МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ
(Вычислительные системы)
1981 год Выпуск 87

УДК 519.651

ЛОКАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ СПЛАЙНАМИ, ТОЧНАЯ НА МНОГОЧЛЕНАХ ПО ЗАДАННОЙ СИСТЕМЕ ФУНКЦИОНАЛОВ

Б.М. Шумилов

Введем сетку Δ: $a=x_0<x_1<\ldots<x_{N+1}=b$, с которой свяжем пространство сплайнов $S_n(\Delta)$ степени n дефекта I (см. [I]).

Метод локальной аппроксимации сплайнами был развит в работах И.Шенберга, Ю.С.Завьялова, А.И.Гребенникова и др. [I-7]. Особенностью этого метода является то, что выражение аппроксимационного сплайна $S_nf(x)$ степени n записывается в виде явной формулы, связывающей значение сплайна в точке $x\in[x_j,x_{j+1}]$ со значениями аппроксимируемой функции f из некоторой окрестности этой точки:

$$S_nf(x)=\sum_{i=j-n}^{j} b_i(f)B_n^i(x), \qquad (I)$$

где $B_n^i(x)$ - нормализованные базисные В-сплайны с локальными носителями; $b_i(f)$ - линейные функционалы, определяемые через значения f на носителе $[x_i,\, x_{i+n+1}]$ сплайна $B_n^i(x)$ (к сетке Δ добавляются узлы $x_{-n}<\ldots<x_0$; $x_{N+n+1}>\ldots>x_{N+1}$). Функционалы $b_i(f)$ выбираются так, чтобы обеспечить аппроксимацию с заданным порядком (относительно шага сетки) достаточно гладких функций $f(x)$.

В настоящей статье предлагается новый подход к выбору функционалов $b_i(f)$, отличный от известных.

Пусть задана система функционалов $\{\lambda_i(\cdot)\}$ $(i=-n,\ldots,N)$. Назовем сплайн $S_n\in S_n(\Delta)$ интерполяционным для функции f по системе функционалов λ_i, если

$$\lambda_i(S_n)=\lambda_i(f), \qquad i=-n,\ldots,N. \qquad (2)$$

Всюду далее будем предполагать, что интерполяционный сплайн по системе функционалов λ_i существует и единствен. Это, очевидно, эквивалентно требованию невырожденности матрицы $\{\lambda_i(B_n^j)\}$ $(i,j=-n,\dots,N)$.

Будем выбирать $b_i(f)$ так, чтобы для любых многочленов $g(x)$ степени не более l формула (I) обеспечивала интерполяцию в смысле (2), т.е.

$$\lambda_i(S_n g) = \lambda_i(g), \quad i=-n,\dots,N. \tag{3}$$

Если $l \le n$, то, очевидно, выполнение равенств (3) эквивалентно требованию, чтобы формула (I) была точной на многочленах степени l.

Более широкие возможности для построения разнообразных локальных аппроксимаций открываются при $l > n$. Например, условие $l > n$ полезно рассматривать тогда, когда в процессе локальной аппроксимации требуется с повышенной точностью воспроизвести некоторые характеристики аппроксимируемой функции. Частные случаи этой задачи изучались в [I,7], где были выведены формулы квазиинтерполяции (т.е. локальной аппроксимации функций, заданных на сетке, с повышенной точностью приближения в узлах сетки) для равномерно расположенных узлов. Локальные аппроксимации, построенные при $l > n$, можно использовать и для оптимизации узлов коллокации при решении дифференциальных уравнений методом сплайн-коллокации.

Пусть $l = n+1$. Рассмотрим случай точечных функционалов $\lambda_i(f) = f^{(r_i)}(t_i)$, где $a \le t_{-n} \le \dots \le t_N \le b$, а r_i $(i=-n,\dots,N)$ - фиксированные целые числа, удовлетворяющие неравенствам $0 \le r_i \le n$. Известно, что функционалы $b_{\tau_i,i}(f)$, определяемые соотношениями

$$b_{\tau_i,i}(f) = \frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{n}(-1)^p \phi_i^{(n-p)}(\tau_i) f^{(p)}(\tau_i),$$

где
$$\phi_i(t) = (t-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(t-x_{i+n}),$$
$$\tau_i \in [a,b] \cap [x_i, x_{i+n+1}],$$

