М Е Т О Д Ы   С П Л А Й Н - Ф У Н К Ц И Й
(Вычислительные системы)
1981 год   Выпуск 87

УДК 519.651

О ПРОИЗВОДНЫХ СГЛАЖИВАЮЩИХ СПЛАЙНОВ

В.В. Вершинин

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана сетка узлов $a = x_0 < \ldots < x_N = b$ и некоторая функция $f(x) \in W_2^2(a\,,b)$. Предположим, что нам известны с некоторой погрешностью значения $f(x)$ в узлах x_i или даже значения производной $f(x)$ в граничных точках:

$$|f(x_i) - z_i| \le \varepsilon_i, \quad i = 0,\ldots,N,$$

$$|f'(x_j) - z_j'| \le \varepsilon_j', \quad j = 0,N,$$

где ε_i, $\varepsilon_j' \ge 0$, $i = 0,\ldots,N$; $j = 0,N$. Обозначим через G_1 множество функций $g \in W_2^2(a\,,b)$, таких, что $|g(x_i) - z_i| \le \varepsilon_i$, $i = 0,\ldots,N$, а через G_2 – множество функций $g \in G_1$, таких что $|g'(x_j) - z_j'| \le \varepsilon_j'$, $j = 0,\,N$. В теории сплайнов [2,5] рассматривались, в частности, следующие задачи:

1. Найти функцию $S_1(x) \in G_1$, такую, что

$$\int_a^b |S_1''(x)|^2 dx = \min_{g \in G_1} \int_a^b |g''(x)|^2 dx.$$

2. Найти функцию $S_2(x) \in G_2$, такую, что

$$\int_a^b |S_2''(x)|^2 dx = \min_{g \in G_2} \int_a^b |g''(x)|dx.$$

Известно [2,5], что решения задач 1 и 2 существуют и являются кубическими сплайнами, удовлетворяющими некоторым условиям характеризации, в частности, $S_1(x)$ удовлетворяет естественным граничным условиям $S_1''(x_0) = S_1''(x_N) = 0$. При некоторых ограничениях на G_1 и G_2 решения задач 1 и 2 единственны. Известно также [1],что при $\bar{h},\bar{\varepsilon} \to 0$, где $\bar{h} = \max\limits_{0\le i\le N} h_i$, $\bar{\varepsilon} = \max\limits_{0 \le i \le N} \varepsilon_i$, и при некоторых условиях на последовательность сеток первые производные $S_1(x)$ равномерно сходятся к первым производным $f(x)$, а вторые производные $S_1(x)$ при этих же условиях сходятся к вторым производным $f(x)$ в метрике $L_2(a\ b)$. Аналогичные факты справедливы и для сплайна $S_2(x)$. Численные эксперименты показывают (см., например, [2]), что производные подобных сплайнов хорошо аппроксимируют производные $f(x)$. Поэтому возникает вопрос об оценках погрешности аппроксимации производных функции производными таких сплайнов. В настоящей работе предлагаются некоторые оценки для первых производных.

Получим оценки для моментов $M_{k,i} = S''_k(x_i)$, $k = 1,2$, как это делается в [1]. Имеем

$$\int\limits_a^b (f''(x))^2 dx \ge \int\limits_a^b (S''_k(x))^2 dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{3}(M^2_{k,i} + M_{k,i}M_{k,i+1} + M^2_{k,i+1})h_i \ge$$

$$\ge \frac{1}{3}\underline{h} \sum_{i=0}^{N} (M^2_{k,i} + M_{k,i}M_{k,i+1} + M^2_{k,i+1}) =$$

$$= \frac{1}{3}\underline{h}(B_k M_k, M_k),$$

где $\underline{h} = \min\limits_{0\le i\le N} h_i$, $h_i = x_{i+1} - x_i$, матрицы B_1 и B_2 имеют вид:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1/2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1/2 & 2 & 1/2 & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & & \\ 0 & \dots & 1/2 & 2 & 1/2 & \\ 0 & \dots & 0 & 1/2 & 2 & \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1/2 & 2 & 1/2 & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & & \\ 0 & \dots & 1/2 & 2 & 1/2 & \\ 0 & \dots & 0 & 1/2 & 1 & \end{bmatrix}.$$

