МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ
(Вычислительные системы)
1981 год Выпуск 87

УДК 519.653

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СПЛАЙНА ПЯТОЙ СТЕПЕНИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Б.С. Киндалев

Для полиномиальных сплайнов, заданных на равномерной сетке, большой интерес представляют асимптотические формулы, которые являются разложением сплайна и его производных в ряд по степеням шага сетки. Для кубических сплайнов такие формулы получены в [1,2].

В данной статье асимптотические разложения получены для сплайнов пятой степени дефекта 1. На их основе исследуется погрешность приближения сплайном и выводятся некоторые формулы численного дифференцирования.

1. Асимптотические формулы и численное дифференцирование

Пусть на отрезке $[a,b]$ задано равномерное разбиение

$$\Delta:\ x_i = a + ih,\quad h = (b-a)/N,\quad i = 0,1,\dots,N.$$

Обозначим через $S(x)$ полиномиальный сплайн пятой степени дефекта 1 (см. [3]), интерполирующий в узлах сетки Δ заданные значения функции $y(x)$. Узлы сплайна $S(x)$ совпадают с точками разбиения. Для $x \in [x_i, x_{i+1}]$ можно записать

$$S(x) = A(t)y_i + B(t)y_{i+1} + C(t)hm_i + D(t)hm_{i+1} + \\ + E(t)h^4M_i + F(t)h^4M_{i+1}, \tag{1}$$

где

$$A(t) = (1-t)^2(2t+1),\qquad B(t) = A(1-t),$$

$$C(t) = t(1-t)^2,\qquad D(t) = -C(1-t),$$

$$E(t) = \frac{t^2(1-t)^2(3-t)}{120},\qquad F(t) = E(1-t),$$

$$y_i = y(x_i), \quad m_i = S'(x_i), \quad M_i = S^{(4)}(x_i), \quad t = \frac{x-x_i}{h} .$$

Формула (I) позволяет вычислять сплайн $S(x)$ и его производные $S^{(p)}(x)$, $p=1,\dots,5$, которые можно взять в качестве приближенных значений для $y^{(p)}(x)$. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА. Пусть сплайн $S(x)$ интерполирует функцию $y(x) \in C^{12}[a,b]$ в узлах сетки Δ. Если $S(x)$ и $y(x)$ периодические с периодом $(b-a)$, то

$$M_i = y_i^{IV} - \frac{h^2}{12} y_i^{VI} + \frac{h^4}{240} y_i^{VIII} - \frac{h^6}{7560} y_i^{X} + O(h^8) . \tag{2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Система для определения M_i записывается следующим образом:

$$M_{i-2} + 26M_{i-1} + 66M_i + 26M_{i+1} + M_{i+2} = 120 \frac{y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}}{h^4} ,$$

$$i = 1,\dots,N , \tag{3}$$

где полагается $M_k = M_{k+N}$, $y_k = y_{k+N}$, $k=-1,0,1,2$. Ищем решение этой системы в виде

$$M_i = g_i^1 y_i^{IV} + g_i^2 h^2 y_i^{VI} + g_i^3 h^4 y_i^{VIII} + g_i^4 h^6 y_i^{X} + g_i^5 , \tag{4}$$

где величины g_i^k, $k=1,\dots,5$, подлежат определению.

Обозначим через A матрицу коэффициентов системы (3) и введем векторы $G^k = (g_1^k,\dots,g_N^k)^T$, $T^k = (t_1^k,\dots,t_N^k)^T$.

