М Е Т О Д Ы   С П Л А Й Н - Ф У Н К Ц И Й
(Вычислительные системы)
1981 год   Выпуск 87

УДК 519.633

МЕТОД СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕПРЕРЫВНЫМИ И РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Т.Жанлав, В.Л.Мирошниченко

Значительная часть работ [1,2] по методу сплайн-коллокации посвящена его применению к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Для уравнений в частных производных этот метод изучен сравнительно слабо. В работах [3-5] предлагаются различные варианты метода сплайн-коллокации для решения параболического уравнения с одной пространственной переменной и краевыми условиями первого рода (задача Дирихле). Обычно для таких уравнений сплайн-коллокация используется как способ дискретизации по пространственной переменной; по времени, как правило, применяется разностная аппроксимация. В указанных работах изучаются только уравнения с гладкими решениями (непрерывными коэффициентами). Вычислительные аспекты реализации алгоритмов и связанные с ними вопросы устойчивости не рассматриваются.

Ильин И.А. [6] использует сплайн-коллокацию в качестве аппарата для построения разностных схем, называемых сплайн-разностными. Аналогичная методика предлагается Саульевым В.К. [8]. Однако такой подход осложняет численную реализацию в случае, когда уравнение содержит конвективный член (слагаемое с первой производной по пространственной переменной). В [7] исследуется случай уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами.

В настоящей работе метод сплайн-коллокации применяется для численного решения линейных (квазилинейных) параболических уравнений второго порядка с краевыми условиями общего вида. Рассматриваются уравнения с непрерывными и разрывными коэффициентами. Метод сплайн-коллокации строится на основе кубических сплайнов класса C^2, для представления которых используются B-сплайны - базисные функции с конечными носителями. Это обеспечивает эффективную численную реализацию построенных схем.

Сформулируем краевые задачи, которые изучаются в дальнейшем. В случае уравнения с непрерывными коэффициентами в прямоугольнике $D = \{a \le x \le b;\ 0 \le t \le T\}$ рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u^0(x), \tag{2}$$

$$l_1(u) = \varphi(t), \quad l_2(u) = \psi(t), \tag{3}$$

где

$$Lu = k(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r(x)\frac{\partial u}{\partial x} - q(x)u,$$

$$l_1 u = \gamma_1 u(a,t) + \beta_1 \frac{\partial u(a,t)}{\partial x},$$

$$l_2 u = \gamma_2 u(b,t) + \beta_2 \frac{\partial u(b,t)}{\partial x},$$

$$k(x) > 0, \ q(x) \ge 0 \text{ при } x \in [a,b],$$

$$\gamma_1, \gamma_2, \beta_2 \ge 0, \quad \beta_1 \le 0, \quad \gamma_i^2 + \beta_i^2 \ne 0, \quad i = 1,2.$$

Функции $k(x)$, $r(x)$, $q(x)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ считаются непрерывными. Предполагается, что задача (I)-(3) имеет единственное решение $u(x,t)$, имеющее как минимум две непрерывные производные по x. Дополнительные требования к гладкости решения будем оговаривать отдельно.

Краевую задачу для уравнения с разрывными коэффициентами мы будем записывать в виде (I)-(3), но при этом считаем, что оператор L определен формулой

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)u. \tag{4}$$

Здесь функции $k(x) > 0$, $q(x) \ge 0$, $f(x,t)$ предполагаются непрерывными всюду на $[a,b]$, за исключением точки $\xi \in (a,b)$, где они могут иметь разрывы первого рода (все построения и результаты без изменений распространяются на случай любого конечного числа точек разрыва).

В точке ξ задаются условия сопряжения

$$[u]_\xi = 0, \quad \left[k \frac{\partial u}{\partial x} \right]_\xi = 0, \tag{5}$$

где $[u]_\xi = u(\xi + 0) - u(\xi - 0)$.

Мы предположили, что функции k, r, q не зависят от t, а γ_i, β_i - константы. Это ограничение несущественно и сделано только с целью упрощения выкладок. Ниже будут отмечены те изменения, которые нужно внести в расчетные формулы, если указанные величины зависят от переменной t. Более того, используя обычный прием линеаризации, легко приспособить построенные алгоритмы для решения квазилинейных уравнений, т.е. когда функции k,r,q,f зависят от искомого решения u.

§I. Построение численного алгоритма для уравнения с непрерывными коэффициентами

В прямоугольнике D введем сетку $\Delta = \Delta_x \cdot \Delta_t$, где Δ_x: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$; Δ_t: $t_n = \tau n$, $n = 0,1,\ldots$.

Приближенное решение задачи (I)-(3) ищем в виде функции $S(x, t)$, которая при каждом t является кубическим сплайном класса C^2 по переменной x с узлами на сетке Δ_x.

Обозначим $h_i = x_{i+1} - x_i$. Дополним сетку Δ_x узлами

$$x_{-i} = x_0 - ih_0, \quad x_{N+i} = x_N + ih_{N-1}, \quad i=1,2,3. \tag{6}$$

В принципе эти узлы могут быть произвольными, лишь бы выполнялись условия $x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < x_0$; $x_N < x_{N+1} < x_{N+2} < x_{N+3}$. Наш выбор продиктован стремлением к упрощению выкладок.

Сплайн $S(x,t)$ может быть представлен в виде

$$S(x,t) = \sum_{j=-1}^{N+1} \alpha_j(t) B_j(x). \tag{7}$$

Здесь $B_j(x)$ - кубические нормализованные B-сплайны [I], для которых справедливо тождество $\sum_{j=-1}^{N+1} B_j(x) \equiv 1$. Пусть $S(x,t)$ при $t=0$ интерполирует функцию $u^0(x)$ на сетке Δ_x, т.е.

$$S(x_i, 0) = u^0(x_i), \quad i=0,\ldots,N. \tag{8}$$

Потребуем, чтобы при всех $t>0$ сплайн $S(x,t)$ удовлетворял граничным условиям (3)

$$l_1 S = \varphi(t), \quad l_2 S = \psi(t) \tag{9}$$

и уравнению (I) в узлах сетки Δ_x (условия коллокации)

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t} - LS - f(x,t) \right)_{x=x_i} = 0, \ i=0,\dots,N. \tag{10}$$

Подставляя (7) в (8)-(I0), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов $\alpha_j(t)$, $j = -1, \dots, N+1$. Для численного решения системы заменим в ней производную по t разделенной разностью и рассмотрим схему с весом

$$\frac{S_i^n - S_i^{n-1}}{\tau} = \sigma(LS)_i^n + (1-\sigma)(LS)_i^{n-1} + \tilde{f}_i^n, \tag{II}$$

$$i = 0,\dots,N,$$

$$(l_1 S)^n = \varphi^n, \qquad (l_2 S)^n = \psi^n, \tag{12}$$

$$S_i^0 = u_i^0, \qquad i = 0,\dots,N, \tag{13}$$

где $\sigma \in (0,1]$ - параметр схемы, $\tilde{f}_i^n = \sigma f_i^n + (1-\sigma) f_i^{n-1}$ или $\tilde{f}_i^n = f(x_i, (n-1/2)\tau)$. Верхние индексы $n, n-1$ означают, что функции (операторы от функций) вычисляются соответственно при $t = t_n$, $t = t_{n-1}$. Нижний индекс i означает вычисление в узле x_i.

