МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ
(Вычислительные системы)
1981 год Выпуск 87

УДК 519.651

# О СПЛАЙН-ОТОБРАЖЕНИЯХ

В.В. Вершинин

Рассматриваются несколько задач о сплайнах в выпуклых множествах. В §1 исследуются сплайн-функции нескольких переменных, доказываются теоремы существования, характеризации и единственности. В §2 ставится и изучается некоторая задача о сплайне в выпуклом множестве в гильбертовом пространстве отображений из $m$-мерного параллелепипеда в $R^n$. Эту задачу мы называем задачей о сплайн-отображении. Она возникает, в частности, при построении гладкой в известном смысле кривой или поверхности, проходящих в некоторых окрестностях, например шаровых, заданных точек. Доказывается, что решение задачи всегда существует и представляет собой сплайн-отображение, т.е. такое отображение $f$, что $f_h$, $h = 1,2,\dots,n$, являются сплайн-функциями.

## §1. Сплайны нескольких переменных в выпуклом множестве

Для формулировки двух вариантов задачи о сплайн-функции в выпуклом множестве нам понадобятся два функционала, которые для случая двух переменных были введены соответственно в работах [1] и [2], а для их определения в общем случае $m$ переменных и постановки задач проведем некоторые рассмотрения.

Пусть $m \ge 2$. (Если $m = 1$, то мы имеем стандартный функционал в теории сплайнов.) Обозначим через $\Omega$ $m$-мерный параллелепипед, $\Omega = [a_1,b_1] \times \dots \times [a_m,b_m]$. Зафиксируем в нем сетку $\Delta = \Delta_1 \times \dots \times \Delta_m$, $\Delta_j$: $a_j = x_0^j < \dots < x_{N_j}^j = b_j$, $j=1,\dots,m$. Пусть даны два набора (их будем обозначать мультииндексами $q$, $\mu$ и т.п.) из $m$ натуральных чисел $(q_1,\dots,q_m)$ и $(\mu_1,\dots,\mu_m)$. Предположим, что

$\mu_j \le q_j$, $j = 1,\dots,m$. Нам понадобятся такие переменные $x = (x^1,\dots,x^m)$, у которых некоторые $x^l$ принадлежат $[a_l, b_l]$, а другие $x^k$ принимают дискретные значения из сетки $\Delta_k$. Например, для трехмерного параллелепипеда такие $x$ принадлежат пересечениям $\Omega$ с плоскостями $x^k = x^k_{i_k}$ и пересечениям $\Omega$ с прямыми $x^k = x^k_{i_k}$, $x^j = x^j_{i_j}$. Обозначим через $\alpha$ такой набор из $m$ чисел $(\dots,q_l,\dots \dots,\nu_k,\dots)$, в котором на $j$-м месте может стоять либо $q_j$, либо некоторое целое число $\nu_j$ такое, что $0 \le \nu_j \le \mu_j - 1$, причем в таком наборе всегда есть числа двух видов: $q_l$ и $\nu_k$. Множество всех таких наборов обозначим через $A$. Пусть $x_\alpha$ – такая переменная, что $x^l \in [a_l, b_l]$, если в наборе $\alpha$ на $l$-м месте стоит $q_l$, и $x^k \in \Delta_k$, если на $k$-м месте в наборе $\alpha$ стоит $\nu_k$. Множество индексов непрерывных аргументов $x^l$ обозначим через $L_\alpha$, а дискретных через $K_\alpha$. Очевидно, $L_\alpha \cup K_\alpha = \{1,\dots,m\}$, $L_\alpha, K_\alpha \ne \emptyset$. Точки $x_\alpha$ заполняют параллелепипеды меньшей размерности $\Omega_\alpha \subset \Omega$.

Определим следующие два функционала:

$$\left.\begin{aligned} J^{I}(f) &= \Big\| \sum_j D^{q_j} f \Big\|_{L_2(\Omega)}, \\ J^{II}(f) &= \| D^q f \|_{L_2(\Omega)} + \sum_{\alpha \in A} \sum_{\Omega_\alpha} \rho_{\alpha,\Omega_\alpha} \| D^\alpha f(x_\alpha) \|_{L_2(\Omega_\alpha)}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Здесь $D^{q_j}$ обозначает оператор дифференцирования $q_j$ раз по переменной $j$, $f \in W_2^q(\Omega)$, $\rho_{\alpha,\Omega_\alpha}$ – неотрицательные действительные числа.

