью параболического сплайна $S(x)$, удовлетворяющего краевым условиям (22), при различных значениях параметра α. В этой таблице приведены значения величины $|S(x) - \exp(x)| \cdot 10^6$, вычисленные в различных точках между узлами. В последнем столбце дана погрешность интерполяции при "естественных" краевых условиях $M_0 = M_N = 0$. Сравнение приведенных результатов говорит о том, что значение $\alpha = 0$ действительно является "наилучшим".

Литература

I. СТЕЧКИН С.Б., СУББОТИН Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. -М.: Наука, I976. - 248 с.

2. BEHFOROOZ G.H., PAPAMICHEL N. End conditions for cubic spline interpolation.-J.Inst.Math.Applics, 1979, v.23, p.355-366.

3. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Некоторые свойства трехдиагональных матриц и их применение к теории кубической сплайн-интерполяции. -В кн.: Методы сплайн-функций. (Вычислительные системы, вып. 65.) Новосибирск, I975, с.29-49.

4. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. -М.: Наука, I980. - 352 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
6 апреля I98I года