Уравнения (II)-(I2) на n-м временном слое представляют собой систему $N+3$ уравнений относительно $N+3$ неизвестных α_{-1}^n, $\alpha_0^n, \dots, \alpha_{N+1}^n$. Учитывая свойства B-сплайнов, можно записать её в виде

$$d_1 \alpha_{-1}^n + (\gamma_1 - d_1 - d_2)\alpha_0^n + d_2 \alpha_1^n = \varphi^n, \tag{14}$$

$$a_i(\sigma)\alpha_{i-1}^n + c_i(\sigma)\alpha_i^n + b_i(\sigma)\alpha_{i+1}^n = F_i^n, \ i=0,\dots,N, \tag{15}$$

$$d_4 \alpha_{N-1}^n + (\gamma_2 - d_3 - d_4)\alpha_N^n + d_3 \alpha_{N+1}^n = \psi^n, \tag{16}$$

где

$$d_1 = \gamma_1 B_{-1}(x_0) + \beta_1 B'_{-1}(x_0), \quad d_2 = \gamma_1 B_1(x_0) + \beta_1 B'_1(x_0),$$

$$d_3 = \gamma_2 B_{N+1}(x_N) + \beta_2 B'_{N+1}(x_N), \quad d_4 = \gamma_2 B_{N-1}(x_N) + \beta_2 B'_{N-1}(x_N),$$

$$a_i(z) = B_{i-1}(x_i)\left[1 + \tau z q_i - \frac{6\tau z}{h_i^2}\left(k_i - \frac{h_i r_i}{2}\right)\right],$$

$$b_i(z) = B_{i+1}(x_i)\left[1 + \tau z q_i - \frac{6\tau z}{h_i^2}\left(k_i + \frac{h_{i-1} r_i}{2}\right)\right],$$

$$c_i(z) = 1 + \tau z q_i - a_i(z) - b_i(z),$$

$$F_i^n = a_i(\sigma-1)\alpha_{i-1}^{n-1} + c_i(\sigma-1)\alpha_i^{n-1} + b_i(\sigma-1)\alpha_{i+1}^{n-1} + \tau\tilde{f}_i^n.$$

Для полноты приведем формулы, взятые из [I, с.I40]:

$$B_{i-1}(x_i) = \frac{h_i^2}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_{i-2})}, \quad B'_{i-1}(x_i) = \frac{3B_{i-1}(x_i)}{h_i},$$

$$B_{i+1}(x_i) = \frac{h_{i-1}^2}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+2}-x_{i-1})}, \quad B'_{i+1}(x_i) = \frac{3B'_{i+1}(x_i)}{h_{i-1}}.$$

Из системы (I4)-(I6) легко получить трехдиагональную систему для неизвестных $\alpha_0^n,\dots,\alpha_N^n$, исключив неизвестные α_{-1}^n, α_{N+1}^n из уравнений (I5) с помощью (I4) и (I6). На практике эту процедуру проще всего выполнить численно. Мы приведем аналитический вид получающейся системы только потому, что она потребуется для исследования вопросов, связанных с разрешимостью системы (I4)-(I6) и сходимостью схемы

$$\left.\begin{aligned}
&\varkappa_0(\sigma)\alpha_0^n + \varkappa_1(\sigma)\alpha_1^n = \tilde{F}_0^n,\\
&a_i(\sigma)\alpha_{i-1}^n + c_i(\sigma)\alpha_i^n + b_i(\sigma)\alpha_{i+1}^n = F_i^n, \quad i=1,\dots,N-1,\\
&\varkappa_{N-1}(\sigma)\alpha_{N-1}^n + \varkappa_N(\sigma)\alpha_N^n = \tilde{F}_N^n.
\end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Здесь

$$\varkappa_0(z) = d_1 c_0(z) - (\gamma_1 - d_1 - d_2)a_0(z), \quad \varkappa_1(z) = d_1 b_0(z) - d_2 a_0(z),$$

$$\varkappa_N(z) = d_3 c_N(z) - (\gamma_2 - d_3 - d_4)b_N(z), \quad \varkappa_{N-1}(z) = d_3 a_N(z) - d_4 b_N(z),$$

$$\tilde{F}_0^n = \varkappa_0(\sigma-1)\alpha_0^{n-1} + \varkappa_1(\sigma-1)\alpha_1^{n-1} + a_0(\sigma-1)\varphi^{n-1} - a_0(\sigma)\varphi^n + \tau d_1\tilde{f}_0^n,$$

$$\tilde{F}_N^n = \varkappa_{N-1}(\sigma-1)\alpha_{N-1}^{n-1} + \varkappa_N(\sigma-1)\alpha_N^{n-1} + b_N(\sigma-1)\phi^{n-1} - b_N(\sigma)\phi^n + \tau d_3\tilde{f}_N^n .$$

В целом численный алгоритм решения задачи (I)-(3) методом сплайн-коллокации состоит в следующем. Вначале находим коэффициенты α_j^0, $j = -1,\dots,N+1$. Согласно (I3) для этого нужно построить кубический сплайн, интерполирующий на сетке Δ_x функцию $u^0(x)$ (см.[I]). Затем последовательно, от слоя к слою из системы (I7) вычисляются α_j^n, $j = 0,\dots,N$; $n = 1,2,\dots$. Величины α_{-1}^n, α_{N+1}^n находятся из уравнений (I4), (I6). В итоге на каждом временном слое $t_n = \tau n$ приближенное решение представляется в виде сплайна $S^n(x) = S(x,t_n) = \sum_{j=-1}^{N+1} \alpha_j^n B_j(x)$. Это позволяет вычислять приближенное решение, а также его производные по x в любых точках промежутка $[a,b]$.

Заметим, что коэффициенты α_j^0 не обязательно находить, интерполируя функцию $u^0(x)$. Иногда удобнее использовать формулы локальной аппроксимации [9]. С учетом условий (6) имеем

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_{-1}^0 = u_0^0 - h_0(u^0)_0' + \frac{h_0^2}{3}(u^0)_0'', \quad \alpha_0^0 = u_0^0 - \frac{h_0^2}{6}(u^0)_0'', \\ &\alpha_j^0 = u_j^0 + \frac{1}{3(h_{j-1}+h_j)}\left[h_j^2\frac{u_j^0 - u_{j-1}^0}{h_{j-1}} - h_{j-1}^2\frac{u_{j+1}^0 - u_j^0}{h_j}\right], \\ &\qquad\qquad j = 1,\dots,N-1, \\ &\alpha_N^0 = u_N^0 - \frac{h_{N-1}^2}{6}(u^0)_N'', \quad \alpha_{N+1}^0 = u_N^0 + h_{N-1}(u^0)_N' + \frac{h_{N-1}^2}{3}(u^0)_N'' . \end{aligned}\right\} \quad (I8)$$

В схеме (II)-(I3) значение $\sigma=0$ не рассматривается. Этот случай требует несколько иной техники построения схемы. Мы не будем изучать его по следующим причинам. Во-первых, в отличие от разностных схем, где при $\sigma=0$ получается явная схема, сплайновые схемы при всех σ неявные. Во-вторых, как выясниться в дальнейшем, наиболее полезными получаются схемы при $\sigma \geq 1/2$.