По теореме Гершгорина, собственные числа матрицы B_1 не меньше 1, а B_2 не меньше 1/2, поэтому

$$(B_1M_1, M_1) \ge (M_1, M_1), \qquad (B_2M_2, M_2) \ge \frac{1}{2}(M_2, M_2).$$

В результате имеем оценки

$$|M_{k,i}| \le P_k \underline{h}^{-1/2} K . \qquad (1)$$

где $$K = \left(\int_a^b (f''(x))^2 dx\right)^{1/2}, \quad P_1 = \sqrt{3}, \quad P_2 = \sqrt{6} .$$

Теперь оценим $|f(x) - S_k(x)|$ тремя способами. Сначала будем оценивать аналогично тому, как это сделано в [I]. Воспользуемся следующим представлением сплайна [3,с. 99]:

$$S(x) = S_i(1-t) + S_{i+1}t - \frac{h_i^2}{6} t(1-t)\,[\,(2-t)M_i + (1+t)M_{i+1}],$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}], \qquad t = \frac{x-x_i}{h_i} ,$$

и предположим, что $f \in W_\infty^2(a,b)$. Тогда имеем

$$|f(x) - S_k(x)| \le |f(x) - f_i(1-t) - f_{i+1}t| + |(f_i - S_{k,i})(1-t) +$$

$$+ (f_{i+1} - S_{k,i+1})t| + \frac{h_i^2}{24}|(2-t)M_{k,i} + (1+t)M_{k,i+1}| \le$$

$$\le \frac{\bar{h}^2}{8}\|f''\|_\infty + 2\bar{\varepsilon} + \frac{\bar{h}^2}{8} \max_i |M_{k,i}| .$$

Воспользовавшись оценками (I), получаем

$$\|f(x) - S_k(x)\|_C \le 2\bar{\varepsilon} + \frac{\bar{h}^2}{8}\|f''\|_\infty + \frac{P_k}{8}\,\bar{h}^2\,\underline{h}^{-1/2}K . \qquad (2)$$

Оценим $|f(x) - S_k(x)|$, используя интерполяционные сплайны $\tilde{S}_1(x)$ и $\tilde{S}_2(x)$ функции $f(x)$, удовлетворяющие соответственно естественным граничным условиям и условиям I-го типа. Имеем

$$|f(x) - S_k(x)| \le |f(x) - \tilde{S}_k(x)| + |\tilde{S}_k(x) - S_k(x)| .$$

Для первого слагаемого правой части неравенства при $k = 2$ известны оценки (см. [3, теорема 3.5])

$$\| f(x) - \tilde{S}_2(x)\|_C \le C_2 \bar{h}^{\alpha_2} \beta_2(f),$$

где константа C_2, степень α_2 и функционал $\beta_2(f)$ зависят от класса функций. Аналогичные оценки справедливы и для сплайна $\tilde{S}_1$, но порядок приближения в этом случае, вообще говоря, ниже.

Для оценки второго слагаемого воспользуемся следующим представлением сплайна [3, с.97]:

$$S(x) = S_i(1-t)^2(1+2t) + S_{i+1}t^2(3-2t) + m_i h_i t(1-t)^2 -$$

$$-m_{i+1}h_i t^2(1-t), \quad x \in [x_i, x_{i+1}],$$

$$t = \frac{x - x_i}{h_i}, \quad m_i = S'(x_i).$$

Поэтому

$$\tilde{S}_k(x) - S_k(x) = (f_i - S_{k,i})(1-t)^2(1+2t) +$$

$$+(f_{i+1} - S_{k,i+1})t^2(3-2t) + (\tilde{m}_{k,i} - m_{k,i})h_i t(1-t)^2 -$$

$$-(\tilde{m}_{k,i+1} - m_{k,i+1})h_i t^2(1-t).$$

Следовательно,

$$|\tilde{S}_k(x) - S_k(x)| \le 2\bar{\varepsilon} + \frac{1}{4}\bar{h}\max_i|\tilde{m}_{k,i} - m_{k,i}|.$$