Предположим, что для функционала $J^{II}$ выполнено следующее условие. Пусть дан набор $\alpha = (\dots,\nu_k,\dots)$. Рассмотрим наборы $\alpha' \in A$ которые отличаются от $\alpha$ только $k$-м элементом. Потребуем, чтобы количество неравных нулю чисел $\rho_{\alpha',\Omega_{\alpha'}}$, соответствующих наборам $\alpha'$ с $k$-м элементом $\xi_k \le \nu_k$, было больше или равно $\nu_k + 1$, а общее количество отличных от нуля чисел $\rho_{\alpha',\Omega_{\alpha'}}$ было больше или равно $q_k$.

Пусть $B$ – подкласс $W_2^q(\Omega)$, состоящий из функций таких, что для каждого $j$, $j = 1,\dots,m$, и $i_j = 0,\dots,N_j$, функция $D^\nu f(x^1,\dots$

$\ldots,x^j_{i_j},\ldots,x^m)$ есть сплайн от переменных $x^1,\ldots,x^{j-1},x^{j+1},\ldots,x^m$ на сетке $\hat{\Delta} = \Delta_1 x \ldots x \Delta_{j-1} x \Delta_{j+1} x \ldots x \Delta_m$.

Для функционала $J^I$ на классе $B$, а для функционала $J^{II}$ на классе $W^q_2(\Omega)$ имеют место вариационные свойства интерполяционных и сглаживающих сплайнов степени $2q-1$, дефекта $\mu$ для трех классических типов граничных условий по каждой переменной независимо [I,2]. По аналогии со случаем одной переменной [3] для функционалов $J^I$ и $J^{II}$ может быть поставлена задача о сплайн-функции в выпуклом множестве, являющаяся в некотором смысле задачей сглаживания. Мы будем вести рассмотрения для функционалов $J^I$ и $J^{II}$ параллельно и, когда это возможно, индексы I и II опускать.

В отдельных случаях будем рассматривать функционалы $J^I, J^{II}$ на классах функций, удовлетворяющих на границе области $\Omega$ некоторым граничным условиям. Вид этих условий указывается с помощью набора $r$, в котором каждый элемент $r_j$, $j = 1,\ldots,m$, может принимать значения I,2 и 3.

Обозначим через $V^r$ подкласс $W^q_2(\Omega)$, состоящий из функций, удовлетворяющих по переменной $j$ граничным условиям типа $r_j$, если $j$ = I,3. Если $r_j = 2$, то по переменной $x^j$ на функции из $V^r$ никаких граничных условий не накладывается. Формально $V^r$ определяется следующим образом.

Пусть $D^p$ - оператор дифференцирования такой, что $p_j$ может равняться $\mu_j,\ldots,q_j-1$, если $r_j=1$, и $0,\ldots,\mu_j-1$, если $r_j\neq 1$. Тогда для $f\in V^r$ должно выполняться условие

$$D^p f(x_i) = y^p_i, \tag{2}$$

где $x_i = (x^1_{i_1},\ldots,x^m_{i_m})$ и $x^j_{i_j} = a_j, b_j$, если $r_j = 1$, и $x^j_{i_j} \in \Delta_j$, если $r_j \neq 1$, а $y^p_i$ - заданные действительные числа. Пусть $D^d$ обозначает оператор дифференцирования такой, что $d_j = 0,\ldots,q_j-1$, если $r_j = 3$, и $d_j = 0,\ldots,\mu_j-1$, если $r_j = 1,2$. Тогда для $f\in V^r$ должны выполняться условия: $D^d f(x)$ есть периодическая по $x^j$ функция с периодом $b_j-a_j$, где $j$ такое, что $r_j = 3$, а также если $D^d$ - оператор дифференцирования такой, что $d_j = \mu_j,\ldots,q_j-1$, если $r_j = 1,3$, и что $d_j = 0,\ldots,\mu_j-1$, если $r_j = 2$, то $D^d f(x)$ (где $x^j = a_j, b_j$ при $r_j = 1$) есть периодическая по $x^j$ функция с периодом $b_j - a_j$ при $r_j = 3$.

Через $V^r_0$ обозначим класс, для которого $y^p_i = 0$. Ясно, что $V^{2,2,\ldots,2} = W^q_2(\Omega)$. Определим $B^r = B \cap V^r$.