Построенная схема по существу не требует изменений, если коэффициенты в уравнении (I) и краевых условиях (3) зависят от пере -

менной t. Достаточно считать, что в левой части уравнений (I4)-(I6) эти коэффициенты вычисляются при $t=t_n$, а в правой при $t=t_{n-1}$.

Нетрудно приспособить схему для решения квазилинейных уравнений. Пусть, например, в уравнении (I) коэффициент k зависит от искомого решения $k=k(u)$. В этом случае при формальном построении уравнений (I5) возникнут величины $k_i^n = k(u_i^n)$. Их можно приближенно заменить на $k(\tilde{u}_i^n)$, где $\tilde{u}_i^n = 2u_i^{n-1} - u_i^{n-2}$. Если $\sigma \neq 1/2$, то можно ограничиться более простой аппроксимацией $\tilde{u}_i^n = u_i^{n-1}$.

Основным моментом при реализации построенной схемы является решение системы (I4)-(I6). Выясним условия ее разрешимости. Очевидно, достаточно исследовать этот вопрос для системы (I7).

Обозначим

$$R_i(\sigma) = |c_i(\sigma)| - |a_i(\sigma)| - |b_i(\sigma)|, \quad i = 1,\dots,N-1,$$

$$R_0(\sigma) = |\varkappa_0(\sigma)| - |\varkappa_1(\sigma)|, \quad R_N(\sigma) = |\varkappa_N(\sigma)| - |\varkappa_{N-1}(\sigma)|.$$

Используя вытекающее из тождества для B-сплайнов равенство $B_{i-1}(x_i) + B_i(x_i) + B_{i+1}(x_i) = 1$, имеем

$$c_i(\sigma) = \tau\sigma\left[\frac{6}{h_i^2}\left(k_i - \frac{h_i r_i}{2}\right)B_{i-1}(x_i) + \frac{6}{h_{i-1}^2}\left(k_i + \frac{h_{i-1} r_i}{2}\right)B_{i+1}(x_i)\right] +$$

$$+ B_i(x_i)(1+\tau\sigma q_i), \quad i = 0, \dots, N.$$

Поэтому $c_i(\sigma) > 0$, если

$$k_i - \frac{h_i r_i}{2} \geq 0, \quad k_i + \frac{h_{i-1} r_i}{2} \geq 0. \tag{19}$$

Предположим, что $a_i(\sigma) \geq 0$, $b_i(\sigma) \geq 0$, и выполнены неравенства (I9). Тогда

$$R_i(\sigma) = (1+\tau\sigma q_i)[1 - 2B_{i-1}(x_i) - 2B_{i+1}(x_i)] +$$

$$+ 12\tau\sigma\left[\frac{B_{i-1}(x_i)}{h_i^2}\left(k_i - \frac{h_i r_i}{2}\right) + \frac{B_{i+1}(x_i)}{h_{i-1}^2}\left(k_i + \frac{h_{i-1} r_i}{2}\right)\right].$$

В [I] показано, что $1 - 2B_{i-1}(x_i) - 2B_{i+1}(x_i) > 0$, $i = 0,\dots,N$, если

$$\rho = \max_{|i-j|=1} \frac{h_i}{h_j} < \frac{1+\sqrt{13}}{2}. \tag{20}$$

Следовательно, при выполнении неравенств (19), (20) и $a_i(\sigma) \geq 0$, $b_i(\sigma) \geq 0$, имеем $R_i(\sigma) > 0$, $i = 1, \ldots, N-1$. Нетрудно проверить, что это утверждение верно и в случаях, когда $a_i(\sigma)$, $b_i(\sigma)$ отрицательны или имеют разные знаки.

Далее, учитывая (6), находим

$$\varkappa_0(\sigma) = \frac{B_{-1}(x_0)}{h_0^2(2h_0+h_1)} \left\{6\tau\sigma\gamma_1 \left[(2h_0+h_1)k_0-h_0(h_0+h_1)\frac{r_0}{2}\right] - \right.$$

$$\left. - 3\beta_1[h_0(h_0+h_1)(1+\tau\sigma q_0) + 6\tau\sigma k_0] \right\}.$$

Так как $\gamma_1 \geq 0$, $\beta_1 \leq 0$ и $\gamma_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$, то отсюда при выполнении условий (19) вытекает $\varkappa_0(\sigma) > 0$. Пусть $\varkappa_1(\sigma) \geq 0$. Тогда

$$R_0(\sigma) = \varkappa_0(\sigma) - \varkappa_1(\sigma) = \frac{B_{-1}(x_0)}{h_0^2(2h_0+h_1)} \{-3\beta_1[h_0h_1(1+\tau\sigma q_0) +$$

$$+ 12\tau\sigma k_0] + 6\tau\sigma\gamma_1[k_0(2h_0+h_1) - h_0h_1 \frac{r_0}{2}]\}.$$

Если же $\varkappa_1(\sigma) < 0$, то

$$R_0(\sigma) = B_{-1}(x_0)h_0^{-2}\left[-3\beta_1h_0(1+\tau\sigma q_0) + 6\tau\sigma\gamma_1\left(k_0 - \frac{h_0r_0}{2}\right)\right].$$

В обоих случаях $R_0(\sigma) > 0$ при условиях (19). Аналогично выводится и неравенство $R_N(\sigma) > 0$. В итоге показано, что при выполнении ограничений (19), (20) матрица системы (17) имеет диагональное преобладание и, следовательно, она невырождена.

Можно указать и другие достаточные условия разрешимости системы (17). Например, она разрешима, когда для всех $i = 0, \ldots, N$ выполнены неравенства

$$Q_i = \min\left\{k_i - \frac{h_ir_i}{2} - \frac{h_i^2q_i}{6},\ k_i + \frac{h_{i-1}r_i}{2} - \frac{h_{i-1}^2q_i}{6}\right\} > 0, \tag{21}$$

$$\frac{\tau\sigma}{\max\{h_{i-1}^2, h_i^2\}} \geq \frac{1}{6Q_i}. \tag{22}$$

Действительно, в этом случае $a_i(\sigma) \le 0$, $b_i(\sigma) \le 0$, $c_i(\sigma) > 0$ и

$$R_i(\sigma) = 1 + \tau\sigma q_i, \quad i=1,\dots,N-1. \tag{23}$$

Далее, заметим, что из (21) вытекает (19). Поэтому справедливы неравенства $R_0(\sigma) > 0$, $R_N(\sigma) > 0$, которые вместе с (23) гарантируют разрешимость системы (17).