Подставляя выражение (4) в (3) и проводя разложение функции $y(x)$ и ее производных в точке x_i по формуле Тейлора, получаем следующие системы уравнений для определения g_i^k.

$$AG^k = T^k, \quad k = 1,\dots,5 . \tag{5}$$

Отметим, что вектор-столбец правой части (5) T^k при $k=2,\dots,5$ зависит от решений $G^1,\dots,G^{k-1}$, поэтому решения систем (5) надо искать последовательно, начиная с номера $k = 1$. Матрица A системы (5) имеет диагональное преобладание. Это свойство обеспечивает ей невырожденность, а следовательно, гарантирует существование единственного решения системы (5) при каждом $k = 1,\dots,5$. Последовательно вычисляем

$$g_i^1=1,\quad g_i^2=-\frac{1}{12},\quad g_i^3=\frac{1}{240},\quad g_i^4=-\frac{1}{7560}\ .$$

Определим норму вектора $x=(x_1,\dots,x_N)$ в N-мерном векторном пространстве $\|x\|=\max\limits_{1\le i\le N}|x_i|$. С ней согласована норма матрицы $\|A\|=\max\limits_i\sum\limits_{j=1}^{N}|a_{ij}|$, где a_{ij} - элементы матрицы A. Из (5) имеем $\|G^5\|\le\|A^{-1}\|\|T^5\|$. В силу теоремы об оценке нормы обратной матрицы [I], получаем $\|A^{-1}\|\le 1/12$. Так как $\|T^5\|=O(h^8)$, окончательно имеем $\|G^5\|=O(h^8)$, что завершает доказательство.

Для m_i нетрудно получить (см. [3]) следующую формулу:

$$m_i=\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}-\frac{y_{i+2}-3y_{i+1}+3y_i-y_{i-1}}{6h}+$$
$$+\frac{h^3}{720}[2M_{i-1}+33M_i+24M_{i+1}+M_{i+2}].$$

Используя разложение (2), находим

$$m_i=y_i'+\frac{h^6}{7!}y_i^{VII}+O(h^8)\ . \qquad (6)$$

Подставляя (6) и (2) в (I) и выполняя для $y_i^{(\nu)}$, $\nu=0,1,\dots$ $\dots,10$, разложение по формуле Тейлора в точке $x=x_i+th$, после приведения подобных членов получаем

$$S(x)=y(x)+\varphi(t)h^6y^{VI}(x)+\psi(t)h^7y^{VII}(x)+O(h^8), \qquad (7)$$

где

$$\varphi(t)=-\frac{(1-t)^2t^2(t^2-t-\frac{1}{2})}{6!},\qquad \psi(t)=\frac{t(1-t)(1-2t)(3t^4-6t^3+3t+1)}{7!}\ .$$

Эта формула позволяет судить о погрешности приближения функции $y(x)$ интерполяционным сплайном $S(x)$. Погрешность приближения производных функции можно получить, дифференцируя (7) по x

$$S^{(p)}(x)=y^{(p)}(x)+\varphi^{(p)}(t)h^{6-p}y^{VI}(x)+(p\varphi^{(p-1)}(t)+$$
$$+\psi^{(p)}(t))h^{7-p}y^{VII}(x)+O(h^{8-p}),\quad p=1,\dots,5. \qquad (8)$$

В итоге приходим к оценке

$$\|S^{(p)}(x)-y^{(p)}(x)\|_C=O(h^{6-p}),\qquad p=0,\dots,5\ . \qquad (9)$$

В отдельных точках промежутка $[x_i, x_{i+1}]$ порядок приближения производных повышается по сравнению с оценкой (9). Эти точки легко находятся из уравнений $\varphi^{(p)}(t)=0$, $p=1,\ldots,5$. Имеем

$$S'(x_i)=y'_i+O(h^6), \qquad S'(x_i+\frac{h}{2})=y'(x_i+\frac{h}{2})+O(h^6),$$

$$S''(x_i+h(\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\sqrt{\frac{1}{30}}}))=y''(x_i+h(\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\sqrt{\frac{1}{30}}}))+O(h^5),$$

$$S'''(x_i)=y'''(x_i)+O(h^4), \; S'''(x_i+\frac{h}{2})=y'''(x_i+\frac{h}{2})+O(h^4),$$

$$S^{IV}(x_i+h(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{6}))=y^{IV}(x_i+h(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{6}))+O(h^3),$$

$$S^{V}(x_i+\frac{h}{2})=y^{V}(x_i+\frac{h}{2})+O(h^2).$$

Непосредственным дифференцированием сплайна $S(x)$ можно вычислить приближенные значения только производных $y^{(\nu)}(x)$, $\nu=1,2,\ldots,5$. Однако этим не исчерпываются возможности численного дифференцирования с помощью сплайнов пятой степени. Имеют место следующие соотношения:

$$\frac{M_{i+1}+10M_i+M_{i-1}}{12}=y_i^{IV}+O(h^4),$$

$$\frac{1}{3}(2M_i+\frac{y_{i+2}-4y_{i+1}+6y_i-4y_{i-1}+y_{i-2}}{h^4})=y_i^{IV}+O(h^4),$$

$$\frac{M_{i+1}-M_{i-1}}{2h}=y_i^{V}+O(h^2), \tag{10}$$

$$\frac{1}{3}(4\frac{M_{i+1}-M_{i-1}}{2h}-\frac{y_{i+3}-4y_{i+2}+5y_{i+1}-5y_{i-1}+4y_{i-2}-y_{i-3}}{2h^5})=y_i^{V}+O(h^4),$$

$$\frac{M_{i+1}-2M_i+M_{i-1}}{h^2}=y_i^{VI}+O(h^6).$$

Если в узлах сетки Δ, кроме значений функции $y(x)$, известны некоторые ее производные, то можно использовать формулы

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(M_i+\frac{y''_{i+1}-2y''_i+y''_{i-1}}{h^2}\right)=y^{IV}_i+O(h^4),\\
&\frac{1}{3}\left(2M_i+\frac{y'''_{i+1}-y'''_{i-1}}{2h}\right)=y^{IV}_i+O(h^4),\\
&\frac{1}{2}\left(3\,\frac{M_{i+1}-M_{i-1}}{2h}-\frac{y''_{i+2}-2y''_{i+1}+2y''_{i-1}-y''_{i-2}}{2h^3}\right)=y^{V}_i+O(h^4),\\
&2\,\frac{M_{i+1}-M_{i-1}}{2h}-\frac{y^{IV}_{i+1}-y^{IV}_{i-1}}{2h}=y^{V}_i+O(h^4).
\end{aligned}\right\}\qquad (11)$$

В справедливости (10) и (11) легко убедиться, воспользовавшись (2) и тейлоровским разложением. Формулы (10) и (11) позволяют, во-первых, численно найти производные y^{IV}_i, y^{V}_i, y^{VI}_i с повышенной точностью, во-вторых, вычислить y^{VI}_i, чего нельзя сделать непосредственным дифференцированием сплайна.

Все рассуждения и формулы, приведенные в этом параграфе, могут быть распространены на случай, когда $y(x)$ и $S(x)$ не являются периодическими. Для этого достаточно краевые условия для сплайна задавать в асимптотическом виде. Пусть, к примеру, у сплайна на концах интервала $[a,b]$ задаются третья и четвертая производные. Нетрудно получить, следуя [3], выражения для краевых условий. Выпишем их в точке $x = a$:

$$S'''(x_0)=\frac{y_3-3y_2+3y_1-y_0}{h^3}-\frac{59h}{120}M_0-\frac{93h}{120}M_1-\frac{27h}{120}M_2-\frac{h}{120}M_3,$$

$$S^{IV}(x_0)=M_0.$$

Нужные краевые условия получаются, если в этих выражениях заменить $S'''(x_0)$ и $S^{IV}(x_0)$ на их асимптотические представления. В итоге получаем

$$\frac{59h}{120}M_0+\frac{93h}{120}M_1+\frac{27h}{120}M_2+\frac{h}{120}M_3=\frac{y_3-3y_2+3y_1-y_0}{h^3}-K, \qquad (12)$$

$$M_0 = y^{IV}(x_0) - \frac{h^2}{12} y^{VI}(x_0) + \frac{h^4}{2\cdot 5!} y^{VIII}(x_0) - \frac{h^6}{7\cdot 9\cdot 5!} y^{X}(x_0),$$

где

$$I = y^{III}(x_0) - \frac{h^4}{2\cdot 5!} y^{VII}(x_0) + \frac{11h^6}{7!\cdot 6} y^{IX}(x_0).$$

В силу симметрии из этих соотношений легко получить краевые условия на другом конце интервала.

