МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ
(Вычислительные системы)
1981 год Выпуск 87

УДК 519.63

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Ю.С.Завьялов, В.Л.Мирошниченко, В.П.Роменский

Метод сплайн-коллокации для уравнений эллиптического типа в прямоугольной области Ω на основе бикубических сплайнов рассматривался в ряде работ последних лет. Но только в [1] показана сходимость коллокационного решения к точному в сеточной норме C. В работе [2] рассмотрен вариант метода решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона с использованием B-сплайнов. Выведена система уравнений для нахождения сплайна, и предложен итерационный алгоритм ее решения. Однако при доказательстве в [2] сходимости метода в норме $C[\Omega]$ была допущена ошибка. В настоящей статье дается новое доказательство. Схема рассуждений осталась той же, но сходимость рассматривается в $C^\lambda[\Omega]$, $0 < \lambda \le 1$.

В §1 изложены необходимые сведения о сходимости интерполяционных бикубических сплайнов в норме пространства $C^\lambda[\Omega]$. В §2 исследуется сходимость метода сплайн-коллокации.

§1. Сходимость интерполяции бикубическими сплайнами в $C^\lambda[\Omega]$

Пусть $C^\lambda[\Omega]$ - пространство непрерывных на прямоугольнике $\Omega = [a,b]\times[c,d]$ функций $f(x,y)$, для которых величина

$$|f|_{C^\lambda[\Omega]} = \sup_{\substack{P,Q\in\Omega \\ P\neq Q}} \frac{|f(P) - f(Q)|}{|P-Q|^\lambda}$$

конечна. Норма в $C^\lambda[\Omega]$ вводится соотношением

$$\|f\|_{C^\lambda[\Omega]} = \|f\|_{C[\Omega]} + |f|_{C^\lambda[\Omega]}. \tag{1}$$

Изучение сходимости интерполяции в прямоугольной области по этой норме можно провести таким же способом, как и по норме пространства $C[\Omega]$ (см. [3]), опираясь на оценки погрешности интерполяции функций одной переменной на отрезке.

I. На отрезке $[a,b]$ введем последовательность сеток Δ_{1n}: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $n = 1,2,\ldots$. Обозначим $h_i = x_{i+1} - x_i$, $\bar{h}_n = \max h_i$, $\underline{h}_n = \min h_i$ и предположим, что $\bar{h}_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Будем рассматривать классы $C^{k+\lambda}[a,b]$, $0 < \lambda \le 1$, функций $f(x)$ с производными k-го порядка $f^{(k)}(x) \in C^{\lambda}[a,b]$. Пусть $S_n(f;x)$ - кубический сплайн, интерполирующий функцию $f(x)$ на сетке Δ_{1n}, т.е. $S_n(f;x_i) = f(x_i)$, $i = 0,\ldots,n$. При этом должны выполняться какие-либо из краевых условий [3]:

I. $S_n'(f;x_i) = f'(x_i)$, $i = 0,n$;

II. $S_n''(f;x_i) = f''(x_i)$, $i = 0,n$;

III. условия периодичности $S_n^{(p)}(f;x_0) = S_n^{(p)}(f;x_n)$, $p = 1,2$;

IV. условия непрерывности $S_n'''(f;x)$ в узлах x_1 и x_{n-1}.

При этом предполагается, что граничные условия типа I применяются при $k \ge 1$, типа II - при $k \ge 2$, а типы III и IV могут реализоваться при любом k.

Если обозначить

$$\omega(f^{(k)}) = \max_i \max_{x',x'' \in [x_i,x_{i+1}]} |f^{(k)}(x'') - f^{(k)}(x')|,$$

то при $k \le 3$ имеют место оценки

$$\|f^{(r)}(x) - S_n^{(r)}(f;x)\|_{C[a,b]} \le b_{kr}\, \omega(f^{(k)})\, \bar{h}_n^{k-r}, \quad r \le k. \qquad (2)$$

Здесь все величины b_{kr} - абсолютные константы, за исключением b_{00} и b_{32}. Последние ограничены, если для любого n выполнено условие $\bar{h}_n \underline{h}_n^{-1} \le K_1 < \infty$.

Из (2) следуют оценки, указанные в отношении порядка по h_n еще в [4]:

$$\|f^{(r)}(x) - S_n^{(r)}(f;x)\|_{C[a,b]} \le b_{kr} |f^{(k)}|_{C^{\lambda}[a,b]}\, \bar{h}_n^{k+\lambda-r}, \quad r \le k. \quad (3)$$

Обозначим $R_n(x) = f(x) - S_n(f;x)$. Для сходимости по норме $C^{\lambda}[a,b]$, очевидно, достаточно, чтобы $|R_n^{(r)}(x)|_{C^{\lambda}[a,b]} \to 0$ при $\bar{h}_n \to 0$. Здесь следует отметить две особенности: во-первых, так как третья производная кубического сплайна разрывна, то имеет смысл рассматривать только случай $r \le \min(k,2)$; во-вторых, хотя при $r = k$ величина $|R_n^{(k)}|_{C^\lambda[a,b]}$ ограничена, но мы ничего не можем утверждать о ее малости при $\bar{h}_n \to 0$. Поэтому далее рассматриваем сходимость по норме $C^\mu[a,b]$, где $0 < \mu < \lambda$.

