МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ
(Вычислительные системы)
1981 год Выпуск 87

УДК 517.983

ПОЗИТИВНОСТЬ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

П.Е.Соболевский, Ю.А.Смирницкий

Одним из основных вопросов при исследовании сходимости разностных схем, построенных для дифференциальных уравнений в частных производных, является вопрос устойчивости этих схем. В данной работе устанавливается позитивность класса разностных операторов в C-норме, которая позволяет доказывать коэрцитивную или почти-коэрцитивную устойчивость разностных эллиптических или параболических задач.

Линейный оператор A, действующий в банаховом пространстве E, с плотной в E областью определения $D(A)$, называется позитивным [1], если его спектр $\sigma(A)$ находится внутри симметричного относительно положительной полуоси угла раствора $2\varphi < 2\pi$, а на сторонах угла и вне его для резольвенты $(\lambda - A)^{-1}$ оператора A справедлива оценка

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{E \to E} \le M(\varphi)\,|\lambda|^{-1} . \tag{1}$$

Нижняя грань таких φ, при которых справедлива оценка (1), называется спектральным углом оператора A и обозначается через $\varphi(A)$. Если $\varphi(A) < \pi/2$, то оператор называется сильно позитивным.

Примерами позитивных операторов являются: самосопряженный положительно определенный оператор в гильбертовом пространстве, эллиптический оператор с однородными граничными условиями плюс оператор kI (при достаточно большом k) в пространстве $L_p(1 \le p \le \infty)$, оператор d/dt с нулевым начальным условием в пространстве $L_p(1 \le p \le \infty)$. Однако если первые два оператора сильно позитивны, то в третьем примере $\varphi(A) = \pi/2$.

Выше приведены примеры дифференциальных, т.е. неограниченных позитивных операторов. В статье изучается позитивность разностных, т.е. ограниченных операторов. Любой ограниченный оператор плюс оператор kI является позитивным оператором при достаточно большом k. Однако нас будет интересовать позитивность не фиксированного разностного оператора, а всей совокупности таких операторов вне зависимости от шага сетки.

Позитивность разностных операторов в C-норме изучалась ранее либо для одномерных операторов, либо для многомерных эллиптических операторов, главная часть которых является суммой одномерных позитивных операторов. В работе [2] была установлена сильная позитивность $(\varphi(A)=0)$ в пространстве C_h оператора A_h, определенного на функциях одной переменной по формуле $A_h u(x) = (2u(x) - u(x+h) - u(x-h))h^{-2}$, $x=kh$, $k=1,2,\dots,N-1, u(0)=u(1)=0$, $h>0$, $N=h^{-1}$ целое.

С помощью приема Гривара, основанного на формуле Коши-Рисса [3], теоремы о коэрцитивно-позитивных суммах операторов [4] и метода "параметрикс", в работе [5] установлена сильная позитивность оператора A_{hn}, определенного на сеточных функциях n переменных формулой

$$A_{hn}u_h(x) = \left[\sum_{k=1}^{n} (a_{kk}(x)A_{h_k} + a_k(x)B_{h_k}) + a_0(x)\right]u_h(x)$$

и аппроксимирующего первую краевую задачу в единичном n-мерном кубе для эллиптического оператора

$$A_n v(x) = \left[\sum_{k=1}^{n} (a_{kk}(x)(-\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}) + a_k(x)\frac{\partial}{\partial x_k}) + a_0(x)\right]v(x)$$

с порядком $\sum_{k=1}^{n} h_k^2$.

В работе [6] изучалась позитивность в пространстве C_h разностного оператора A_h^{2m}, определенного на периодических сеточных функциях по формуле

$$A_h^{2m}\, u_h(x) = \sum_{s=1}^{m} a_s(h)(A_h)^s u_h(x),$$

где коэффициенты выбирались так, чтобы оператор A_h^{2m} аппроксимировал оператор $-\frac{d^2}{dx^2}$ с порядком h^{2m}. Установлено, что A_h^{2m} сильно позитивен и $\varphi(A_h^{2m})=0$. Аналогично тому, как это делалось в работе [5], в [7] доказано, что свойством сильной позитивности в норме пространства C_h обладает оператор A_{hn}^{2m}, определенный на периодических сеточных функциях по формуле

$$A_{hn}^{2m}u_h(x)=\left[\sum_{k=1}^{n}(a_{kk}(x)A_{h_k}^{2m_k}+a_k(x)B_{h_k})+a_0(x)\right]u_h(x),$$

который аппроксимирует оператор A_n с порядком $\sum_{k=1}^{n} h_k^{2m_k}$. Наконец, отметим, что приложения понятия позитивности к установлению устойчивости разностных схем используются в работах [6,8-10].