Зафиксируем наборы действительных чисел $z_i^\nu$ и $\varepsilon_i^\nu$, где $0 \le \nu_j \le \mu_j - 1$, $0 \le i_j \le N_j$. Пусть $\varepsilon_i^\nu \ge 0$, и предположим, что $\varepsilon_i^\nu$ могут принимать значения, равные $+\infty$. Через $\bar{V}^r$ обозначим подкласс $V^r$, состоящий из функций, удовлетворяющих неравенствам

$$|D^\nu f(x_i) - z_i^\nu| \le \varepsilon_i^\nu , \tag{3}$$

где $x_i \in \Delta$. Предположим также, что $z_i^\nu$ и $\varepsilon_i^\nu$ согласованы с периодичностью функций, т.е. $z_{i_1,\dots,0,\dots,i_m}^{\nu_1,\dots,\nu_j,\dots,\nu_m} = z_{i_1,\dots,N_j,\dots,i_m}^{\nu_1,\dots,\nu_j,\dots,\nu_m}$ и $\varepsilon_{i_1,\dots,0,\dots,i_m}^{\nu_1,\dots,\nu_j,\dots,\nu_m} = \varepsilon_{i_1,\dots,N_j,\dots,i_m}^{\nu_1,\dots,\nu_j,\dots,\nu_m}$, если $r_j = 3$. Определим $\bar{B}^r = B \cap \bar{V}^r$.

Теперь сформулируем два варианта задачи о сплайн-функции нескольких переменных в выпуклом множестве.

ЗАДАЧА I. Найти минимум функционала $J^I$ в классе $\bar{B}^r$.

ЗАДАЧА II. Найти минимум функционала $J^{II}$ в классе $\bar{V}^r$.

Обозначим через $S = S_{q,\mu}$ определенную на $\Omega$ сплайн-функцию степени $2q - 1$, дефекта $\mu$. Естественные граничные условия для сплайна, лежащего в $V^r$, у которого хотя бы одно $r_j = 2$, сформулируем следующим образом:

$$D^p S(x^1_{i_1}, \dots, x^m_{i_m}) = 0, \tag{4}$$

где $p_j = 0, \dots, \mu_j - 1$, если $r_j = 3$; $p_j = 0, \dots, q_j - 1$, если $r_j = 1$, и $p_j = q_j, \dots, 2q_j - \mu_j - 1$, если $r_j = 2$; $x^j_{i_j} \in \Delta_j$, если $p_j = 0, \dots$ $\dots, \mu_j - 1$, и $x^j_{i_j} = a_j, b_j$, если $p_j = \mu_j, \dots, 2q_j - \mu_j - 1$.

Пусть $[f]_\xi^j$ обозначает величину разрыва функции $f$ в точке $\xi$, $\hat{x}^j = (x^1, \dots, x^{j-1}, x^{j+1}, \dots, x^m)$, $\hat{\Omega}^j = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{j-1}, b_{j-1}] \times$ $\times [a_{j+1}, b_{j+1}] \times \dots \times [a_m, b_m]$,

$$D^{p_j}_{i_j}(S)(\hat{x}^j) = (-1)^{q_j - p_j} [D^{2q_j - p_j - 1} S(x)]_{x^j_{i_j}} ,$$

а $F_{\hat{p}_j, \hat{i}_j}(\hat{x}^j)$ есть фундаментальный сплайн, лежащий в пространстве функций $m - 1$ переменной $V_0^{\hat{r}_j}$, удовлетворяющий естественным граничным условиям (4) и условиям

$$D^{p'} F_{\hat{p}_j, \hat{i}_j}(x^1_{i'_1}, , x^{j-1}_{i'_{j-1}}, x^{j+1}_{i'_{j+1}}, \dots, x^m_{i'_m}) = \begin{cases} 1, \text{если } p' = \hat{p}_j,\ i' = \hat{i}_j , \\ 0 - \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Введем величины $D_i^{p,I}$ и $D_i^{p,\Pi}$ по формулам:

$$D_i^{p,I} = D_i^{p,I}(s) = \sum_j (D_{i_j}^{p_j}(s)(\hat{x}^j),\ F_{\hat{p}_j,\hat{i}_j}(\hat{x}^j))_{L_2(\hat{\Omega}^j)}, \tag{5}$$

$$D_i^{p,\Pi} = D_i^{p,\Pi}(s) = (-1)^{|q-p|}[\,D^{2q-p-1}\,s]_{x_i} +$$

$$+\sum_{\alpha\in A}(-1)^{\sum\limits_{j\in L_\alpha}(q_j-p_j)}\rho_{\alpha,\Omega_\alpha}[D^{\beta(\alpha)}\,s(x_\alpha)]_{(x_{i_1}^{j_1},\dots,x_{i_{j_h}}^{j_h})}, \tag{6}$$