ТЕОРЕМА I. Если $f(x) \in C^{k+\lambda}[a,b]$, $k = 0,1,2,3$, и $S_n(f;x)$ – кубический сплайн, интерполирующий $f(x)$, то при условии $\bar{h}_n \underline{h}_n^{-1} \le K_1$ имеют место оценки

$$\|f^{(r)}(x) - S_n^{(r)}(f;x)\|_{C^\mu[a,b]} \le c_{kr} |f^{(k)}|_{C^\lambda[a,b]} \bar{h}_n^{k+\lambda-\mu-r}, \tag{4}$$

$$r \le \min(k,2),$$

где c_{kr} зависят только от K_1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем на примере $k=2$ (индекс сетки n для краткости опускаем). Обозначив $M_i = S''(f;x_i)$, $t = (x-x_i)/h_i$, имеем [3]:

$$S(f;x) = f_i(1-t)+f_{i+1}t-\frac{1}{6}h_i^2[\varphi_1(t)M_i+\varphi_2(t)M_{i+1}],\ x\in[x_i,x_{i+1}], \tag{5}$$

где $\varphi_1(t) = t(1-t)(2-t)$, $\varphi_2(t) = t(1-t)(1+t)$. Отсюда

$$S''(f;x) = M_i(1-t) + M_{i+1}t \tag{6}$$

и, следовательно,

$$R''(x) = f''(x)-f''_i(1-t)-f''_{i+1}t + [(f''_i-M_i)(1-t) + (f''_{i+1} - M_{i+1})t],$$

$$x \in [x_i,x_{i+1}].$$

Непосредственными вычислениями находим

$$|R''(x)|_{C^\mu[x_i,x_{i+1}]} \le \sup_{\tilde{x},\bar{x}\in[x_i,x_{i+1}]} \left\{ \frac{|f''(\tilde{x}) - f''(\bar{x})|}{|\tilde{x} - \bar{x}|^\mu} + \right.$$

$$\left. + \frac{|\tilde{x}-\bar{x}|^{1-\mu}}{h_i} \{|f''_{i+1}-f''_i|+|f''_i-M_i|+|f''_{i+1}-M_{i+1}|\} \right\}.$$

Так как, согласно (3), $\max_i |f_i - M_i| \le b_{22} |f''|_{C^\lambda[a,b]} \bar{h}^\lambda$ и, кроме того, $|\tilde{x} - \bar{x}| \le h_i \le \bar{h}$, то

$$|R''(x)|_{C^\mu[x_i, x_{i+1}]} \le c'_{22} \, |f''|_{C^\lambda[a,b]} \, \bar{h}^{\lambda-\mu} \, . \tag{7}$$

Очевидно, при $\bar{x} \in [x_{i-1}, x_i]$, $\tilde{x} \in [x_i, x_{i+1}]$ имеем

$$\sup_{\tilde{x},\bar{x}} \frac{|R''(\tilde{x}) - R''(\bar{x})|}{|\tilde{x} - \bar{x}|^\mu} \le \sup_{\tilde{x}} \frac{|R''(\tilde{x}) - R''(x_i)|}{|\tilde{x} - x_i|^\mu} + \sup_{\bar{x}} \frac{|R''(x_i) - R''(\bar{x})|}{|x_i - \bar{x}|^\mu} \le$$

$$\le 2c'_{22} |f''|_{C^\lambda[a,b]} \bar{h}^{\lambda-\mu} \, . \tag{8}$$

Если же $\bar{x} \in [x_l, x_{l+1}]$, $\tilde{x} \in [x_i, x_{i+1}]$, $|i-l| \ge 2$, то

$$\sup_{\bar{x},\tilde{x}} \frac{|R''(\tilde{x}) - R''(\bar{x})|}{|\tilde{x} - \bar{x}|^\mu} \le \frac{2\|R''(x)\|_{C[a,b]}}{(|i-l-1|\underline{h})^\mu} \le c''_{22} |f''|_{C^\lambda[a,b]} \bar{h}^{\lambda-\mu} . \tag{9}$$

Формулы (7)-(9) исчерпывают все возможные случаи вычисления $|R''(x)|_{C^\mu[a,b]}$. Из них и из (I), (2) вытекает (4) при $r = k = 2$.

Оценка для $R'(x)$ находится следующим образом. Используя формулу Лагранжа и (3), получаем

$$|R'(x)|_{C^\mu[x_i, x_{i+1}]} \le \|R''(x)\|_{C[a,b]} \, \bar{h}^{1-\mu} \le b_{22} |f''|_{C^\lambda[a,b]} \, \bar{h}^{1+\lambda-\mu} .$$

Далее, повторяя рассуждения, проделанные при выводе (8), (9), получаем (4) при $r=1$. Точно так же выводится оценка при $r=0$. Оценки для других значений k получаются аналогичным образом.