В настоящей работе развивается новый подход к исследованию позитивности разностных операторов с постоянными коэффициентами. Работа состоит из двух пунктов. В п.I приводятся основной результат и вспомогательные утверждения. В п.2 приводится доказательство основной теоремы в одномерном случае. Доказательство основного результата в общем случае будет приведено в другой работе.

I. Определим сеточное пространство R_{hn} формулой

$$R_{hn}=\{\, x=(x_1,\dots,x_n)\in R_n,\ x=(ih)=(i_1h_1,\dots,i_nh_n),$$
$$0<h_k<H_k,\ \ i_k=0,\pm1,\pm2,\dots;\ k=1,2,\dots,n\}.$$

Функцию, заданную на R_{hn}, будем называть сеточной. Рассмотрим множество C_h, состоящее из всех определенных на R_{hn} и ограниченных сеточных функций. Введем норму

$$\|f\|_h=\|f(x)\|_{C_h}=\sup_{x\in R_{hn}}|f(x)|,$$

обращающую это множество в банахово пространство C_h.

Определим элементарные разностные операторы формулой

$$T_{k\pm}f(x_1,\dots,x_k,\dots,x_n)=\pm\,(f(x_1,\dots,x_k\pm h_k,\dots,x_n)-f(x_1,\dots,x_k,\dots,x_n)).$$

Рассмотрим дифференциальный оператор вида

$$A=\sum_{|l|=M} a_l\frac{\partial^{l_1}\dots\partial^{l_n}}{\partial x_1^{l_1}\dots\partial x_n^{l_n}}$$

с постоянными коэффициентами, действующий на функциях, определенных на всем R_n. Здесь $l \in R_n$ – вектор с целыми неотрицательными координатами, $|l| = l_1 + l_2 + \ldots + l_n$. Будем предполагать, что

$$A(\xi) = \sum_{|l|=M} a_l (i\xi_1)^{l_1} \ldots (i\xi_n)^{l_n} \neq 0$$

при $\xi \neq 0$, т.е. оператор A эллиптичен.

Оператору A поставим в соответствие разностный оператор

$$A_{hn} = \sum_{\substack{|l|=M, \\ |\tau| \geq M}} a_{l\tau} h^{-l} T^{\tau}.$$

Здесь l, τ – векторы с целыми неотрицательными координатами, $l \in R_n$, $\tau \in R_{2n}$, $h^{-l} = h_1^{-l_1} \ldots h_n^{-l_n}$, $T^{\tau} = T_{1+}^{\tau_1} T_{1-}^{\tau_2} \ldots T_{n+}^{\tau_{2n-1}} T_{n-}^{\tau_{2n}}$.

Будем предполагать, что оператор A_{hn} аппроксимирует A с порядком $s > 0$, т.е. для любой гладкой функции $u(x)$ выполнена оценка

$$\sup_{y \in R_{hn}} |[Au](y) - A_{hn}u(y)| \leq K\left(\sum_{k=1}^{n} h_k^2\right)^{s/2}.$$

Здесь через $[Au](y)$ обозначен след функции $Au(x)$ на сетке R_{hn}.

Преобразование Фурье сеточной функции $\varphi(x)$ задается формулой

$$\tilde{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{-n} \sum_{x \in R_{hn}} e^{i(x,\xi)} \varphi(x)\, h_1 \ldots h_n; \quad (x,\xi) = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n.$$

Эта формула определяет периодическую функцию непрерывного аргумента ξ, если сеточная функция $\varphi(x)$ достаточно быстро убывает на бесконечности. В силу определения оператора A_{hn} и свойств преобразования Фурье, справедливо равенство $\widetilde{A_{hn}u(x)} = A(\xi,h)\tilde{u}(\xi)$ для быстроубывающей сеточной функции $u(x)$. Функцию $A(\xi,h)$ будем называть символом разностного оператора A_{hn}. Так как символами операторов $T_{k\pm}$ являются функции $\pm(e^{i\xi_k h_k} - 1)$, то $A(\xi,h)$ допускает аналитическое продолжение на все комплексное n-мерное пространство. Так как оператор A_{hn} аппроксимирует оператор A с порядком s, то справедливо разложение

$$A(z,h) = \sum_{|l|=M} a_l (iz)^l + \sum_{\substack{|l|=M, \\ |r|\geq M+s}} a_{lr} (izh)^r h^{-1}. \qquad (2)$$

Из (2) следует, что в окрестности нуля справедлива оценка

$$|A(z,h)| \leq c|z|^M, \qquad |z|^2 = |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2. \qquad (3)$$

Рассмотрим задачу нахождения резольвенты оператора $-A_{hn}$

$$A_{hn} u(x) + \lambda\, u(x) = f(x), \quad x \in R_{hn}. \qquad (4)$$

Легко видеть, что в классе быстроубывающих сеточных функций ее можно решить методом преобразования Фурье. Если $A(\xi,h) + \lambda \neq 0$,то задача (4) однозначно разрешима и справедлива формула

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \sum_{y \in R_{hn}} K_{\lambda h}(y) f(x-y) h, \qquad (5)$$

где

$$K_{\lambda h}(y) = \int_{|\xi| \leq \pi h^{-1}} (A(\xi,h) + \lambda)^{-1} e^{i(\xi,y)} d\xi. \qquad (6)$$

Функцию $(2\pi)^{-n} K_{\lambda h}(y)$ называют функцией Грина резольвенты разностного оператора.