Оценим $|\tilde{m}_{k,i} - m_{k,i}|$. Из систем для параметров m_i [3,с.98] имеем

$$2(\tilde{m}_{1,0} - m_{1,0}) + (\tilde{m}_{1,1} - m_{1,1}) = c_{1,0},$$

$$\lambda_i(\tilde{m}_{1,i-1} - m_{1,i-1}) + 2(\tilde{m}_{1,i} - m_{1,i}) + \mu_i(\tilde{m}_{1,i+1} - m_{1,i+1}) = c_i,$$

$$(\tilde{m}_{1,N-1} - m_{1,N-1}) + 2(\tilde{m}_{1,N} - m_{1,N}) = c_{1,N},$$

$$\tilde{m}_{2,0} - m_{2,0} = \tilde{S}'_0 - S'_0,$$

$$\lambda_i(\tilde{m}_{2,i-1} - m_{2,i-1}) + 2(\tilde{m}_{2,i} - m_{2,i}) + \mu_i(\tilde{m}_{2,i+1} - m_{2,i+1}) = c_i,$$

$$\tilde{m}_{2,N} - m_{2,N} = \tilde{S}'_N - S'_N,$$

где $\quad \mu_i = h_{i-1}/(h_{i-1} + h_i), \quad \lambda_i = 1 - \mu_i,$

$$c_i = 3\left(\mu_i \frac{\tilde{S}_{i+1} - S_{i+1} - \tilde{S}_i + S_i}{h_i} + \lambda_i \frac{\tilde{S}_i - S_i - \tilde{S}_{i-1} + S_{i-1}}{h_{i-1}}\right),$$

$$c_{1,0} = 3\,\frac{\tilde{S}_1 - S_1 - \tilde{S}_0 + S_0}{h_0}, \quad c_{1,N} = 3\,\frac{\tilde{S}_N - S_N - \tilde{S}_{N-1} + S_{N-1}}{h_{N-1}}.$$

Поэтому

$$|\,\tilde{m}_{1,i} - m_{1,i}| \le \frac{12\bar{\varepsilon}}{\underline{h}},$$

$$|\,\tilde{m}_{2,i} - m_{2,i}| \le \max\left(\frac{12\bar{\varepsilon}}{\underline{h}}, \bar{\varepsilon}'\right),$$

где $\bar{\varepsilon}' = \max(\varepsilon_0', \varepsilon_N')$.

Теперь получаем

$$|\,\tilde{S}_1(x) - S_1(x)| \le 2\,\bar{\varepsilon}[(1-t)^2(1+2t) + t^2(3-2t)] + \\ + \frac{12\,\bar{\varepsilon}\bar{h}}{\underline{h}}\,t(1-t) \le 2\bar{\varepsilon} + \frac{3\,\bar{\varepsilon}\,\bar{h}}{\underline{h}},$$

$$|\,\tilde{S}_2(x) - S_2(x)| \le 2\bar{\varepsilon} + \frac{\bar{h}}{2}\max\left(\frac{6\,\bar{\varepsilon}}{\underline{h}}, \bar{\varepsilon}'\right).$$

В результате имеем оценки

$$\|f(x) - S_1(x)\|_C \le C_1\bar{h}^{\alpha_1}\beta_1(f) + 2\,\bar{\varepsilon} + \frac{3\bar{h}}{\underline{h}}\,\bar{\varepsilon}, \tag{3}$$

$$\|f(x) - S_2(x)\|_C \le C_2\bar{h}^{\alpha_2}\beta_2(f) + 2\bar{\varepsilon} + \frac{\bar{h}}{2}\max\left(\frac{6\bar{\varepsilon}}{\underline{h}}, \bar{\varepsilon}'\right). \tag{4}$$