В случае, когда $k = 0,1$, вместо краевых условий типа II будем использовать "естественные" краевые условия

$$S''_n(f; x_0) = S''_n(f; x_n) = 0 \, . \tag{10}$$

ТЕОРЕМА 2. Если $f(x) \in C^{k+\lambda}[a,b]$, $k = 0,1$, и $S_n(f; x)$ - кубический сплайн, интерполирующий $f(x)$ с условиями (I0), то при $\bar{h}_n \underline{h}_n^{-1} \le K_1$, $r \le k$, имеют место оценки (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что при сформулированных условиях сохраняют силу оценки (3). Пусть $k=0$. Тогда из системы для определения параметров M_i (см. [3, с.100]) легко получить

$$\max_i |M_i| \le \frac{6}{\underline{h}^2} |f|_{C^\lambda[a,b]} \bar{h}^\lambda .$$

Поэтому из выражения $R(x)$ с учетом (5) вытекает неравенство

$$|R(x)|_{C^\mu[x_i,x_{i+1}]} \le \sup_{\tilde{x},\bar{x}\in[x_i,x_{i+1}]} \left\{ \frac{|f(\tilde{x}) - f(\bar{x})|}{|\tilde{x} - \bar{x}|^\mu} + \right.$$

$$+ \frac{|\tilde{x}-\bar{x}|^{1-\mu}}{h_i} |f_{i+1} - f_i| + \frac{h_i^2 \bar{h}^\lambda}{\underline{h}^2 |\tilde{x}-\bar{x}|^\mu} [|\varphi_1(\tilde{t}) - \varphi_1(\bar{t})| +$$

$$\left. + |\varphi_2(\tilde{t}) - \varphi_2(\bar{t})|] |f|_{C^\lambda[a,b]} \right\} ,$$

где $\tilde{t} = (\tilde{x} - x_i)/h_i$, $\bar{t} = (\bar{x} - x_i)/h_i$. Замечая, что

$$|\varphi_1(\tilde{t}) - \varphi_1(\bar{t})| \le |\tilde{t} - \bar{t}| \max_{0\le t\le 1} |\varphi_1'(t)| = \frac{|\tilde{x}-\bar{x}|}{h_i} \max_{0\le t\le 1} |\varphi_1'(t)|,$$

и учитывая ограниченность величин $|\varphi_1'(t)|$, имеем

$$|R(x)|_{C^\mu[x_i,x_{i+1}]} \le c_{00}' |f|_{C^\lambda[a,b]} \bar{h}^{\lambda-\mu} .$$

Повторяя теперь рассуждения, проделанные при выводе соотношений (8) и (9), получаем требуемый результат.

Точно так же рассматривается случай $k=1$, если исходить из выражения для $R'(x)$.

ТЕОРЕМА 3. Если $S(f;x)$ интерполирует функцию $f(x) \in C^k[a,b]$, $k = 0,1,2$, и удовлетворяет краевым условиям одного из I-IУ типов или (10), то

$$\|S^{(k)}(f;x)\|_{C[a,b]} \le (1 + 2b_{kk}) \, \|f^{(k)}\|_{C[a,b]} . \tag{11}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (11) в случае краевых условий I-IУ нетрудно получить из неравенства

$$|S^{(r)}(f;x)| \le |S^{(r)}(f;x) - f^{(r)}(x)| + |f^{(r)}(x)| .$$

Действительно, отсюда, используя (2), имеем

$$\|S^{(r)}(f;x)\|_{C[a,b]} \le b_{rr}\omega(f^{(r)}) + \| f^{(r)}(x)\|_{C[a,b]} .$$

Учитывая, что $\omega(f^{(r)}) \le 2\| f^{(r)}\|_{C[a,b]}$, получаем (II).

Эти рассуждения верны также в случае краевых условий (I0) для $k = 0,1$, так как при этом оценки (2) сохраняют силу. Если $k = 2$, то (II) легко получить из (6), учитывая вытекающую из системы для параметров M_i оценку $\max\limits_i |M_i| \le 3\| f''\|_{C[a,b]}$.

2. В прямоугольнике Ω введем последовательность сеток $\Delta_{nm} = \Delta_{1n} \times \Delta_{2m}$, где $\Delta_{2m}: c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d$. На шаги $l_j = y_{j+1} - y_j$ сетки Δ_{2m} накладываются ограничения такого же рода, как на шаги h_i сетки Δ_{1n}: $\bar{l}_m = \max\limits_j l_j$, $\underline{l}_m = \min\limits_j l_j$, $\bar{l}_m \underline{l}_m^{-1} \le K_2$.

Множество сплайнов двух переменных $S_{nm}(x,y)$ будем рассматривать как тензорное произведение двух множеств сплайнов одной переменной. Такой подход определяет и постановку задачи интерполирования [3]: в узлах сетки Δ_{nm} выполняются условия интерполяции $S_{nm}(f;x,y) = f(x_i,y_j) = f_{ij}$, а на границах прямоугольника Ω краевые условия. Из рассмотренных в [3] краевых условий нам потребуется лишь два типа.