§2. Аппроксимация, устойчивость и сходимость

Пусть $\bar{S}(x,t)$ - кубический сплайн, интерполирующий при каждом t решение задачи (1)-(3) на сетке Δ_x, т.е. $\bar{S}(x_i,t) = u(x_i,t)$, $i = 0,\dots,N$. Погрешность приближения решения $u(x,t)$ сплайном $S(x,t)$, построенным по схеме (11)-(13), оценим с помощью неравенства

$$|S(x,t_n) - u(x,t_n)| \le |S(x,t_n) - \bar{S}(x,t_n)| + |\bar{S}(x,t_n) - u(x,t_n)|. \tag{24}$$

Если зафиксировать краевые условия у сплайна $\bar{S}(x,t)$, то для оценки второго слагаемого в правой части (24) можно использовать известные результаты о погрешности интерполяции кубическими сплайнами [1] и таким образом достаточно оценить величину $|S(x,t_n) - \bar{S}(x,t_n)|$.

Обозначим

$$\varepsilon_i^n = \frac{\bar{S}_i^n - \bar{S}_i^{n-1}}{\tau} - \sigma(L\bar{S})_i^n - (1-\sigma)(L\bar{S})_i^{n-1} - \tilde{f}_i^n,$$

$$i = 0,\dots,N,$$

$$\tilde{\varepsilon}_0^n = (l_1\bar{S})^n - \varphi^n, \quad \tilde{\varepsilon}_N^n = (l_2\bar{S})^n - \psi^n.$$

Будем говорить, что схема (11)-(13) аппроксимирует задачу (1)-(3) с погрешностью $O(H^m + \tau^l)$, если

$$\|\varepsilon^n\| = \max\{|\tilde{\varepsilon}_0^n|, |\tilde{\varepsilon}_N^n|, \max_i|\varepsilon_i^n|\} = O(H^m + \tau^l),$$

$$H = \max_i h_i, \quad n = 1,2,\dots .$$

Возьмем краевые условия для сплайна $\bar{S}(x,t)$ в виде $S'(x_0,t) = u'(x_0,t)$, $S'(x_N,t) = u'(x_N,t)$ (символ "$'$" означает дифференцирование по x).

В этом случае $\tilde{\varepsilon}_0^n = \tilde{\varepsilon}_N^n = 0$ и для нахождения оценки погрешности аппроксимации $\|\varepsilon^n\|$ достаточно найти $\max\limits_i |\varepsilon_i^n|$.

Обозначим символом $C^2W_\infty^4[a,b]$ класс функций $v(x)$ таких, что $v(x) \in C^2[a,b]$, $v(x) \in W_\infty^4[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,\dots,N-1$.

Предположим, что при фиксированных t решение $u(x,t) \in C^2W_\infty^4[a,b]$ и имеет ограниченные производные по t до третьего порядка включительно. Тогда согласно [I] справедливы оценки

$$\left\| \frac{\partial^r}{\partial x^r}\{\bar{S}(x,t) - u(x,t)\}\right\|_\infty \le K_r H^{4-r} \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right\|_\infty, \quad r=0,1,2. \qquad (25)$$

Учитывая (25), находим

$$\varepsilon_i^n = \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\tau} - \sigma(Lu)_i^n - (1-\sigma)(Lu)_i^{n-1} - \tilde{f}_i^n + O(H^2).$$

Заменяя теперь величины, вычисленные при $t = t_n$, по формуле Тейлора в точке $t = t_{n-1}$, получаем

$$\varepsilon_i^n = \frac{\tau}{2}\left\{ \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u}{\partial t} - 2\sigma(Lu + f)\right]\right\}_i^n + O(H^2 + \tau^2).$$

Отсюда

$$\|\varepsilon^n\| = O(H^2 + \tau^l), \qquad (26)$$

где $l = 2$, если $\sigma = 1/2$ и $l=1$, если $\sigma \ne 1/2$ (в этом случае можно ограничиться требованием ограниченности второй производной по t).

Таким образом, схема (II)-(I3) имеет второй порядок аппроксимации по x на любой неравномерной сетке Δ_x. Этот результат получен без предположения непрерывности производной $\partial^3 u/\partial x^3$, так как в соответствии с определением класса $C^2W_\infty^4$ она может иметь разрывы первого рода в узлах x_i.

Реализация схемы (II)-(I3) сводится в конечном счете к решению системы (I7), которая является разностной схемой относительно величин α_i^n. Когда коэффициенты уравнения (I) постоянны и сетка Δ_x равномерная, анализ ее устойчивости можно выполнить с помощью спектрального признака. В результате получается, что схема абсолютно устойчива в сеточной норме l_2 по начальным данным, если $\sigma \ge 1/2$. Это же ограничение возникает при проверке признака Бабенко и Гельфанда [I0], который учитывает влияние границ. Отсюда, используя оценки (26), нетрудно установить сходимость со скоростью

$O(H^2+\tau^1)$ в l_2 норме величин α_i^n к соответствующим коэффициентам $\bar{\alpha}_i^n$ в разложении интерполяционного сплайна $\bar{S}(x,t_n) = \sum_{j=-1}^{N+1} \bar{\alpha}_j^n B_j(x)$.

Докажем один результат о сходимости в равномерной норме.

ТЕОРЕМА. Пусть $\sigma=1$ и выполнены условия (2I), (22). Если решение $u(x,t)$ задачи (I)-(3) для каждого t принадлежит классу $C^2W_\infty^4[a,b]$ и имеет ограниченные производные по t до второго порядка включительно, то схема (II)-(I3) равномерно устойчива по начальным данным и правой части. Справедлива оценка

$$\| S(x,t_n) - u(x,t_n) \|_C = O(H^2+\tau). \tag{27}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разделив первое и последнее уравнения в (I7) соответственно на d_1 и d_3, запишем полученную систему в матричном виде

$$A(\sigma)\alpha^n = A(\sigma-1)\alpha^{n-1} + \tau g^n, \quad n = 1,2,\dots, \tag{28}$$

где

$$A(z) = \begin{bmatrix} \frac{\varkappa_0(z)}{d_1} & \frac{\varkappa_1(z)}{d_1} & & & \\ a_1(z) & c_1(z) & b_1(z) & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{N-1}(z) & c_{N-1}(z) & b_{N-1}(z) \\ & & & \frac{\varkappa_{N-1}(z)}{d_3} & \frac{\varkappa_N(z)}{d_3} \end{bmatrix},$$

$$\alpha^n = (\alpha_0^n,\dots,\alpha_N^n)^T, \quad g^n = (g_0^n, \tilde{f}_1^n, \tilde{f}_2^n, \dots, \tilde{f}_{N-1}^n, g_N^n)^T,$$

$$g_0^n = \frac{a_0(\sigma-1)\varphi^{n-1} - a_0(\sigma)\varphi^n}{\tau d_1} + \tilde{f}_0^n, \quad g_N^n = \frac{b_N(\sigma-1)\psi^{n-1} - b_N(\sigma)\psi^n}{\tau d_3} + \tilde{f}_N^n.$$

При условиях (2I), (22) нетрудно показать, что

$$R_0(\sigma)/d_1 \geq 1 + \tau\sigma q_0, \quad R_N(\sigma)/d_3 \geq 1 + \tau\sigma q_N. \tag{29}$$