Если последовательность сеток такова, что

$$\rho = \max_{|i-j|=1}\frac{h_i}{h_j} < (1 + \sqrt{13})/2,$$

то для получения аналогичных оценок можно воспользоваться аппаратом B-сплайнов. Из системы (см. [3,с.141]) имеем

$$\|\tilde{S}_1(x) - S_1(x)\|_C \le 2\bar{\varepsilon}\cdot D,$$

$$\|\tilde{S}_2(x) - S_2(x)\|_C \le D\cdot\max(2\bar{\varepsilon},\ 2\varepsilon_0 + \frac{2}{3}\varepsilon_0' h_0,\ 2\varepsilon_N + \frac{2}{3}\varepsilon_N' h_N)\ ,$$

где $\qquad D = \dfrac{(2+\rho)(1+\rho+\rho^2)}{\rho(3+\rho-\rho^2)}.$

Действуя далее так же, как при выводе оценок (3) и (4), получаем

$$\|f(x) - S_1(x)\|_C \le C_1\bar{h}^{\alpha_1}\beta_1(f) + 2\bar{\varepsilon}\ D\ , \tag{5}$$

$$\|f(x) - S_2(x)\|_C \le D\cdot\max(2\bar{\varepsilon},\ 2\varepsilon_0 + \frac{2}{3}\varepsilon_0' h_0,\ 2\varepsilon_N + \frac{2}{3}\varepsilon_N' h_N) + $$

$$+ C_2\bar{h}^{\alpha_2}\beta_2(f). \tag{6}$$

Обозначим правые части неравенств (2)-(6) через $\gamma_{k,l}$, где $l = 1,2,3$. Так же, как в [I], легко доказать, что $\eta_k = \|f''(x) - S_k''(x)\|_{L_2(a,b)} \to 0$ при $\gamma_{k\ l} \to 0$, где l - одно из чисел I,2,3. Воспользуемся теперь неравенством, приведенным в [4,следствие 5], а именно возьмем некоторый его случай:

$$\|g'\|_{C[a,b]} = \|g'\|_{L_\infty(a,b)} \le A\{H^{-1}\|g\|_{L_\infty(a,b)} + H^{1/2}\|g\|_{L_2(a,b)}\},$$

где H такое, что $0 < H \le b-a$. Применив его для $g(x) = f(x) - S_k(x)$, получим

$$\|f'(x) - S_k'(x)\| \le A\{H^{-1}\gamma_{k,l} + H^{1/2}\eta_k\}.$$

Подставим $H = Q_{k,l}\,\gamma_{k,l}^{\nu}$, где $Q_{k,l}$ - такая константа, что $Q_{k,l}\gamma_{k,l}^{\nu} \le b-a$. Тогда правая часть равна $A\{Q_{k,l}^{-1}\ \gamma_{k,l}^{1-\nu} + Q_{k,l}^{1/2}\gamma_{k,l}^{\nu/2}\eta_k\}$. Если положить $1-\nu=\nu/2$, т.е. $\nu=2/3$, то получаем оценки

$$\|f'(x) - S_k'(x)\|_C \le A(2\bar{\varepsilon} + \frac{\bar{h}^2}{8}\|f''\|_\infty +$$

$$+ \frac{P_k}{8}\bar{h}^2\underline{h}^{-1/2}K)^{1/3} \cdot (Q_{k,1}^{-1} + Q_{k,1}^{1/2}\eta_k) \ , \tag{7}$$

где $\eta_k \to 0$ при $\gamma_{k,1} \to 0$, $P_1 = \sqrt{3}$, $P_2 = \sqrt{6}$;

$$\| f'(x) - S_1'(x) \|_C \le$$

$$\le A(C_1\bar{h}^{\alpha_1}\beta_1(f) + 2\bar{\varepsilon} + 3\frac{\bar{h}}{\underline{h}}\bar{\varepsilon})^{1/3} . (Q_{1,2}^{-1} + Q_{1,2}^{1/2}\eta_1),$$