где $x^{j_1},\dots,x^{j_h}$ таковы, что $j_1\in L_\alpha$, $\beta(\alpha)$ получается из $\alpha$ заменой $q_j$ на $2q_j-p_j-1$, а $x_\alpha$ есть набор символов, в котором на $j$-м месте стоит $x^j$, если $j\in L_\alpha$, и $x_{i_j}^j\in\Delta_j$, если $j\in K_\alpha$, причем $i_j$ взято из символов индекса $D_i^{p,\Pi}$, $x_\alpha\in\Omega_\alpha$.

ТЕОРЕМА I. Решения задач I и П существуют и являются сплайн-функциями $s_{q;\mu}^{I}$ и $s_{q;\mu}^{\Pi}$, удовлетворяющими естественным граничным условиям (4) по переменной $x^j$, если $r_j=2$. Эти сплайны характеризуются следующими условиями. Если $\varepsilon_i^\nu>0$, то

$$D_i^\nu \ge 0 \text{ при } D^\nu s(x_i) = z_i^\nu - \varepsilon_i^\nu,$$

$$D_i^\nu \le 0 \text{ при } D^\nu s(x_i) = z_i^\nu + \varepsilon_i^\nu,$$

$$D_i^\nu = 0 \text{ при } |D^\nu s(x_i) - z_i^\nu| < \varepsilon_i^\nu.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы из [4], где изучался случай одной переменной. Метод доказательства необходимости условий характеризации был впервые предложен в [5] при изучении задачи сглаживания для кубических сплайнов дефекта I. Взяв для каждой функции $f$ из $\widetilde{B}^r$ или $\widetilde{V}^r$ ее интерполяционный сплайн, удовлетворяющий условиям (4), получим, что значение соответствующего функционала на этом сплайне строго меньше, чем значение этого функционала на функции $f$, если $f$ не является сплайном.Поэтому можно ограничиться множеством сплайнов, лежащим в $\bar{V}^r$ и удовлетворяющим условиям (4). Применяя формулу интегрирования по частям, получаем $J(S) = \sum_i \sum_\nu D^\nu S(x_i)\cdot D_i^\nu$, где $\nu_j = 0,\dots,\mu_j-1$, $i_j = 0,\dots,N_j$, а также $\nu_j$ может равняться $\mu_j,\dots,q_j$, если $i_j = 0, N_j$, где $D_i^\nu$ для новых значений индексов определяется аналогично.

Существование решения следует из того, что каждое $D_i^\nu$ есть линейная форма от $D^{\nu'}S(x_{i'})$, где $\nu'$ и $i'$ пробегают те же значения, что и выше.

Перейдем к характеризации. Пусть сплайн $S$ минимизирует функционал $J$. Возьмем вариацию этого сплайна $\tilde{S} = S + \alpha F_{\nu,i}$, где $\alpha$ – действительное число, а $F_{\nu,i}$ – фундаментальный сплайн, лежащий в $V_0^r$, удовлетворяющий условиям (4) и такой, что

$$D^{\nu'}F_{\nu,i}(x_{i'}) = \begin{cases} 1, \text{ если } & \nu' = \nu,\ i' = i; \\ 0 - \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Легко видеть, что $J(\tilde{S}) = J(S) + 2\alpha b_{\nu,i} + \alpha^2 a_{\nu,i}$ и