Во-первых, это несколько видоизмененные условия типа II:

$$\begin{aligned}
&D^{2,0}S_{nm}(f;\, x_i,y_j) = f_{ij}^{(2,0)}, && i=0,n;\ \ j=0,\ldots,m; \\
&D^{0,2}S_{nm}(f;x_i,\, y_j) = f_{ij}^{(0,2)}, && i=0,\ldots,n;\ \ j=0,m; \qquad (12)\\
&D^{2,2}S_{nm}(f;x_i,y_j) = 0 , && i=0,n;\ \ j = 0,m,
\end{aligned}$$

и, во-вторых, краевые условия типа IУ, когда требуется, чтобы производные $D^{3,\alpha}S_{nm}(f;x,y)$ и $D^{\alpha,3}S_{nm}(f;\, x,y)$, $\alpha = 1,2$, были непрерывны соответственно вдоль линий $x=x_1$, $x = x_{n-1}$ и $y = y_1$, $y = y_{m-1}$.

Погрешность интерполяции $R_{nm}(x,y) = f(x,y) - S_{nm}(f;x,y)$ будем оценивать в классах $C^{k+\lambda}[\Omega]$, состоящих из функций $f(x,y)$ таких, что $D^{r,s}f(x,y) \in C^{\lambda}[\Omega]$, $r+s = k$. Для получения оценок применим методику, изложенную в [3].

Введем частичные сплайны $S_n[f(x,y);x]$ и $S_m[f(x,y);\, y]$, которые являются сплайнами по одной переменной(S_n–x, S_m – y) ,а другая переменная (соответственно y и x) играет роль параметра. Обозначим

$$T_{1m}(x,y) = f(x,y) - S_m[f(x,y);\ y],$$

$$T_{2m}(x,y) = f(x,y) - S_n[f(x,y);x] .$$

Тогда $R_{nm}(x,y)$ можно записать в виде

$$R_{nm}(x,y) = T_{2n}(x,y) + S_n[T_{1m}(x,y);x]. \qquad (13)$$

Вытекающие отсюда неравенства

$$\|D^{r,s}R_{n\,m}(x,y)\|_{C^{\mu}[\Omega]} \le \|D^{r,s}T_{2n}(x,y)\|_{C^{\mu}[\Omega]} +$$

$$+\ \|D^{r,s}S_n[T_{1m}(x,y);\ x]\|_{C^{\mu}[\Omega]},\quad r+s \le \min\{k,2\}, \qquad (14)$$

являются исходными для получения оценок.

ТЕОРЕМА 4. Если $S_{nm}(f;\ x,y)$ интерполирует $f(x,y)\in C^{k+\lambda}[\Omega]$, $k = 2,3$, и удовлетворяет краевым условиям (I2), то

$$\|D^{r,s}[f(x,y) - S_{nm}(f;x,y)]\|_{C^{\mu}[\Omega]} \le c_{k-s,r}|D^{k-s,s}f|_{C^{\lambda}[\Omega]}\ \times$$

$$\times\ \bar{h}_n^{k+\lambda-\mu-r-s} + c_{k-r,s}|D^{r,k-r}f|_{C^{\lambda}[\Omega]}\ \bar{l}_m^{k+\lambda-\mu-r-s},\quad r+s\le 2, \qquad (15)$$

где $c_{\alpha\beta}$ зависят только от K_1 и K_2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале оценим $\|D^{r,s}T_2(x,y)\|_{C[\Omega]}$ и $\|D^{r,s}S[T_1(x,y);x]\|_{C[\Omega]}$(индексы сеток n и m здесь и в дальнейшем опускаются). Операции интерполирования частичными сплайнами и дифференцирования по параметру перестановочны. Поэтому

$$D^{r,s}T_2(x,y) = D^{r,0}\{D^{0,s}f(x,y) - S[D^{0,s}f(x,y);\ x]\ \}. \qquad (16)$$

Очевидно, $D^{0,s}f(x,y)\in C^{k+\lambda-s}[a,b]$ и $|f|_{C^{\lambda}[a,b]} \le |f|_{C^{\lambda}[\Omega]}$.

Применяя в (I6) оценку (3), получаем

$$\|D^{r,s}T_2(x,y)\|_{C[\Omega]} \le b_{k-s,r}|D^{k-s,s}f|_{C^{\lambda}[\Omega]}\ \bar{h}^{k+\lambda-r-s}. \qquad (17)$$

Далее, последовательно используя теорему 3 и оценки (3), находим

$$\|D^{r,s}S[T_1(x,y);x]\|_{C[\Omega]}=\|D^{r,0}S[D^{0,s}T_1(x,y);\ x]\|_{C[\Omega]}\le$$

$$\le(1+2b_{rr})\|D^{r,s}T_1(x,y)\|_{C[\Omega]}\le$$

$$\le(1+2b_{rr})b_{k-r,s}\,|D^{r,k-r}f|_{C^\lambda[\Omega]}\,\bar h^{k+\lambda-r-s}. \quad (18)$$

Теперь получим оценки для величин $|\,D^{r,s}T_2(x,y)\,|_{C^\mu[\Omega]}$ и $|D^{r,s}S[T_1(x,y);\ x]|_{C^\mu[\Omega]}$.