Оказывается, задача (4) однозначно разрешима и в классе ограниченных сеточных функций и для ее решения справедливы формулы (5),(6).

Сформулируем основной результат этой работы.

ТЕОРЕМА. П у с т ь $|A(\xi,h)| \geq c|\xi|^M$ и $|\arg A(\xi,h)| \leq \varphi < \varphi_0 \leq \pi$ п р и $0 < |\xi| \leq \pi h^{-1}$, т о г д а о п е р а т о р A_{hn} п о з и т и в е н и $\varphi(A_{hn}) < \varphi_0$.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы при $n=1$,сформулируем две вспомогательные леммы.

ЛЕММА I. П у с т ь $n=1$ и п р и $h=1$ и λ ,л е ж а щ и х в н е к о т о р о м с е к т о р е $|\arg\lambda| \leq \phi$, д л я р е ш е н и я з а д а ч и (4) с п р а в е д л и в а о ц е н к а $\|u\|_h \leq c|\lambda|^{-1}\|f\|_h$. Т о г д а т а к а я ж е о ц е н к а с п р а в е д л и в а п р и л ю б о м $0<h<h_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы тривиально.

ЛЕММА 2. П у с т ь $f(x)$ - н е п р е р ы в н о д и ф - ф е р е н ц и р у е м а я, п е р и о д и ч е с к а я с п е -

риодом 2T функция. Тогда при $n\neq 0$ справедливо

$$\int_{-T}^{T} e^{i\frac{\pi}{T}nx} f(x)dx = \frac{\alpha (iT)^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)(\pi n)^{\alpha}} \int_{-T}^{T} e^{i\frac{\pi}{T}nx} \int_{0}^{\infty} \frac{f(x)-f(x-t)}{t^{1+\alpha}} dt dx .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На пространстве непрерывных 2T-периодических функций формула $U(t)\varphi(x)=\varphi(x+t)$ определяет сильно непрерывную группу сдвигов. Ее производящий оператор B определен формулой $B\varphi(x)=\varphi'(x)$ на непрерывно дифференцируемых функциях. Так как $U(t)$ унитарен, то при $\varepsilon>0$ оператор $B_{\varepsilon}=B+\varepsilon$ позитивен и определены его дробные степени (см. [II]). Так как $f(x)\in C^1$, то $f(x)\in D(B_{\varepsilon})$ и при $0<\alpha<1$ справедливо тождество

$$J \equiv \int_{-T}^{T} e^{i\frac{\pi}{T}nx} f(x)dx = \int_{-T}^{T} e^{i\frac{\pi}{T}nx} B_{\varepsilon}^{-\alpha} B_{\varepsilon}^{\alpha} f(x)dx .$$

Для любой функции $\varphi(x)\in C(2T)$

$$B_{\varepsilon}^{-\alpha}\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-tB_{\varepsilon}} \varphi(x)dt .$$

Отсюда

$$\int_{-T}^{T} e^{i\frac{\pi}{T}nx} B_{\varepsilon}^{-\alpha}\varphi(x)dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{\infty} t^{\alpha-1} \int_{-T}^{T} e^{i\frac{\pi}{T}nx} e^{-tB_{\varepsilon}} \varphi(x)dxdt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t\varepsilon} \int_{-T}^{T} e^{i\frac{\pi}{T}nx} \varphi(x-t)dxdt .$$

Сделаем замену во внутреннем интеграле $x-t=y$. Тогда, воспользовавшись периодичностью функций $e^{i\frac{\pi}{T}nx}$ и $\varphi(x)$, получим

$$\int_{-T}^{T} e^{i\frac{\pi}{T}nx} B_{\varepsilon}^{-\alpha}\varphi(x)dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t(\varepsilon - i\frac{\pi}{T}n)} dt \times$$

$$\times \int_{-T}^{T} e^{i\frac{\pi}{T}ny} \varphi(y)dy = (\varepsilon - i\tfrac{\pi}{T}n)^{-\alpha} \int_{-T}^{T} e^{i\frac{\pi}{T}nx} \varphi(x)dx \, .$$

Таким образом,

$$J = (\varepsilon - i\tfrac{\pi}{T}n)^{-\alpha} \int_{-T}^{T} e^{i\frac{\pi}{T}nx} B_{\varepsilon}^{\alpha} f(x)dx.$$