Определим норму матрицы $c=[c_{ij}]$ формулой $\|c\| = \max\limits_i \sum\limits_j |c_{ij}|$. Тогда из неравенств (23), (29) согласно теореме о норме матрицы, обратной к матрице с диагональным преобладанием [I, с.334], имеем

$$\|A^{-1}(\sigma)\| \leq 1. \tag{30}$$

Далее, нетрудно проверить, что $\varkappa_1(0) > 0$, $\varkappa_0(0) = d_1 - \varkappa_1(0) > 0$. Поэтому $|\varkappa_0(0)| + |\varkappa_1(0)| = d_1$. Аналогично $|\varkappa_N(0)| + |\varkappa_{N-1}(0)| = d_3$. Теперь, учитывая, что $a_i(0) = B_{i-1}(x_i)$, $b_i(0) = B_{i+1}(x_i)$, $c_i(0) = B_i(x_i)$, получаем

$$\|A(0)\| = 1 . \tag{31}$$

Полагая в (28) $\sigma=1$ и используя (30), (3I), приходим к неравенству

$$\|\alpha^n\| \leq \|\alpha^0\| + \tau \sum_{k=1}^{n} \|g^k\| , \tag{32}$$

где $\|\alpha\| = \max\limits_{0\leq i\leq N} |\alpha_i|$. Это означает, что схема (I7) при $\sigma=1$ равномерно устойчива по начальным данным и правой части.

Обозначим $z_i^n = \overline{\alpha}_i^n - \alpha_i^n$, $i = -1,0,\dots,N+1$. Вспоминая определение величин ε_i^n, из (28) имеем $A(1)z^n = A(0)z^{n-1}+\tau\varepsilon^n$, $n=1,2,\dots$. Так как $z_i^0 = 0$, то, применяя неравенство (32) и учитывая оценку (26), находим $\|z^n\| = O(H^2+\tau)$. Теперь из (I4), (I6) нетрудно получить $|z_{-1}^n| = O(H^2+\tau)$, $|z_{N+1}^n| = O(H^2+\tau)$.

Следовательно,

$$|\overline{S}(x,t_n) - S(x,t_n)| \leq \sum_{j=-1}^{N+1} |\overline{\alpha}_j^n - \alpha_j^n| B_j(x) \leq$$

$$\leq \max_j |\overline{\alpha}_j^n - \alpha_j^n| \sum_{j=-1}^{N+1} B_j(x) = \max_j |\overline{\alpha}_j^n - \alpha_j^n| = O(H^2+\tau),$$

и утверждение теоремы вытекает из (24), (25).

§3. Численные алгоритмы для уравнений с разрывными коэффициентами

Рассмотрим задачу (I)-(3), (5) с оператором L, определенным формулой (4). Для ее численного решения в данном параграфе предлагаются две схемы. В первой из них существенно используется различный вид уравнения (I) слева и справа от точки разрыва ξ. Поэтому эту схему можно использовать только тогда, когда в точке ξ коэффициенты уравнения действительно имеют разрывы. Вторая схема построена так, что в случае отсутствия разрывов она переходит в схему из §I для уравнения с непрерывными коэффициентами.

I. Введем сетку Δ_x: $a = x_0 < x_1 <\ldots< x_N = b$ так, чтобы точка разрыва попадала в один из ее узлов. Пусть $\xi = x_m$, $0 < m < N$. Приближенное решение задачи ищем в виде сплайна

$$S(x,t) = \begin{cases} \sum\limits_{j=-1}^{m+1} \alpha_j(t)B_j(x), & x\in[a,x_m], \\ \sum\limits_{j=m-1}^{N+1} \tilde{\alpha}_j(t)B_j(x), & x\in[x_m,b]. \end{cases} \tag{33}$$

Действуя так же, как в §I, потребуем, чтобы сплайн $S(x,t)$ удовлетворял соотношениям (8)-(I0). При этом условимся считать, что в узле x_m уравнение (I0) записывается дважды - соответственно при x_m-0 и x_m+0. Кроме того, предполагаем, что $S(x,t)$ удовлетворяет условиям сопряжения (5). В результате приходим к схеме

$$\frac{S_i^n - S_i^{n-1}}{\tau} = \sigma(LS)_i^n + (1-\sigma)(LS)_i^{n-1} + \tilde{f}_i^n, \tag{34}$$

$$i = 0,1,\ldots,m-1,\ m-0,\ m+0,\ m+1,\ldots,N,$$

$$(l_1S)^n = \varphi^n, \quad (l_2S)^n = \psi^n, \tag{35}$$

$$[S^n]_{x_m} = 0, \quad \left[k\frac{\partial S^n}{\partial x}\right]_{x_m} = 0, \tag{36}$$

$$S_i^0 = u_i^0, \quad i = 0,\ldots,N. \tag{37}$$

Здесь запись $i=m+0$, $i = m-0$ означает, что функции k, k', q, f вычисляются соответственно при $x = x_m + 0$, $x = x_m - 0$. В дальнейшем будем обозначать $k(x_i-0) = k_i^-$, $k(x_i+0) = k_i^+$, $q(x_i-0) = q_i^-$ и т.д. Подставляя (33) в (34)-(36), получаем на каждом слое $t=t_n$ систему $(N+6)$ уравнений с $(N+6)$ неизвестными $\alpha_{-1}^n, \dots, \alpha_{m+1}^n$, $\tilde{\alpha}_{m-1}^n, \dots, \tilde{\alpha}_{N+1}^n$ и правыми частями, зависящими от их значений на предыдущем слое. Как обычно α_j^0, $\tilde{\alpha}_j^0$ находятся из условий (37). Все уравнения этой системы, за исключением тех, которые получаются из (34) при $i = m \pm 0$ и условий сопряжения (36), полностью совпадают с соответствующими уравнениями системы (I4)-(I6), если положить $r_j = k_j'$.

Полученная система неудобна для численного решения, так как уравнения, вытекающие из (36), содержат по 6 неизвестных. Ниже описываются преобразования, которые позволяют существенно упростить вид системы. Из уравнений сопряжения (36) нетрудно найти

$$\alpha_{m+1}^n = \theta_1\alpha_{m-1}^n + \theta_2\alpha_m^n + \theta_3\tilde{\alpha}_m^n + \theta_4\tilde{\alpha}_{m+1}^n, \qquad (38)$$

$$\alpha_{m-1}^n = \eta_1\alpha_{m-1}^n + \eta_2\alpha_m^n + \eta_3\tilde{\alpha}_m^n + \eta_4\tilde{\alpha}_{m+1}^n,$$