Пусть точки $P(\tilde x,\tilde y)$, $Q(\bar x,\bar y)$ таковы, что $\tilde x\ne\bar x$, $\tilde y\ne\bar y$. Тогда

$$\frac{|D^{r,s}[T_2(P)-T_2(Q)]|}{|P-Q|^\mu}\le A+B, \quad (19)$$

где

$$A=\frac{|D^{r,s}[T_2(\tilde x,\tilde y)-T_2(\bar x,\tilde y)]|}{|\tilde x-\bar x|^\mu},\quad B=\frac{|D^{r,s}[T_2(\bar x,\tilde y)-T_2(\bar x,\bar y)]|}{|\tilde y-\bar y|^\mu}.$$

Используя теорему 2, получаем

$$A\le c_{k-s,r}|D^{k-s,s}f|_{C^\lambda[\Omega]}\,\bar h^{k+\lambda-\mu-r-s}\ . \quad (20)$$

Обозначая $\phi(x)=D^{0,s}[f(x,\tilde y)-f(x,\bar y)]$ и учитывая оценки (2), имеем

$$B=\frac{|D^{r,0}[\phi(x)-S(\phi;x)]|}{|\tilde y-\bar y|^\mu}\le b_{k-s,r}\,\bar h^{k-r-s}\,\frac{\omega(\phi^{(k-s)})}{|\tilde y-\bar y|^\mu}.$$

Пусть $\omega(\phi^{(k-s)})=|\phi^{(k-s)}(x'')-\phi^{(k-s)}(x')|$, где $x',x''\in[x_i,x_{i+1}]$. Тогда $\omega(\phi^{(k-s)})=|D^{k-s,s}[f(x'',\tilde y)-f(x'',\bar y)-f(x',\tilde y)+f(x',\bar y)]|$, и нетрудно видеть, что для двух возможных случаев: $|\tilde y-\bar y|\ge|x''-x'|$ и $|\tilde y-\bar y|<|x''-x'|$ верна одна и та же оценка

$$B\le 2b_{k-s,r}|D^{k-s,s}f|_{C^\lambda[\Omega]}\,\bar h^{k+\lambda-\mu-r-s}\ . \quad (21)$$

Мы предполагали, что $\tilde x\ne\bar x$ и $\tilde y\ne\bar y$. Если $\tilde x=\bar x$ или $\tilde y=\bar y$, то выкладки только упрощаются, но результат не изменяется.

Объединяя (17), (19)-(21), получаем

$$\|D^{r,s}T_2(x,y)\|_{C^\mu[\Omega]}\le c'_{k-s,r}|D^{k-s,s}f|_{C^\lambda[\Omega]}\,\bar h^{k+\lambda-\mu-r-s}\ . \quad (22)$$

Аналогично выводится оценка

$$\|D^{r,s}T_1(x,y)\|_{C^{\mu}[\Omega]} \le c'_{k-r,s}|D^{r,s}f|_{C^{\lambda}[\Omega]}\ \bar{1}^{k+\lambda-\mu-r-s}\ . \tag{23}$$

Далее, в выражении $D^{r,s}S[T_1(x,y);x]$ аргумент x у $T_1(x,y)$ по условиям интерполяции входит с фиксированными значениями на сетке Δ_1. Поэтому, повторяя рассуждения, аналогичные проделанным выше, имеем

$$\frac{|D^{r,s}\{S[T_1(x,\tilde{y});\ \tilde{x}] - S[T_1(x,\bar{y});\ \bar{x}]\}|}{|P-Q|^{\mu}} \le A + B, \tag{24}$$

где $$A = \frac{|D^{r,s}\{S[T_1(x,\tilde{y});\ \tilde{x}] - S[T_1(x,\tilde{y});\ \bar{x}]\}|}{|\tilde{x}-\bar{x}\ |^{\mu}},$$

$$B = \left|D^{r,s}S\left[\frac{T_1(x,\tilde{y}) - T_1(x,\bar{y})}{|\tilde{y}-\bar{y}|^{\mu}};\ \bar{x}\right]\right|.$$

Величина A оценивается путем использования неравенств (4) и (23). Так как $D^{0,s}T_1(x,y) \in C^{r+\mu}[a,b]$, то получаем

$$A \le c_{r,r}\|D^{r,s}T_1(x,y)\|_{C^{\mu}[\Omega]} \le$$
$$\le c_{r,r}c'_{k-r,s}|D^{r,k-r}f|_{C^{\lambda}[\Omega]}\ \bar{1}^{k+\lambda-\mu-r-s}\ . \tag{25}$$

Для оценки величины B применяем теорему 3 и (23). Находим

$$B \le (1+2b_{rr})|D^{r,s}T_1(x,y)|_{C^{\mu}[\Omega]} \le$$
$$\le (1+2b_{rr})c'_{k-r,s}|D^{r,k-r}f|_{C^{\lambda}[\Omega]}\ \bar{1}^{k+\lambda-\mu-r-s}\ . \tag{26}$$

Из (24)-(26) и (I8) получаем оценку

$$\|D^{r,s}S[T_1(x,y);\ x]\|_{C^{\mu}[\Omega]} \le c_{r-s,r}|D^{r,k-r}f|_{C^{\lambda}[\Omega]}\ \bar{1}^{k+\lambda-\mu-r-s}\ . \tag{27}$$

Теперь утверждение теоремы вытекает из (I4) и (22), (27).

В дальнейшем нам потребуется следующий результат о погрешности приближения сплайном $S_{nm}(f;\ x,y)$ с граничными условиями типа IУ.