будучи подставлены в (I) вместо $b_i(f)$, обеспечивают локальную аппроксимацию, точную на многочленах степени не более n, а значит, для них равенства (3) выполняются. Поэтому будем искать функционалы $b_i(f)$ в виде

$$b_i(f) = b_{\tau_i,i}(f) + \beta_i f^{(n+1)}(\tau_i), \tag{4}$$

и попытаемся найти такие числа β_i , чтобы равенства (3) выполнялись для любых многочленов степени не более $n+1$. Решение этой задачи дает следующая

ТЕОРЕМА I. Предположим, что интерполяционный сплайн по системе функционалов $\lambda_i(f) = f^{(r_i)}(t_i)$ существует и единствен. Если числа β_i, $i=-n,\dots,N$, являются решением системы уравнений

$$\sum_{i=-n}^{N} \beta_i \lambda_j(B_n^i) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \sum_{i=-n}^{N} \lambda_j(B_n^i) \int_{t_j}^{\tau_i} \phi_i(t)dt , \qquad j=-n,\dots,N, \tag{5}$$

то формула (I) с $b_i(f)$, определенными в (4), обеспечивает выполнение равенств (3) для любых многочленов степени не более $n+1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, заметим, что, в силу предположения о существовании и единственности интерполяционного сплайна по системе функционалов $\lambda_i(f)$, числа β_i из системы (5) определяются единственным образом.

Проверим выполнение равенств (3) для многочлена $X_{n+1}(x)=x^{n+1}$. Моном x^{n+1} по формуле Тейлора в окрестности точки t представляется многочленом

$$x^{n+1} = t^{n+1} + (n+1)(x-t) + \dots + \frac{(n+1)\cdot\ \dots\ \cdot 2}{n!} t(x-t)^n + (x-t)^{n+1}. \tag{6}$$

Функция $\rho_t(x) = (x-t)^{n+1}$ играет роль остаточного члена разложения. Как уже было отмечено, формула (I) по построению точна для многочленов степени n . Следовательно, заменив x^{n+1} его разложением (6), получим равенство

$$x^{n+1} - S_n X_{n+1}(x) = \rho_t(x) - \sum_{i=-n}^{N} b_i(\rho_t) B_n^i(x).$$

Дифференцируя обе его части по x и учитывая, что $\rho_t^{(r_j)}(t)=0$, находим при $t=t_j$ равенство

$$\lambda_j(X_{n+1}) - \lambda_j(S_n X_{n+1}) = -\sum_{i=-n}^{N} b_i(\rho_{t_j}) \lambda_j(B_n^i) .$$

Применим к интегралу в (5) формулу интегрирования по частям. Учитывая, что $\rho_t^{(r)}(t)=0,\ r=0,\dots,n;\ \rho_t^{(n+1)}=(n+1)!,\ \phi_i^{(n+1)}(t)=0$, получаем

$$(n+1)!\int_{t_j}^{\tau_i} 1\cdot\phi_i(t)dt=\phi_i(t)\rho_{t_j}^{(n)}\Big|_{t_j}^{\tau_i}-$$

$$-\int_{t_j}^{\tau_i}\phi_i'(t)\rho_{t_j}^{(n)}(t)dt=\dots=\sum_{q=0}^{n}(-1)^q\phi_i^{(q)}(\tau_i)\rho_{t_j}^{(n-q)}(\tau_i)=$$

$$=(-1)^n n!\, b_{\tau_i,i}(\rho_{t_j})=(-1)^n n![b_i(\rho_{t_j})-\beta_i(n+1)!].$$

Таким образом,

$$\lambda_j(X_{n+1})-\lambda_j(S_nX_{n+1})=$$

$$=(-1)^n(n+1)\sum_{i=-n}^{N}\lambda_j(B_n^i)\int_{t_j}^{\tau_i}\phi_i(t)dt+$$

$$+(n+1)!\sum_{i=-n}^{N}\beta_i\lambda_j(B_n^i)=0,$$

и, следовательно, равенства (3) выполняются для произвольного многочлена $g(x)$ степени не более $n+1$. Теорема I доказана.

Отметим, что величины, стоящие в правой части системы уравнений (5), равны $\lambda_j(m)/(n+1)!$, где

$$m(x)=x^{n+1}-\sum_{i=-n}^{N}b_{\tau_i,i}(X_{n+1})\,B_n^i(x).$$

Функция $m(x)$ представляет из себя некоторый моносплайн [I], который имеет n-1 непрерывную производную и на каждом отрезке $[x_j, x_{j+1}]$ совпадает с многочленом степени n+1 имеющим старшим коэффициентом единицу.