2. Численные примеры

В периодическом случае полученные результаты проиллюстрируем на примере функции $y(x) = \sin(5x)$, $x \in [0, 2\pi/5]$.

Численное дифференцирование проводилось с помощью сплайна и для сравнения по разностным формулам. Результаты приведены в табл. I.

Таблица I

N	R_4	$\bar{R}_4$	R_5	$\bar{R}_5$	R_6	$\bar{R}_6$
18	$3{,}8\cdot 10^{-2}$	$1{,}2\cdot 10$	$5{,}2\cdot 10^{-1}$	$3{,}2\cdot 10$	$9{,}8\cdot 10^{-4}$	$4{,}6\cdot 10^{2}$
36	$2{,}4\cdot 10^{-3}$	$3{,}2$	$3{,}2\cdot 10^{-2}$	$7{,}9$	$2{,}4\cdot 10^{-5}$	$1{,}2\cdot 10^{2}$

Здесь

$$R_4 = \max_{0\le i\le N} \left| \frac{M_{i+1} + 10M_i + M_{i-1}}{12} - y_i^{IV} \right|,$$

$$\bar{R}_4 = \max_{0\le i\le N} \left| \frac{y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}}{h^4} - y_i^{IV} \right|,$$

$$R_5 = \max_{0\le i\le N} \left| 2\,\frac{M_{i+1} - M_{i-1}}{2h} - \frac{y_{i+1}^{IV} - y_{i-1}^{IV}}{2h} - y_i^{V} \right|,$$

$$\bar{R}_5 = \max_{0\le i\le N} \left| \frac{M_{i+1} - M_{i-1}}{2h} - y_i^{V} \right|,$$

$$R_6 = \max_{0\le i\le N} \left| \frac{M_{i+1}-2M_i+M_{i-1}}{h^2} - y_i^{VI} \right|,$$

$$\overline{R}_6 = \max_{0\le i\le N} \left| \frac{y_{i+3}-6y_{i+2}+15y_{i+1}-20y_i+15y_{i-1}-6y_{i-2}+y_{i-3}}{h^6} - y_i^{VI} \right|.$$

Отметим, что величина $\max_i |M_i - y_i^{IV}|$ примерно равна $\overline{R}_4$.

В табл.2 приведены результаты численного дифференцирования для непериодического случая. Максимум ошибки берется на множестве точек, где разностные формулы имеют смысл. На интервале [0,2] рассматривалась функция $y(x) = \exp(-5x)$. В краевых условиях для сплайна задавались третья и четвертая производные. Они брались в виде (I2). Для более точного вычисления шестой производной по одной из формул (I0) граничные условия надо задавать с точностью до малых более высокого порядка.

Т а б л и ц а 2

N	R_4	$\overline{R}_4$	R_5	$\overline{R}_5$	R_6	$\overline{R}_6$
20	$5{,}9\cdot10^{-2}$	9,7	$8{,}0\cdot10^{-1}$	$2{,}4\cdot10$	$2{,}0\cdot10^{-2}$	$2{,}2\cdot10^{2}$
40	$6{,}2\cdot10^{-3}$	4,0	$8{,}2\cdot10^{-2}$	9,9	$6{,}7\cdot10^{-4}$	$1{,}2\cdot10^{2}$

Численный эксперимент подтверждает выводы §I и показывает, что при численном дифференцировании сплайновый подход обладает определенными преимуществами перед разностным. Особенно обращает на себя внимание высокая точность вычисления шестой производной.

Автор признателен В.Л.Мирошниченко за ряд полезных замечаний, высказанных по существу затронутого вопроса.

Литература

I. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980. - 352 с.

2. LUCAS T. Error bounds for interpolating cubic splines under various end conditions.- SIAM J.Numer.Anal.,1974,v.11, N 3, p.569-584.

3. АЛБЕРГ Дж., НИЛЬСОН Э., УОЛШ Дж. Теория сплайнов и ее приложения. - М.: Мир, 1972. - 316 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
19 февраля 1981 года