$$\left.\begin{aligned} a_{\nu,i} &= J(F_{\nu,i}), \\ b_{\nu,i} &= (D^q F_{\nu,i}, D^q S)_{L_2(\Omega)} + \sum_{\alpha\in A} \sum_{\Omega_\alpha} \rho_{\alpha,\Omega_\alpha} (D^\alpha F_{\nu,i}, D^\alpha S)_{L_2(\Omega_\alpha)}. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Если $b_{\nu,i} \neq 0$ и $D^\nu S(x_i) > z_i^\nu - \varepsilon_i^\nu$, то выберем $\alpha$ отрицательным и таким, чтобы $|\alpha| < 2|b_{\nu,i}|\cdot(a_{\nu,i})^{-1}$ и $|\alpha| < D^\nu S(x_i) - (z_i^\nu - \varepsilon_i^\nu)$. Тогда $\tilde{S} \in \bar{V}^r$ и $J(\tilde{S}) - J(S) = \alpha a_{\nu,i}(\alpha + 2b_{\nu,i}\cdot(a_{\nu,i})^{-1})$. Следовательно, $b_{\nu,i} \le 0$. Аналогично доказывается, что $b_{\nu,i} \ge 0$, если $D^\nu S(x_i) < z_i^\nu + \varepsilon_i^\nu$. Интегрируя по частям, получаем $b_{\nu,i} = D_i^\nu$. Необходимость доказана.

Докажем обратное: если $S$ удовлетворяет условиям характеризации, то для любого сплайна $\bar{S}$, удовлетворяющего условиям задачи $J(S) < J(\bar{S})$.

Действительно, $J(\bar{S} - S) = J(\bar{S}) - J(S) - 2H$, где

$$H^{I} = \left(\sum_j D^{q_j}(\bar{S}-S), D^{q_j}S\right)_{L_2(\Omega)},$$

$$H^{II} = (D^{q}(\bar{S}-S), D^{q}S)_{L_2(\Omega)} + \sum_{\alpha\in A}\sum_{\Omega_\alpha} \rho_{\alpha,\Omega_\alpha}(D^{\alpha}(\bar{S}-S), D^{\alpha}S)_{L_2(\Omega_\alpha)}.$$

Имеем $H = \sum_{\nu}\sum_{i} D^{\nu}(\bar{S}-S)(x_i)\cdot D_i^{\nu}$. Если $D^{\nu}S(x_i)=z_i^{\nu}-\varepsilon_i^{\nu}$, то $D^{\nu}(\bar{S}-S)\geq 0$ и $D_i^{\nu}\geq 0$, следовательно, $D^{\nu}(\bar{S}-S)(x_i)\cdot D_i^{\nu}\geq 0$. Если $D_i^{\nu}S(x_i)=z_i^{\nu}+\varepsilon_i^{\nu}$, то $D^{\nu}(\bar{S}-S)(x_i)\cdot D_i^{\nu}\geq 0$. Если $z_i^{\nu}-\varepsilon_i^{\nu} < D^{\nu}S(x_i) < z_i^{\nu}+\varepsilon_i^{\nu}$, то $D_i^{\nu}=0$, следовательно, $D^{\nu}(\bar{S}-S)(x_i)\cdot D_i^{\nu}=0$. В итоге $H\geq 0$. Значит, $J(S)\leq J(\bar{S})$. Теорема доказана.

Рассмотрим вопрос о единственности решения этой задачи.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть каждый сплайн, лежащий в $\bar{V}^r$, имеет столько нетривиальных разрывов $D_i^{\nu}$, что, взяв полином $P$ степени $q-1$, лежащий в $\bar{V}_0^r$, из $D^{\nu}P(x_i)=0$ получим $P\equiv 0$. Тогда решение задач I и II единственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S$ и $\bar{S}$ – такие сплайны, что на них достигается минимум функционала $J$, $J(S)=J(\bar{S})$. Тогда $J(\bar{S}-S)=-2H$, где $H$ определяется в доказательстве теоремы I, но $H\geq 0$, следовательно, $J(\bar{S}-S)=0$, значит, $S$ и $\bar{S}$ отличаются на полином степени $q-1$: $\bar{S}-S=P$. Из условий теоремы следует, что существуют нетривиальные разрывы $D_i^{\nu}$, значит, $D^{\nu}S(x_i)=z_i^{\nu}\pm\varepsilon_i^{\nu}$ (в зависимости от знака $D_i^{\nu}$). Но поскольку $D_i^{\nu}=\bar{D}_i^{\nu}$, то $D^{\nu}S(x_i)=D^{\nu}\bar{S}(x_i)$, т.е. $D^{\nu}P(x_i)=0$. Тогда из условий теоремы следует, что $S\equiv\bar{S}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Возможна также постановка задачи, когда равенства (2) заменяются неравенствами типа (3). Тогда можно получить классы $V^r$, выбирая $\varepsilon_i^{\nu}$ равными 0 или $+\infty$ в зависимости от $r_j$. Для такой постановки имеют место аналогии теорем I и 2. В теореме I при этом появляются дополнительные условия характеризации.