Если $f(x,y) \in C^{\lambda}[\Omega]$, то

$$\|f(x,y) - S_{nm}(f;x,y)\|_{C[\Omega]} \le a|f|_{C^{\lambda}[\Omega]}(\bar{h}_n^{\lambda}+\bar{l}_n^{\lambda}), \qquad (28)$$

где постоянная a зависит только от K_1, K_2.

Действительно, повторяя рассуждения, проделанные при доказательстве теоремы 4, нетрудно убедиться в справедливости оценок (I7), (I8) для $k = r = s = 0$. После этого (28) вытекает из (I3).

§2. Сходимость метода сплайн-коллокации

Изучение вопроса проведем на примере задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике Ω:

$$Lu \equiv \Delta u = f(x,y), \qquad u\big|_{\Gamma} = 0, \qquad (29)$$

при этом $f(x,y) \in C^{k-2+\lambda}[\Omega]$, $k \ge 2$, и выполнены условия согласования [5]

$$f(x,y) = 0 \text{ в вершинах области } \Omega. \qquad (30)$$

В Ω вводится последовательность сеток Δ_{nm}. На ней рассматриваем подпространство бикубических сплайнов $S(\Delta_{nm})$. Его размерность $\dim S(\Delta_{nm}) = (n+3)(m+3)$.

Приближенное решение задачи (29) будем искать в виде сплайна $S_{nm}(x,y) \in S(\Delta_{nm})$, удовлетворяющего граничному условию

$$S_{nm}(x,y)\big|_{\Gamma} = 0$$

и, кроме того, условиям $D^{2,2}S_{nm}(x_i,y_j) = 0$, $i=0,n$; $j=0,m$.

Множество таких сплайнов обозначим через $S_0(\Delta_{nm})$. Рассмотрим его структуру. Для этого представим элементы множества через фундаментальные сплайны [3]. Это, во-первых, функции $F_k(x)$, определяемые равенствами:

$$F_k(x_i) = \delta_{ki}, \quad F_k''(x_0) = F_k''(x_n) = 0, \quad k = 1,\dots,n-1; \quad i = 0,\dots,n;$$

$$F_k(x_i) = 0, \quad F_k''(x_{i'}) = \delta_{ki'}, \quad k = 0,n; \quad i' = 0,n; \quad i = 0,\dots,n$$

($\delta_{\alpha\beta}$ - символ Кронекера), а также функции $\tilde{F}_l(y)$ с условиями:

$$\tilde{F}_l(y_j) = \delta_{lj}, \quad \tilde{F}_l''(y_0) = \tilde{F}_l''(y_m) = 0, \quad l = 1,\dots,m-1; \quad j = 0,\dots,m;$$

$$\tilde{F}_l(y_j) = 0, \quad \tilde{F}_l''(y_{j'}) = \delta_{lj'}, \quad l = 0,m; \quad j' = 0,m; \quad j = 0,\dots,m.$$

Функции $F_k(x)$ (или $\tilde{F}_l(y)$) линейно-независимы. Тогда любой сплайн множества $S_0(\Delta_{nm})$ представляется формулой

$$S_{nm}(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{m} g_{kl} \, F_k(x)\tilde{F}_l(y), \tag{31}$$

показывающей, что множество $S_0(\Delta_{nm})$ есть тензорное произведение двух множеств размерности $n+1$ и $m+1$ соответственно. Здесь

$$g_{kl} = S_{nm}(x_k,y_l), \qquad k = 1,\dots,n-1; \qquad l = 1,\dots,m-1;$$

$$g_{kl} = D^{2,0}S_{nm}(x_k,y_l), \; k = 0,n; \quad l = 1,\dots,m-1;$$

$$g_{kl} = D^{0,2}S_{nm}(x_k,y_l), \; k = 1,\dots,n-1; \quad l = 0,m;$$

$$g_{kl} = 0, \qquad k = 0,n; \qquad l = 0,m.$$

Последние равенства говорят об уменьшении размерности множества $S_0(\Delta_{nm})$ на 4 по сравнению с числом членов суммы (3I).

Функции вида $LS_{nm}(x,y)$ образуют множество $LS_0(\Delta_{nm})$ бикубических сплайнов таких, что сами они непрерывны, но их производные разрывны на линиях, образующих сетку Δ_{nm}.

Имеет место

ЛЕММА. Справедливо равенство

$$\dim LS_0(\Delta_{nm}) = (n+1)(m+1) - 4. \tag{32}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3I) следует, что

$$D^{2,0}S_{nm}(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{m} g_{kl} \, F_k''(x) \, \tilde{F}_l(y). \tag{33}$$

Множество таких функций можно рассматривать как тензорное произ - ведение множества кубических сплайнов на сетке Δ_{2m} с базисом $\{\tilde{F}_l(y),\ l = 0,\dots,m\}$ и множества сплайнов первой степени на сетке Δ_{1n}.

Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что функции $F_k''(x)$, $k = 0,\dots, n$, являющиеся сплайнами первой степени, линейно-независимы и, так как их число совпадает с размерностью пространства сплайнов первой степени, то они образуют в нем базис.Предположим противное, т.е. что эти функции линейно-зависимы и существуют константы c_k , $k = 0,\dots,n$, не все равные нулю такие, что

$\sum\limits_{k=0}^{n} c_k F_k''(x) = 0$ для всех $x \in [a,b]$. Проинтегрируем это равенство по x дважды:

$$A(x) \equiv \sum_{k=0}^{n} c_k F_k(x) = Cx+D.$$

В нем, по определению функций $F_k(x)$, левая часть равна нулю в точках $x=x_0$ и $x = x_n$. Но тогда и правая часть принимает в них нулевые значения, и, значит, постоянные $C = D=0$. Так как $F_k(x)$, $k = 0,\dots,n$, линейно-независимы, то равенство $A(x) \equiv 0$ возможно лишь, если все $c_k = 0$, $k = 0,\dots, n$. Полученное противоречие доказывает требуемое свойство.

Следовательно, множество функций вида (33) имеет размерность $(n+1)(m+1)$. Такой же будет и размерность множества функций вида $D^{0,2}S_{nm}(x,y)$. Тогда из представления

$$LS_{nm}(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{m} g_{kl}[F_k''(x)\tilde{F}_l(y) + F_k(x)\tilde{F}_l''(y)]$$

и равенств $g_{kl} = 0$, $k = \overline{0,n}$, $l = \overline{0,m}$, вытекает утверждение леммы.

Метод коллокации - это один из проекционных методов. В соответствии с общей теорией этих методов [6] приближенное решение должно точно удовлетворять условиям задачи (29) на некотором конечномерном подпространстве - проекции пространства $C^\lambda[\Omega]$.

Будем рассматривать задачу

$$P_{nm}LS_{nm}(x,y) = P_{nm}f(x,y), \quad S_{nm}(x,y) \in S_0(\Delta_{nm}), \tag{34}$$

где P_{nm} - проектор, который каждой функции из $C^\lambda[\Omega]$ ставит в соответствие интерполянт, определяемый единственным образом. Естественным интерполянтом в данном случае является бикубический сплайн, т.е. $P_{nm}: f(x,y) \to S(f;\, x,y)$.

Предположим, что $S(f;\, x,y) \in S(\Delta_{nm})$ есть сплайн с условиями типа IУ (§I). Это позволяет нам интерполировать недифференцируемые функции $f(x,y) \in C^\lambda[\Omega]$. Размерность множества таких сплайнов равна $(n+1)(m+1)$.

Обозначим через $C_0^\lambda[\Omega]$ множество функций из $C^\lambda[\Omega]$, удовлетворяющих условиям (30): $f(x_i,y_j) = 0$, $i = \overline{0,n}$; $j = \overline{0,m}$. Тогда

$$\dim P_{nm}C_0^\lambda[\Omega] = (n+1)(m+1)-4. \tag{35}$$

Справедлива основная

ТЕОРЕМА 5. Если $f(x,y) \in C^{k-2+\lambda}[\Omega]$, $k = 2,3$, то при достаточно больших $n \ge n_0$, $m \ge m_0$, $(\bar{h}_m \le h_0, \bar{l}_m \le l_0)$ существует единственное решение задачи (34). Скорость сходимости его к точному решению характеризуется неравенством

$$\|u(x,y) - S_{nm}(x,y)\|_{C^{\mu}[\Omega]} \le b(\bar{h}_n^{k-2+\lambda-\mu} + \bar{l}_m^{k-2+\lambda-\mu}), \qquad (36)$$

где $0 < \mu < \lambda$ и b - константа, зависящая от K_1 и K_2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем разрешимость задачи (34). Пусть E – единичный оператор. Тогда, согласно неравенствам (28), при $f(x,y) \in C_0^{\lambda}[\Omega] \subset C_0^{\mu}[\Omega]$, $0 < \mu < \lambda$,

$$\|(E - P_{nm})f\|_{C[\Omega]} \le a|f|_{C^{\mu}[\Omega]}(\bar{h}_n^{\mu} + \bar{l}_m^{\mu}),$$

где $a = a(K_1, K_2)$. Отсюда ясно, что при достаточно малых $\bar{h}_n \le h_0$ и $\bar{l}_m \le l_0$ можно добиться, чтобы

$$a(\bar{h}_n^{\mu} + \bar{l}_m^{\mu}) \le \varepsilon < 1. \qquad (37)$$

Тогда если $\|\cdot\|_1$ – норма в пространстве операторов $B(C^{\mu}[\Omega] \to C[\Omega])$, то $\|E - P_{nm}\|_1 \le \varepsilon < 1$, откуда

$$1 - \varepsilon \le \|P_{nm}\|_1 \le 1 + \varepsilon. \qquad (38)$$

Обозначим $\tilde{P}_{nm}$ сужение проектора P_{nm} на подпространство $LS_0(\Delta_{nm})$. Из (34) следует

$$\tilde{P}_{nm} z = P_{nm} f, \quad z = LS_{nm}(x,y) \in LS_0(\Delta_{nm}). \qquad (39)$$