Далее исследуется сходимость полученного процесса аппроксимации в предположении, что решение системы (5) удовлетворяет неравенству

$$\max_{-n\le i\le N}|\beta_i|\le\frac{C}{(n+1)!}\|m\|_{C[a,b]},\tag{7}$$

где $C<\infty$ абсолютная постоянная.

Обозначим

$$\bar{h}_j = \max_{j-n\le i\le j+n} (x_{i+1} - x_i), \qquad \underline{h}_j = \min_{j-n\le i\le j+n} (x_{i+1} - x_i)$$

и предположим, что

$$\frac{\bar{h}_j}{\underline{h}_j} \le \gamma < \infty . \tag{8}$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены неравенства (7) и (8). Если $f(x)\in C^{n+1}[a,b]$ и $t_k\in[x_j,x_{j+1}]$, то

$$f^{(r_k)}(t_k) - (S_n f)^{(r_k)}(t_k) = o(\bar{h}_j^{\,n+1-r_k}) , \tag{9}$$

$$\| f^{(r_k)} - (S_n f)^{(r_k)} \|_{C[x_j,x_{j+1}]} = o(\bar{h}_j^{\,n+1-r_k}) . \tag{10}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$f(x) = \sum_{q=0}^{n} \frac{1}{q!} f^{(q)}(t)(x-t)^q + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1} + R_t(x) .$$

Так как исследуемая аппроксимация точна для многочленов степени n, то

$$f(x) - S_n f(x) = f^{(n+1)}(t)\left[\frac{m(x)}{(n+1)!} - \sum_{i=-n}^{N} \beta_i B_n^i(x)\right] +$$

$$+ R_t(x) - \sum_{i=-n}^{N} b_{\tau_i,i}(R_t) B_n^i(x) - \sum_{i=-n}^{N} \beta_i R_t^{(n+1)}(\tau_i) B_n^i(x) .$$

Вычисляя производную по x и учитывая (5), находим

$$|f^{(r_k)}(t_k) - (S_n f)^{(r_k)}(t_k)| \le |R_t^{(r_k)}(t_k) -$$

$$- \sum_{i=-n}^{N} b_{\tau_i,i}(R_t)(B_n^i)^{(r_k)}(t_k)| +$$

$$+ \max_{x_{j-n}\le x\le x_{j+n+1}} |R_t^{(n+1)}(x)| \max_{j-n\le i\le j} |\beta_i| \sum_{i=j-n}^{j} |(B_n^i)^{(r_k)}(t_k)| . \tag{11}$$

Так как $f(x)\in C^{n+1}[a,b]$, то и $R_t(x)\in C^{n+1}[a,b]$. Следовательно, первый член в правой части неравенства (11) оценивается величиной (см. [3])

$$K_{r_k}\gamma^{r_k}\bar{h}_j^{n+1-r_k}\|R_t^{(n+1)}\|_{C[x_{j-n},x_{j+n+1}]},$$

где K_{r_k} - некоторая константа.

Далее, поскольку для погрешности приближения функции x^{n+1} справедлива аналогичная оценка, то из неравенства (7) вытекает

$$\max_{j-n\le i\le j}|\beta_i|\le CK_0\bar{h}_j^{n+1}.$$

Из свойств B-сплайнов [I] следует, что

$$\sum_{i=j-n}^{j}|(B_n^i)^{(r_k)}(t_k)|\le\left(\frac{2}{\underline{h}_j}\right)^{r_k}.$$

Таким образом,

$$|f^{(r_k)}(t_k)-(S_nf)^{(r_k)}(t_k)|\le$$

$$\le(K_{r_k}+CK_0 2^{r_k})\gamma^{r_k}\bar{h}_j^{n+1-r_k}\|R_t^{(n+1)}\|_{C[x_{j-n},x_{j+n+1}]}.$$

Величина $R_t^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)-f^{(n+1)}(t)$ стремится к нулю при $\bar{h}_j\to 0$. Отсюда вытекает справедливость соотношения (9). Подобным образом выводится и соотношение (I0). Теорема доказана.