## §2. Сплайн-отображения

Пусть $f=(f_1,\dots,f_n)$ есть отображение из $\Omega$ в $R^n$ такое, что $f_h\in W^q(\Omega)$, $h=1,\dots,n$. Определим следующие функционалы:

$$J^{I}(f) = J_1^{I}(f_1)+ \dots + J_n^{I}(f_n),$$

$$J^{II}(f) = J_1^{II}(f_1)+ \dots + J_n^{II}(f_n),$$

где $J_h^{I}$, $J_h^{II}$, $h=1,\dots,n$, определяются по формулам (I). Так же, как в §I, рассмотрения для функционалов $J^{I}$ и $J^{II}$ мы будем вести параллельно и, когда это возможно, индексы I и II опускать. Можно также считать, что $J(f)$ имеет вид, как в формулах (I), но под $f$ понимать радиус-вектор, а под квадратом - квадрат нормы вектора. Заметим, что $J(f)$ инвариантен относительно ортогональной замены координат в $R^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Полиномиальным сплайн-отображением степени $2q-1$, дефекта $\mu$, из параллелепипеда $\Omega \subset R^m$ с сеткой $\Delta \subset \Omega$ в $R^n$ называется отображение $s = s_{q,\mu} = (s_1,\dots,s_n)$ такое, что $s_h$, $h=1,\dots,n$, является полиномиальным сплайном на $\Omega$ с сеткой $\Delta$ степени $2q-1$, дефекта $\mu$.

Пусть для каждой пары наборов $i$ и $\nu$ такой, что $i_j=0,\dots,N_j$, $\nu_j = 0,\dots,\mu_j - 1$, зафиксировано замкнутое выпуклое множество $C_i^{\nu}$ в $R^n$. Поставим следующие задачи, которые будем называть задачами о сплайн-отображении.

ЗАДАЧА I. Найти минимум функционала $J^{I}(f)$ на множестве отображений $f$ таких, что $D^{\nu}f(x_i) \in C_i^{\nu}$ и $f_h \in B^r$, $h = 1,\dots,n$.

ЗАДАЧА II. Найти минимум функционала $J^{II}(f)$ на множестве отображений $f$ таких, что $D^{\nu}f(x_i) \in C_i^{\nu}$ и $f_h \in V^r$, $h = 1,\dots,n$.

Через $D_i^{\nu} = D_i^{\nu}(s)$ обозначим вектор $D_i^{\nu} = (D_i^{\nu}(s_1),\dots,D_i^{\nu}(s_n))$, где $D_i^{\nu}(s_h)$ определяются по формулам (5) и (6).