Как и P_{nm}, оператор $\tilde{P}_{nm}$ ограничен и отображает $LS_0(\Delta_{nm})$ в $P_{nm}C_0^{\lambda}[\Omega]$. Пространства $LS_0(\Delta_{nm})$ и $P_{nm}C_0^{\lambda}[\Omega]$ согласно (32), (35) конечномерные с одинаковой размерностью. Следовательно, это изоморфные банаховы пространства, и тем самым выполнены условия теоремы Банаха [7, с.211]. Поэтому существует непрерывный обратный оператор $\tilde{P}_{nm}^{-1}: P_{nm}C_0^{\lambda}[\Omega] \to LS_0(\Delta_{nm})$ и верна оценка

$$\|\tilde{P}_{nm}^{-1}\|_2 \le \frac{1}{1-\varepsilon}, \qquad (40)$$

где $\|\cdot\|_2$ – норма в пространстве операторов $B(C[\Omega] \to C^{\mu}[\Omega])$.

Из (39) имеем $z = \tilde{P}_{nm}^{-1} P_{nm} f$. Отсюда, в силу того что существует линейный непрерывный оператор L^{-1}, сплайн $S_{nm}(x,y) = L^{-1} z$ есть единственный элемент, удовлетворяющий уравнению (34). Таким образом, однозначная разрешимость приближенной задачи (34) доказана. Покажем теперь справедливость оценки (36). Из неравенств (38) и (40) следует, что нормы $\|\tilde{P}_{nm}^{-1} P_{nm}\|$ ограничены в совокупности, т.е.

$$\|\tilde{P}_{nm}^{-1} P_{nm}\| \le \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}, \quad n \ge n_0, \quad m \ge m_0 .$$

Для любого элемента $g \in LS_0(\Delta_{nm})$ имеем $\tilde{P}_{nm}^{-1} P_{nm} g = g$, поэтому

$$z - f = \tilde{P}_{nm}^{-1} P_{nm} f - f = \tilde{P}_{nm}^{-1} P_{nm}(f-g) - (f-g),$$

$$\|LS_{nm}(x,y) - f(x,y)\|_{C^{\mu}[\Omega]} \le \frac{2}{1-\varepsilon} \| f - g \|_{C^{\mu}[\Omega]}.$$

Отсюда, ввиду произвольности элемента g, получаем

$$\|LS_{nm}(x,y) - f\|_{C^{\mu}[\Omega]} \le \frac{2}{1-\varepsilon} \inf_{S \in S_0(\Delta_{nm})} \|Lu - LS\|_{C^{\mu}[\Omega]}. \tag{41}$$

Учитывая ограниченность оператора L^{-1} на функциях из $C^{\lambda}[\Omega]$ и то, что $LS_{nm}(x,y) \in C^{\lambda}[\Omega]$, находим

$$\|u(x,y) - S_{nm}(x,y)\|_{C^{\mu}[\Omega]}$$

$$= \|L^{-1}(LS_{nm} - Lu)\|_{C^{\mu}[\Omega]} \le \|L^{-1}\| \, \|Lu - LS_{nm}\|_{C^{\mu}[\Omega]}.$$

Это неравенство вместе с (4I) дает

$$\|u(x,y) - S_{nm}(x,y)\|_{C^{\mu}[\Omega]} \le \frac{2\|L^{-1}\|}{1-\varepsilon} \inf_{S \in S_0(\Delta_{nm})} \|Lu - LS\|_{C^{\mu}[\Omega]} .$$

Выберем в качестве S интерполяционный сплайн, тогда

$$\|u - S_{nm}\|_{C^{\mu}[\Omega]} \le \frac{2\|L^{-1}\|}{1-\varepsilon} \left[\|D^{2,0}(u-S)\|_{C^{\mu}[\Omega]} + \|D^{0,2}(u-S)\|_{C^{\mu}[\Omega]} \right].$$

Используя оценки (I5) при $k = 2,3$, получаем

$$\|u(x,y) - s_{nm}(x,y)\|_{C^{\mu}[\Omega]} \le c_1 \bar{h}_n^{k-2+\lambda-\mu} + c_2 \bar{l}_m^{k-2+\lambda-\mu} .$$

Эта оценка и доказывает теорему.

Литература

1. ГОРБЕНКО Н.И., ИЛЬИН В.П. Сплайновое решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в двумерных областях. -В кн.: Вариационно - разностные методы в математической физике, 1978,с.71-80.

2. ИМАМОВ А., РОМЕНСКИЙ В.П. Метод сплайн-коллокации для уравнения Пуассона в прямоугольной области. -В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 75). Новосибирск, 1978,с.56-67.

3. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. -М.: Наука, 1980. - 350 с.

4. АЛБЕРГ Дж., НИЛЬСОН Э., УОЛШ Дж. Теория сплайнов и ее приложения. -М.: Мир, 1972. - 316 с.

5. ВОЛКОВ Е.А. О дифференциальных свойствах решений краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона на прямоугольнике.-Тр.Мат. ин-та АН СССР, 1965, т.XXVII, с. 89-112.

6. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ М.А. и др. Приближенное решение оператор - ных уравнений. -М.: Наука, 1969. - 456 с.

7. КАНТОРОВИЧ Л.В., АКИЛОВ Г.П. Функциональный анализ. -М.: Наука, 1977. - 744 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
6 июля 1981 года