Аналогично исследуется случай, когда в определении $b_i(f)$ участвуют разделенные разности, т.е. когда (см. [4,5])

$$b_i(f)=b_{\tau_i,i}(L_if)+\beta_if[\tau_{i0},\dots,\tau_{i,n+1}],\qquad(\text{I2})$$

где

$$L_if(x)=f(x)-\omega_i(x)f[\tau_{i0},\dots,\tau_{in},x],$$

$$\omega_i(x)=(x-\tau_{i0})\cdot\ \dots\ \cdot(x-\tau_{in}),$$

$$\tau_i,\tau_{ij}\in[a,b]\cap[x_i,x_{i+n+1}],\qquad j=0,\dots,n+1.$$

Уравнения для коэффициентов β_i записываются в виде

$$\sum_{i=-n}^{N} \beta_i \lambda_j(B_n^i) = \lambda_j(m + n),$$

где
$$n(x) = \sum_{i=-n}^{N} b_{\tau_i,i}(\omega_i) B_n^i(x).$$

Рассмотрим примеры, демонстрирующие возможные приложения полученных результатов.

ПРИМЕР I. Квазиинтерполяция кубическими сплайнами.

Для случая $n=3$ определим коэффициенты β_i, $i=-3,\dots,N$, из системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=j-3}^{j-1} \beta_i B_3^i(x_j) = m(x_j) + n(x_j), \\ &\qquad\qquad j = 0,\dots,N+1, \\ &\sum_i \beta_i (B_3^i)'(x_j) = m'(x_j) + n'(x_j), \\ &\qquad\qquad j = 0,\ N+1. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Разрешимость системы (13) следует из единственности соответствующего интерполяционного сплайна [1].

Пусть выполнены ограничения на узлы x_j, при которых матрица системы (13) имеет доминирующую главную диагональ [1]. Тогда выполнено неравенство (7), и для достаточно гладких функций $f(x)$ из теоремы 2 следует, что

$$f(x_j) - S_3 f(x_j) = O(H^5), \qquad j = 0,\dots,N+1,$$

$$\|f - S_3 f\|_{C[a,b]} = O(H^4), \qquad H = \max_j \bar{h}_j .$$

Таким образом, в точках x_j погрешность приближения на порядок меньше, чем в целом на отрезке $[a, b]$.

Приведем явную формулу сплайна $S_3 f(x)$ для случая равномерной сетки узлов с шагом h:

$$S_3 f(x) = \sum_{i=-1}^{N+2} \Big(f(x_i) - \frac{h^2}{3} f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}] +$$

$$+ \frac{2}{3} h^4 f[x_{i-2},\dots, x_{i+2}]\Big) B_3^{i-2}(x).$$

ПРИМЕР 2. Коллокация кубическими сплайнами.

В применении к решению краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка

$$Lu(x) = u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x), \qquad (14)$$

$$q(x) < 0, \qquad a \le x \le b,$$

с краевыми условиями $u(a) = u_0$, $u(b) = u_1$ метод сплайн-коллокации [1] состоит в определении параметров b_i кубического сплайна

$$S_3(x) = \sum_{i=-3}^{N} b_i B_3^i(x)$$

из уравнений

$$\left.\begin{aligned} & LS_3(t_j) = f(t_j), \\ & t_j \in [a,b], \qquad j = 0,\dots,N+1, \\ & S_3(a) = u_0, \quad S_3(b) = u_1. \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Степень близости между точным решением краевой задачи и сплайном $S_3(x)$ зависит от расположения узлов коллокации t_j. Приведем некоторые рекомендации относительно выбора этих узлов.

Определим коэффициенты β_i, $i = -3,\dots,N$, из уравнений

$$\left.\begin{aligned} & \sum_{i=j-3}^{j-1} \beta_i (B_3^i)'(x_j) = \mathcal{M}'(x_j), \\ & \qquad\qquad j = 0,\dots,N+1, \\ & \sum_i \beta_i B_3^i(x_j) = \mathcal{M}(x_j), \\ & \qquad\qquad j = 0, N+1, \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

предположив разрешимость соответствующей интерполяционной задачи. По способу построения $S_3u(x)$, в каждом интервале $[x_j, x_{j+1}]$ существует не менее одной точки t_j, в которой $X_4''(t_j) = (S_3X_4)''(t_j)$, т.е. при условии выполнения неравенств (7) и (8)

$$u''(t_j) - (S_3u)''(t_j) = O(H^3),$$

если $u(x) \in W_\infty^5[a, b]$.

В то же время

$$\|u' - (S_3u)'\|_{C[a,b]} = O(H^3),$$

$$\|u - S_3 u\|_{C[a,b]} = O(H^4).$$

Отсюда, если в качестве узлов коллокации взять точки t_j, будем иметь $L(u - S_3 u)(t_j) = O(H^3)$.