где

$$\theta_1 = \frac{k_m^+-k_m^-}{\Delta_m} B_{m-1}B'_{m-1}, \quad \theta_2 = \frac{1}{\Delta_m}(k_m^+B_mB'_{m-1} - k_m^-B'_mB_{m-1}),$$

$$\theta_3 = \frac{k_m^+}{\Delta_m}(B_{m-1}B'_m-B_mB'_{m-1}), \quad \theta_4 = \frac{k_m^+}{\Delta_m}(B_{m-1}B'_{m+1}-B_{m+1}B'_{m-1}),$$

$$\eta_1 = \frac{k_m^-}{\Delta_m}(B_{m-1}B'_{m+1}-B_{m+1}B'_{m-1}), \quad \eta_2 = \frac{k_m^-}{\Delta_m}(B_mB'_{m+1}-B_{m+1}B'_m),$$

$$\eta_3 = \frac{1}{\Delta_m}(k_m^+B_{m+1}B'_m-k_m^-B_mB'_{m+1}), \quad \eta_4 = \frac{k_m^+ - k_m^-}{\Delta_m}B_{m+1}B'_{m+1},$$

$$\Delta_m = k_m^-B_{m-1}B'_{m+1} - k_m^+B_{m+1}B'_{m-1},$$

$$B_p = B_p(x_m), \quad B'_p = B'_p(x_m), \quad p = m-1,\ m,\ m+1.$$

Уравнения (37) при $i = m\pm 0$ можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} a_m^-(\sigma)\alpha_{m-1}^n + c_m^-(\sigma)\alpha_m^n + b_m^-(\sigma)\alpha_{m+1}^n &= (F_m^n)^-, \\ a_m^+(\sigma)\tilde{\alpha}_{m-1}^n + c_m^+(\sigma)\tilde{\alpha}_m^n + b_m^+(\sigma)\tilde{\alpha}_{m+1}^n &= (F_m^n)^+. \end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

Символы a_m^-, c_m^-,... (a_m^+, c_m^+,...) означают, что в формулах для этих коэффициентов (см. систему (I4)-(I6)) следует использовать односторонние значения k_m^-, q_m^-, f_m^- (k_m^+, q_m^+, f_m^+). Кроме того, вместо $r(x)$ нужно поставить $k'(x)$ и в выражении $(F_m^n)^+$ величины α_j^{n-1} заменить на $\tilde{\alpha}_j^{n-1}$.

Заменив в (39) величины $\alpha_{m+1}^n, \alpha_{m+1}^{n-1}, \tilde{\alpha}_{m-1}^n, \tilde{\alpha}_{m-1}^{n-1}$ их выражениями (38) и исключив из системы неизвестные $\alpha_{-1}^n, \alpha_{-1}^{n-1}, \tilde{\alpha}_{N+1}^n, \tilde{\alpha}_{N+1}^{n-1}$ с помощью граничных условий (35), получаем систему

$$\varkappa_0(\sigma)\alpha_0^n + \varkappa_1(\sigma)\alpha_1^n = F_0^n, \qquad (40,а)$$

$$a_i(\sigma)\alpha_{i-1}^n + c_i(\sigma)\alpha_i^n + b_i(\sigma)\alpha_{i+1}^n = F_i^n,\ i=1,\dots,N-1, \qquad (40,б)$$

$$\check{A}_m(\sigma)\alpha_{m-1}^n + \check{C}_m(\sigma)\alpha_m^n + \check{B}_m(\sigma)\tilde{\alpha}_m^n + \check{D}_m(\sigma)\tilde{\alpha}_{m+1}^n = \check{F}_m^n, \qquad (40,в)$$

$$\hat{D}_m(\sigma)\alpha_{m-1}^n + \hat{B}_m(\sigma)\alpha_m^n + \hat{C}_m(\sigma)\tilde{\alpha}_m^n + \hat{A}_m(\sigma)\tilde{\alpha}_{m+1}^n = \hat{F}_m^n, \qquad (40,г)$$

$$a_i(\sigma)\tilde{\alpha}_{i-1}^n + c_i(\sigma)\tilde{\alpha}_i^n + b_i(\sigma)\tilde{\alpha}_{i+1}^n = F_i^n,\quad i=m+1,\dots,N-1, \qquad (40,д)$$

$$\varkappa_{N-1}(\sigma)\tilde{\alpha}_{N-1}^n + \varkappa_N(\sigma)\tilde{\alpha}_N^n = F_N^n, \qquad (40,е)$$

где $a_i(\sigma)$, $b_i(\sigma)$, $c_i(\sigma)$, F_i^n, $\varkappa_i(\sigma)$ такие же, как в (I7) (если положить $r(x) = k'(x)$ и в формулах F_i^n, $i \geq m+1$, заменить α_j^{n-1} на $\tilde{\alpha}_j^{n-1}$), и

$$\check{A}_m(\sigma) = a_m^-(\sigma) + \theta_1 b_m^-(\sigma), \qquad \check{C}_m(\sigma) = c_m^-(\sigma) + \theta_2 b_m^-(\sigma),$$

$$\check{B}_m(\sigma) = \theta_3 b_m^-(\sigma), \qquad \check{D}_m(\sigma) = \theta_4 b_m^-(\sigma),$$

$$\hat{D}_m(\sigma) = \eta_1 a_m^+(\sigma), \qquad \hat{B}_m(\sigma) = \eta_2 a_m^+(\sigma),$$

$$\hat{C}_m(\sigma) = c_m^+(\sigma) + \eta_3 a_m^+(\sigma), \quad \hat{A}_m(\sigma) = b_m^+(\sigma) + \eta_4 a_m^+(\sigma),$$

$$\check{F}_m^n = \check{A}_m(\sigma-1)\alpha_{m-1}^{n-1} + \check{C}_m(\sigma-1)\alpha_m^{n-1} + \check{B}_m(\sigma-1)\tilde{\alpha}_m^{n-1} + \check{D}_m(\sigma-1)\tilde{\alpha}_{m+1}^{n-1} + \\ + \tau(\tilde{f}^n)_m^-,$$

$$\hat{F}_m^n = \hat{D}_m(\sigma-1)\tilde{\alpha}_{m-1}^{n-1} + \hat{B}_m(\sigma-1)\alpha_m^{n-1} + \hat{C}_m(\sigma-1)\tilde{\alpha}_m^{n-1} + \hat{A}_m(\sigma-1)\tilde{\alpha}_{m+1}^{n-1} + \\ + \tau(\tilde{f}^n)_m^+.$$

Таким образом, численная реализация схемы (34)-(37) сведена к последовательному решению систем (40), из которых вычисляются $\alpha_0^n, \ldots, \alpha_m^n, \tilde{\alpha}_m^n, \ldots, \tilde{\alpha}_N^n$. После этого коэффициенты α_{-1}^n, $\tilde{\alpha}_{N+1}^n$ находятся из уравнений (14), (16), а $\alpha_{m+1}^n, \tilde{\alpha}_{m-1}^n$ из (38).

Если в дополнение к условиям (21), (22) предположить, что

$$1 + \tau\sigma q_m^+ - \frac{6\tau\sigma}{h_{m-1}h_m}\left[k_m^+ + k_m^-\left(\frac{h_m(k')_m^+}{2k_m^+} + \frac{h_m-h_{m-1}}{h_{m-1}}\right)\right] \le 0,$$
$$1 + \tau\sigma q_m^- - \frac{6\tau\sigma}{h_{m-1}h_m}\left[k_m^- - k_m^+\left(\frac{h_{m-1}(k')_m^-}{2k_m^-} - \frac{h_m-h_{m-1}}{h_m}\right)\right] \le 0, \tag{41}$$

то система (40) будет с диагональным преобладанием.