где $\eta_1 \to 0$ при $\gamma_{1,2} \to 0$;

$$\| f'(x) - S_2'(x) \|_C \le$$

$$\le A(C_2\bar{h}^{\alpha_2}\beta_2(f) + 2\bar{\varepsilon} + \frac{\bar{h}}{2}\max\left(\frac{6\bar{\varepsilon}}{\underline{h}}, \bar{\varepsilon}'\right))^{1/3} (Q_{2,2}^{-1} + Q_{2,2}^{1/2}\eta_2), \tag{8}$$

где $\eta_2 \to 0$ при $\gamma_{2,2} \to 0$;

$$\|f'(x) - S_1'(x)\|_C \le A(C_1\bar{h}^{\alpha_1}\beta_1(f) + 2\bar{\varepsilon}\cdot D)^{1/3}(Q_{1,3}^{-1} + Q_{1,3}^{1/2}\eta_1) \ ,$$

где $\eta_1 \to 0$ при $\gamma_{1,3} \to 0$;

$$\| f'(x) - S_2'(x)\|_C \le A(C_2\bar{h}^{\alpha_2} \beta_2(f) + D\cdot\max\{2\bar{\varepsilon}, 2\varepsilon_0 +$$

$$+\frac{2}{3}\varepsilon_0'h_0^{-1}, 2\varepsilon_N + \frac{2}{3}\varepsilon_N'h_N^{-1}\})^{1/3}(Q_{2,3}^{-1} + Q_{2,3}^{1/2}\eta_2), \tag{9}$$

где $\eta_2 \to 0$ при $\gamma_{2,3} \to 0$.

В частности, если $f \in C^2W^4_{\Delta,\infty}(a,b)$, то из (8) и (9) получаем оценки:

$$\| f'(x) - S_2'(x)\|_C \le$$

$$\le A(\frac{5}{384}\bar{h}^4\|f^{IV}(x)\|_\infty + 2\bar{\varepsilon} + \frac{\bar{h}}{2}\max(\frac{6\bar{\varepsilon}}{\underline{h}}, \bar{\varepsilon}'))^{1/3}(Q_{2,2}^{-1} + Q_{2,2}^{1/2}\eta_2), \tag{10}$$

$$\| f'(x) - S_2'(x)\|_C \le A\Big(\frac{5}{384}\bar{h}^4\|f^{IV}(x)\|_\infty + D\cdot\max\big(2\bar{\varepsilon}, 2\varepsilon_0 + \frac{2}{3}\varepsilon_0' h_0, 2\varepsilon_N + \frac{2}{3}\varepsilon_N' h_N\big)\Big)^{1/3}\big(Q_{2,3}^{-1} + Q_{2,3}^{1/2}\eta_2\big) . \qquad (11)$$

На равномерных сетках из оценки (7) получаем

$$\|f'(x) - S_k'(x)\|_C \le A\Big(2\bar{\varepsilon} + \frac{h^2}{8}\|f''\|_\infty + \frac{P_k}{8} h^{3/2} K\Big)^{1/3} \big(Q_{k,1}^{-1} + Q_{k,1}^{1/2}\eta_k\big),$$

здесь h обозначает шаг равномерной сетки.

В заключение автор выражает благодарность В.Л.Мирошниченко и Б.М.Шумилову за полезные обсуждения.

Литература

1. МОРОЗОВ В.А. О задаче дифференцирования и некоторых алгоритмах приближения экспериментальной информации. -В кн.: Вычислительные методы и программирование. М., 1970, с.46-62.

2. ВЕРШИНИН В.В. О сглаживающих сплайнах и их производных.Новосибирск. Б.и., 1980 - 20 с. - (Препринт/Институт математики СО АН СССР).

3. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980. - 350 с.

4. ГАБУШИН В.Н. Неравенства между производными в метриках L_p при $0 < p \le \infty$.-Изв. АН СССР. Сер. мат., 1976, т.40, № 4, с. 869-892.

5. ЛОРАН П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. - М.: Мир, 1975, - 496 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
25 февраля 1981 года