Полученные узлы можно назвать оптимальными. Действительно, если в качестве узлов коллокации взять, например, узлы сетки Δ, то можно получить лишь аппроксимацию с точностью $O(H^2)$ (см. [I]).

Для эффективного вычисления оптимальных узлов коллокации необходимо исследовать условия разрешимости системы (I6) и проверить выполнение неравенств (7). Сделать это в общем случае неравномерной сетки затруднительно. Ограничимся рассмотрением равномерной сетки с шагом h. Матрица системы уравнений (I6) имеет вид:

$$\begin{pmatrix}
\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & & & \\
-(2h)^{-1} & 0 & (2h)^{-1} & & & \\
& -(2h)^{-1} & 0 & (2h)^{-1} & & \\
& & \cdot & \cdot & \cdot & \\
& & & -(2h)^{-1} & 0 & (2h)^{-1} \\
& & & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6}
\end{pmatrix}.$$

При нечетных N определитель этой матрицы равен нулю. При четных $N = 2m$ он равен $-\frac{1}{3}(2h)^{-(N+2)}$, и, следовательно, система (I6) имеет единственное решение. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что это решение имеет вид $\beta_i = \frac{1}{3} h^4$, $i = -3, \dots, N$. Отсюда вытекает, что оптимальные точки коллокации существуют и совпадают с нулями функции $\mathcal{M}''(x)$ - это хорошо известные [I] точки:

$$t_{2i} = x_{2i} + \frac{3 - \sqrt{3}}{6} h, \qquad t_{2i+1} = x_{2i} + \frac{3 + \sqrt{3}}{6} h,$$

$$i = 0, \dots, m.$$

В [I] показано, что при таком выборе узлов коллокации решение краевой задачи будет найдено с точностью $O(h^3)$. Этот результат можно уточнить в случае, когда в уравнении (I4) коэффициент $p(x) \equiv 0$. А именно в предположении знакопостоянства пятой производной решения задачи (I4) нетрудно показать, что в уравнениях коллокации (I5) на самом деле имеет место четвертый порядок погрешности аппроксимации $O(h^4)$. Действительно, определим сплайн

$S(x) \in S_3(\Delta)$ соотношениями

$$S''(t_j) = (S_3 u)''(t_j) - (-1)^j \frac{\sqrt{3}}{108} h^3 u^{(5)}(t_j),$$

$$j = 0, \ldots, N+1,$$

$$S(x_j) = S_3 u(x_j),$$

$$j = 0, N+1.$$

Тогда, почти дословно повторяя рассуждения, проделанные в [I] для случая кубических эрмитовых сплайнов, находим, что

$$\|S - S_3 u\|_{C[a,b]} = O(h^4),$$

а значит, и

$$L(u - S)(t_j) = [u''(t_j) - (S_3 u)''(t_j)] +$$

$$+ (-1)^j \frac{\sqrt{3}}{108} h^3 u^{(5)}(t_j) + q(t_j)([u(t_j) -$$

$$- S_3 u(t_j)] + [S_3 u(t_j) - S_3(t_j)]) = O(h^4).$$

Отсюда нетрудно получить $|S_3(x) - u(x)| = O(h^4)$.

Литература

I. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. -М.: Наука, 1980. - 352 с.

2. SCHOENBERG I.J. On variation - diminishing approximation methods.- In: On numerical approximation. Ed.by R.E.Langer, Madison, 1959, p.249-274.

3. BOOR C.de, FIX G.J. Spline approximation by quasi-inter - polants.- J.Approxim.Theory, 1973, v.8, N 1, p.19-45.

4. LYCHE T., SCHUMAKER L.L. Local spline approximation methods. - J.Approxim.Theory, 1975, v.15, N 4, p.294-325.

5. LYCHE T. Discrete polynomial spline approximation methods. - In: Spline-functions. Proceedings of an International Symposium, Karlsruhe, 1975. Ed.by K.Böhmer a.o. (Lecture notes in math., v.502) Berlin, Springer, 1976, p.144-176.

6. ГРЕБЕННИКОВ А.И. Метод сплайнов в численном анализе. -М.: 1979. - 99 с.

7. ШУМИЛОВ Б.М. О локальной аппроксимации параболическими сплайнами. -В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 81). Новосибирск, 1979, с. 48-54.

Поступила в ред.-изд.отд.
26 ноября 1980 года