В случае, когда не имеют места равенства

$$(k')_m^+ = (k')_m^- = 0, \tag{42}$$

система (40) легко приводится к трехдиагональному виду. Достаточно вместо уравнений (40,в) и (40,г) взять их линейные комбинации: в одном случае с весами $\hat{A}_m(\sigma)$, $-\check{D}_m(\sigma)$, в другом с $\check{A}_m(\sigma)$, $-\hat{D}_m(\sigma)$. Если условия (42) выполнены, то описанное преобразование приводит к цели лишь тогда, когда $h_m \ne h_{m-1}$ или $h_{m-2} \ne h_{m+1}$. Это должно учитываться при выборе сетки Δ_x.

Несколько изменив по сравнению с §2 требования к гладкости решения $u(x,t)$ по переменной x, нетрудно перенести полученные там результаты на схему (34)-(38). Например, если предположить

$$u(x,t) \in C^2W^4_\infty[a,x_m], \qquad u(x,t) \in C^2W^4_\infty[x_m,b], \tag{43}$$

то схема (34)-(38) аппроксимирует задачу (I)-(3),(5) с точностью $O(H^2 + \tau^l)$, где $l=2$ при $\sigma=1/2$ и $l=1$ при $\sigma \neq 1/2$. Далее, добавляя к условиям теоремы из §2 требования (4I), (43), легко получаем оценку (27).

2. Перейдем к построению второй схемы. Как и в п.I, решение ищем в виде сплайна (33), но в отличие от первой схемы в точке разрыва x_m вместо двух уравнений (39) возьмем их среднее арифметическое. Остальные уравнения оставим без изменения. В результате в системе (40) количество уравнений уменьшится на единицу при сохранении числа неизвестных. Чтобы компенсировать недостаток уравнений, положим

$$\alpha^n_m = \tilde{\alpha}^n_m . \tag{44}$$

Основанием для такого предположения служат формулы, связывающие производные кубического сплайна с коэффициентами его разложения по В-сплайнам [9]. Из этих формул следует также, что наименьшая погрешность при этом возникает, если

$$h_{m-1} = h_m . \tag{45}$$

С учетом (44) реализация полученной схемы сводится к решению системы, составленной из уравнений (40,а,б,д,е) и

$$\frac{1}{2}[\check{A}_m(\sigma)+\hat{D}_m(\sigma)]\alpha^n_{m-1} + \frac{1}{2}[\check{C}_m(\sigma)+\check{B}_m(\sigma) + \hat{B}_m(\sigma) + \hat{C}_m(\sigma)]\alpha^n_m +$$
$$+ \frac{1}{2}[\check{D}_m(\sigma) + \hat{A}_m(\sigma)]\tilde{\alpha}^n_{m+1} = \frac{1}{2}[\check{F}^n_m + \hat{F}^n_m] .$$

Эта система имеет трехдиагональный вид, и, как нетрудно видеть, в случае отсутствия разрывов в уравнении (I) она совпадает с системой (I4)-(I6). При выполнении условий (2I), (22), (45) и

$$h_{m-2} = h_{m+1} \tag{46}$$

система будет с диагональным преобладанием.

Для построенной схемы можно получить такие же результаты об аппроксимации и сходимости, как для схемы из п.I. Требования к гладкости решения $u(x,t)$ остаются прежними, но на сетку Δ_x приходится накладывать более жесткие ограничения; а именно: схема имеет аппроксимацию $O(H^2 + \tau^l)$, если выполнены условия (45),(46) и $h_m = O(h^3_{m+1})$. Если, кроме того, потребовать выполнение условий

(21), (22), то нетрудно получить оценку (27). Ограничение $h_m = O(h^3_{m+1})$ не является необходимым для сходимости схемы. Однако, как показывают численные эксперименты, его выполнение обеспечивает существенное увеличение точности приближенного решения в окрестности точки разрыва.

§4. Численные примеры

Рассмотрим несколько численных примеров решения параболических уравнений методом сплайн-коллокации. Для сравнения приведем также результаты, полученные с помощью консервативной разностной схемы [11, гл.VII, §1].

Будем обозначать через $u(x,t)$ и $S(x,t)$ соответственно точное и найденное по методу сплайн-коллокации решения. Если расчет выполняется на равномерной сетке, то ее шаг обозначается буквой h. Сравнение сплайновых и разностной схем производится на одинаковых сетках и при одних и тех же значениях параметра σ. В качестве характеристики точности приближенного решения выбрана величина $E_m = \max\limits_{x\in\Delta_x} |u(x,t) - S(x,t)|$, вычисляемая на одном из временных слоев. Индекс m указывает на используемую схему: $m=0$ – схема для уравнения с непрерывными коэффициентами (§1); $m=1$ и $m=2$ – соответственно первая и вторая схемы для уравнения с разрывными коэффициентами (§3). Аналогичная величина для разностной схемы обозначена E_R.

Так как в методе сплайн-коллокации решение получается в виде сплайна, то оно может быть использовано для приближенного вычисления производных по x от $u(x,t)$. С целью демонстрации достигаемой при этом точности мы приводим значения величин

$$E'_m = \max_{x\in\Delta_x}\left|\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial S}{\partial x}\right|, \qquad E''_m = \max_{x\in\Delta_x}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right|.$$

ПРИМЕР 1 [4].

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0; \quad u(x,0) = 10\sin \pi x.$$

Рассматриваются краевые условия двух типов:

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{47}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 10\pi \exp(-\pi^2 t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = -10\pi \exp(-\pi^2 t). \tag{48}$$

В обоих случаях

$$u(x,t) = 10 \sin \pi x \exp(-\pi^2 t).$$

В табл.I приведены численные результаты для $t = 0.I$, полученные при $\sigma = 0.5$, $\tau = 0.00I$.

Таблица I

h	Краевые условия (47)		Краевые условия (48)			
	$100E_R$	$100E_0$	$100E_R$	$100E_0$	$100E_0'$	$10E_0''$
0.I	3.	3.			2.5	2.3
0.05	0.75	0.76	2.	0.93	0.64	0.58
0.025			0.48	0.24	0.I6	0.I5

Для краевых условий первого рода (47) оба метода дают одинаковую точность. Причем это в равной мере справедливо и в отношении максимальной ошибки, которая достигается в середине отрезка $[0,I]$, и в отношении ошибок в каждом из узлов. В случае краевых условий второго рода (48) метод сплайн-коллокации точнее разностного. Особенно заметно отличие вблизи границ отрезка $[0,I]$, где погрешность разностного метода достигает максимума,в то время как для сплайнового погрешность вблизи границ существенно меньше, чем в середине отрезка. Этот эффект объясняется точной аппроксимацией граничных условий в методе сплайн-коллокации.

Из приведенных численных результатов видно, что точность приближения решения $u(x,t)$ и его производных в методе сплайн-коллокации равна $O(H^2)$.