ТЕОРЕМА 3. *Решения задач I и II существуют и являются сплайн-отображениями $s^{I}$ и $s^{II}$ степени $2q-1$, дефекта $\mu$, и такими, что каждая их компонента $s_h$, $h=1,\dots,n$, удовлетворяет естественным граничным условиям (4) по переменной $x_j$, если $r_j=2$. Эти сплайн-отображения характеризуются следующими условиями: $(D_i^{\nu}, c-D^{\nu}f(x_i)) \ge 0$ для всех $c \in C_i^{\nu}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждения, проводимые ниже повторяют доказательство теоремы I. Взяв для каждого отображения $f$ его интерполяционное сплайн-отображение $S$, получим, что если $f$ не есть сплайн-отображение, то $J(S) < J(f)$, поэтому можно ограничиться множеством сплайн-отображений. Применяя формулу интегрирования по частям, получаем: $J(S) = \sum_i \sum_\nu (D^\nu S(x_i), D_i^\nu)$, где суммирование ведется по тем же индексам $i$ и $\nu$, что и в доказательстве теоремы I. Существование решения следует из того, что каждое $D_i^\nu(S_h)$ есть линейная форма от $D^{\nu'} S_h(x_{i'})$. Перейдем к характеризации. Пусть сплайн-отображение $S$ минимизирует функционал $J$. Возьмем вариацию этого сплайн-отображения $\tilde{S}(x) = S(x) + \alpha((c_1 - S_1(x)) \cdot (F_{\nu,i})_1(x), \ldots, (c_n - S_n(x)) \cdot (F_{\nu,i})_n(x))$, где $\alpha$ – действительное число, а $(F_{\nu,i})_h$ – фундаментальный сплайн по переменной $h$. Тогда $J(\tilde{S}) = J(S) + 2\alpha(b_{\nu,i}, c - D^\nu S(x_i)) + \alpha^2(a_{\nu,i}, (c - D^\nu S(x_i))^2)$, где $a_{\nu,i}$ и $b_{\nu,i}$ есть векторы, компоненты которых выражаются по формулам (7), а $(c - D^\nu S(x_i))^2$ есть вектор, координаты которого суть квадраты координат вектора $c - D^\nu S(x_i)$. Если $(b_{\nu,i}, c - D^\nu S(x_i)) \neq 0$, то выбираем $\alpha$, $0 < \alpha \le 1$, таким, чтобы $\alpha < |(b_{\nu,i}, c - D^\nu S(x_i))| \times (a_{\nu,i}, (c - D^\nu S(x_i))^2)^{-1}$. Тогда $D^\nu \tilde{S}(x_i) \in C_i^\nu$ и $J(\tilde{S}) - J(S) = \alpha(2(b_{\nu,i}, c - D^\nu S(x_i)) + \alpha(a_{\nu,i}, (c - D^\nu S(x_i))^2)$. Следовательно, $(b_{\nu,i}, c - D^\nu S(x_i)) \ge 0$. Но $b_{\nu,i} = D_i^\nu$, и необходимость условия доказана. Докажем, что если сплайн-отображение $S$ удовлетворяет условиям характеризации, то $J(S) \le J(\bar{S})$ для любого сплайн-отображения $\bar{S}$, удовлетворяющего условиям задачи. Действительно, $J(\bar{S} - S) = J(\bar{S}) - J(S) - 2H$, где $H$ есть сумма $H_h$, которые определяются в доказательстве теоремы I. Тогда $H = \sum_\nu \sum_i (D^\nu(\bar{S} - S)(x_i), D_i^\nu)$. Условие характеризации означает, что $(D^\nu(\bar{S} - S)(x_i), D_i^\nu) \ge 0$. Следовательно, $H \ge 0$, и $J(S) \le J(\bar{S})$. Теорема доказана.

Геометрически характеризационную часть теоремы 3 можно сформулировать следующим образом. Гиперплоскость, проходящая через $D^\nu S(x_i)$ и перпендикулярная к $D_i^\nu$, должна быть опорной к множеству $C_i^\nu$, причем вектор $D_i^\nu$ направлен в полупространство, в котором лежит $C_i^\nu$, если $C_i^\nu$ не лежит в этой гиперплоскости.

Вопрос единственности мы будем рассматривать в некотором частном случае, а именно предположив, что границы множеств $C_i^\nu$ не содержат отрезков.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Если допустимый класс отображений таков, что каждое отоб-*

ражение, лежащее в нем, имеет столько нетривиальных разрывов $D_i^\nu$, что, взяв полиномиальное отображение $P$ степени $q-1$, из $D^\nu P(x_i)=0$ получаем $P\equiv 0$, то решение задач I и П единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 2. Также получаем, что два экстремальных сплайн-отображения $S$ и $\bar S$ должны отличаться на полиномиальное отображение $P$: $\bar S - S = P$. Из условий предложения следует, что существуют нетривиальные разрывы $D_i^\nu$, а из условий на множества $C_i^\nu$, что $D^\nu\bar S(x_i) = D^\nu S(x_i)$. Тогда из условий предложения следует $\bar S\equiv S$. Предложение доказано.

В заключение автор выражает благодарность В.Л.Мирошниченко и Н.Н.Павлову за полезные обсуждения.

## Литература

I. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Экстремальное свойство бикубических многозвенников и задача сглаживания. -В кн.: Вычислительные системы. Вып. 42. Новосибирск, 1970, с.109-158.

2. ИМАМОВ А. О некоторых экстремальных свойствах сплайнов многих переменных.-В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып.65 ). Новосибирск, 1975, с.68-73.

3. ЛОРАН П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация.-М.: Мир, 1975.

4. ВЕРШИНИН В.В. О сглаживающих сплайнах и их производных. Новосибирск. Б.и. - 1980 - 20 с. - (Препринт/Ин-т математики СО АН СССР).

5. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. -М.: Наука, 1980. - 350 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
16 октября 1980 года