ПРИМЕР 2 [7].

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad t > 0.$$

$$a = \begin{cases} \pi^2, & x \le 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \qquad u(x,0) = \begin{cases} \cos x, & x \le 0, \\ \cos \pi x, & x > 0. \end{cases}$$

$$[u]_{x=0} = \left[a\,\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=0} = 0$$

Как и в примере I, рассмотрим краевые условия первого и второго рода

$$u(-\pi/2,\ t) = u(1/2,\ t) = 0, \tag{49}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=-\pi/2} = \exp(-\pi^2 t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1/2} = -\pi\exp(-\pi^2 t). \tag{50}$$

Точное решение определяется формулой

$$u(x,t) = \begin{cases} \cos x \exp(-\pi^2 t), & x \le 0, \\ \cos \pi x \exp(-\pi^2 t), & x > 0. \end{cases}$$

Численные результаты получены при $\sigma = 0.5$, $\tau = 1/60$ и приводятся для $t = 0.2$. Использованы сетки: Δ_x с узлами $x_i = (i-5)\pi/10$, $i = 0,\dots,5$; $x_i = (i-5)/10$, $i = 6,\dots,10$ и $\tilde{\Delta}_x$ с узлами, расположенными вдвое чаще.

Таблица 2

Сетка	Краевые условия	$1000E_R$	$1000E_1$	$1000E_1'$	$10E_1''$
Δ_x	(49)	I.3	I.5	5.	I.2
$\tilde{\Delta}_x$	(49)	0.33	0.35	I.	0.3
Δ_x	(50)	8.6	I.5	5.	I.2
$\tilde{\Delta}_x$	(50)	I.9	0.35	0.7	0.3

В табл.3 приведены результаты, полученные с помощью второй схемы из §3. Кроме сетки Δ_x, здесь используются сетка Δ_x^1, полученная из Δ_x добавлением узла -0.I, сетка Δ_x^2, отличающаяся от Δ_x^1 двумя узлами: -0.00I и 0.00I, и сетка $\tilde{\Delta}_x^2$, построенная делением пополам каждого из интервалов сетки Δ_x^2.

Таблица 3

Сетка	Краевые условия	$1000E_2$	$1000E_2'$	E_2''
Δ_x	(49)	I6.	II5.	6.4
Δ_x^1	(49)	5.4	32.	0.9
Δ_x^2	(49)	I.I	4.I	I.I
$\tilde{\Delta}_x^2$	(49)	0.3	2.6	6.7
Δ_x^2	(50)	I.I	4.6	6.2
$\tilde{\Delta}_x^2$	(50)	0.3	2.7	6.6

Из табл.3 видно, что погрешность решения при использовании второй схемы существенно уменьшается при переходе от сетки Δ_x к Δ_x^1. Это подтверждает важность условия (45), которое выполнено для сетки Δ_x^1. Еще более снижается погрешность при введении в окрестности точки разрыва двух близко расположенных узлов.

Наиболее существенным различием двух использованных схем является то, что вторая производная сплайна, построенного по второй схеме, не сходится к второй производной решения. Это следствие предположения (44), положенного в основу второй схемы.

Отметим также, что результаты табл. 2 и 3 еще раз демонстрируют высокую эффективность сплайн-коллокации при решении задач с условиями второго рода.

ПРИМЕР 3 [I2].

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sqrt{u}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\,\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad -1 \le x \le 1, \quad t > 0.$$

$$u(x,0) = (1+\cos \pi x/2)^2, \quad u(-1,t) = u(1,t) = 1.$$

$$u(x,t) = [1 + \exp(-\pi^2 t/4)\cos \pi x/2]^2 .$$

Предварительно приведем уравнение к квазилинейному виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r\,\frac{\partial u}{\partial x}, \quad r = -\frac{1}{2u}\,\frac{\partial u}{\partial x}.$$

В табл.4 даны результаты расчетов на равномерных сетках по x для $t = 0.I$ при $\sigma = I$, $\tau = 0.00I$

Таблица 4

h	$100E_0$	$100E_0'$	$100E_0''$
0.25	I.5	2.9	8.5
0.I25	0.3	0.7	2.3

В дополнение к описанным экспериментам укажем, что метод сплайн-коллокации дает хорошие результаты при решении уравнений, содержащих производную $\partial u/\partial x$, включая те случаи, когда коэффициент при ней велик. Это свойство нетрудно объяснить, если учесть оценку (25), согласно которой производная $\partial u/\partial x$ аппроксимируется с более высокой точностью, нежели $\partial^2 u/\partial x^2$.

Выводы

Основные особенности построенных схем метода сплайн-коллокации заключаются в следующем. Приближенное решение получается в виде сплайна. Схемы имеют одинаковые свойства, вне зависимости от того, является сетка равномерной или нет. Краевые условия любого вида аппроксимируются точно. Численная реализация схем по сложности сравнима с реализацией аналогичных разностных схем.

Применение метода сплайн-коллокации наиболее перспективно для решения задач, содержащих первую производную по пространственной переменной в уравнении или в граничных условиях, а также в случаях, когда требуется получить не только решение, но и его производные.

Литература

1. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980. - 350 с.

2. BOOR C.de. A practical guide to splines.- N.Y.,Heidelberg,Berlin: Springer,1978.- 392 p.

3. DOUGLAS J.Jr., DUPONT T. A finite element collocation method for quasilinear parabolic equations.-Math. of Comp., 1973, v.27, N 121,p.17-29.

4. CAVENDISH I.C., HALL C.A. L_∞ convergence of collocation and Galerkin approximations to linear two-point parabolic problems.-Aequationes mathematicae,1974,v.11,N 2/3,p.230-249.

5. ARCHER D. An O(h^4) cubic spline collocation method for quasilinear parabolic equations.- SIAM J.Numer.Anal.,1977,v. 14, p.620-637.

6. ИЛЬИН И.А. Применение кубических сплайн-функций к решению краевых задач для уравнений параболического типа: Автореф. Дис.на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук. - Новосибирск, 1978. - 24 с.

7. ИЛЬИН И.А., ЛУКЬЯНОВ А.Г. Применение кубических сплайнов к решению второй краевой задачи для уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами. - В сб.: Численные методы механики сплошной среды. - Новосибирск, 1976, т. 7, № 1, с.62-71.

8. САУЛЬЕВ В.К. Современные вычислительные методы. - М.,1977. - 48 с. (Московский авиационный институт).

9. ЖАНЛАВ Т. О представлении интерполяционных кубических сплайнов через В-сплайны. - Настоящий сборник, с.3-10.

10. ГОДУНОВ С.К., РЯБЕНЬКИЙ В.С. Разностные схемы.-М.: Наука, 1973. - 400 с.

11. САМАРСКИЙ А.А. Теория разностных схем. -М.: Наука, 1977. - 656 с.

12. KNIBB D., SCRATON R.E. A collocation method for the numerical solution of non-linear parabolic partial differential equation.- J.Inst.Math.Applics,1978,v.22, p.305-315.

Поступила в ред.-изд.отд.
13 апреля 1981 года