Далее,

$$B_{\varepsilon}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} t^{-\alpha} B_{\varepsilon} e^{-tB_{\varepsilon}} f(x)dt = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t B_{\varepsilon} e^{-sB_{\varepsilon}} f(x)ds \Big|_0^{\infty} +$$

$$+ \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} t^{-\alpha-1} \int_0^t B_{\varepsilon} e^{-sB_{\varepsilon}} f(x)dsdt = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} t^{-\alpha-1} (I - e^{-tB_{\varepsilon}}) f(x)dt =$$

$$= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} t^{-\alpha-1} (f(x) - e^{-t\varepsilon} f(x-t))dt.$$

Таким образом,

$$J = (\varepsilon - i\tfrac{\pi}{T}n)^{-\alpha} \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-T}^{T} e^{i\frac{\pi}{T}nx} \int_0^{\infty} (f(x) - e^{-t\varepsilon} f(x-t)) t^{-\alpha-1} dtdx.$$

Перейдя в последнем равенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$,получим утверждение леммы.

2. Доказательство теоремы в случае $n=1$ разобьем на ряд лемм.

Прежде всего, заметим, что лемма I позволяет рассматривать случай, когда $h=1$. В связи с этим индекс h будет в дальнейших рассуждениях опущен.

Из условия $|A(\xi)| \geq c|\xi|^M$ при $0 < |\xi| \leq \pi$ следует оценка

$$|A(z)| \geq c|z|^M , \qquad (7)$$

справедливая в достаточно малой окрестности отрезков $0 < \xi_0 \leq \leq |\xi| \leq \pi$. В качестве такой окрестности мы будем рассматривать объединение прямоугольников $P = \{z = \xi + i\theta;\ \xi_0 \leq |\xi| \leq \pi,\ |\theta| \leq a\}$.

ЛЕММА 3. Пусть $|\lambda| \geq 2S$, где $S = \max\limits_{z \in P} |A(z)|$. Тогда

$$|K_\lambda(y)| \leq 4\pi\, e^{-|ya|} |\lambda|^{-1} .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $z \in P$ имеем

$$|A(z) + \lambda| \geq |\lambda| - |A(z)| \geq |\lambda| - S \geq |\lambda|/2 . \qquad (8)$$

Сделаем замену $\bar{\xi} = \xi + i(\operatorname{sign} y)a$ под знаком интеграла в равенстве (6). Воспользовавшись аналитичностью и периодичностью функций $A(\xi)$ и $e^{i\xi y}$, получим

$$K_\lambda(y) = \int_{-\pi}^{\pi} (A(\bar{\xi}) + \lambda)^{-1} e^{i\bar{\xi}y} d\xi .$$

Отсюда, использовав оценку (8), получим утверждение леммы.

ЛЕММА 4. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда функция $\arg A(kz)$ равномерно непрерывна по совокупности z и k при $0 < k < k_0$ в таких точках $z = \xi$, что $0 < \xi_0 \leq |\xi|$, $|\xi k| \leq \pi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представление функции $A(z)$ в виде ряда (2) позволяет записать

$$\arg A(kz) = \arg(kz)^M + \arg \sum_{l=M}^{\infty} a_l (kz)^{l-M} . \qquad (9)$$

Если $f(z) \neq 0$ при $z = z_0$, то функция $\arg f(z)$ непрерывна в точке z_0. Поэтому, в силу $\arg(kz)^M = \arg z^M$, первое слагаемое в равенстве (9) есть непрерывная функция. Из оценки (7) следует неравенство

$$\left|\sum_{l=M}^{\infty} a_l (k\xi)^{l-M}\right| \geq c.$$

Поэтому второе слагаемое – также непрерывная функция в условиях леммы. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть выполнены условия теоремы, $M > 1$ и $0 < |\lambda| \leq 2S$. Тогда

$$|K_\lambda(y)| \leq c e^{-|\lambda|^p |y b_0|} |\lambda|^{p-1}, \quad \text{где} \quad p = M^{-1},\ b_0 > 0 .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В интеграле формулы (6) сделаем замену $\xi=|\lambda|^p\tilde{\xi}$. Получим

$$K_\lambda(y)=\int\limits_{|\tilde{\xi}|\le\pi|\lambda|^{-p}}(A(|\lambda|^p\tilde{\xi})+\lambda)^{-1}e^{i|\lambda|^p\tilde{\xi}y}|\lambda|^p d\tilde{\xi}=$$

$$=|\lambda|^{p-1}\int\limits_{|\tilde{\xi}|\le\pi|\lambda|^{-p}}(A(|\lambda|^p\tilde{\xi})|\lambda|^{-1}+\omega)^{-1}e^{i|\lambda|^p y\tilde{\xi}}\,d\tilde{\xi},\quad (10)$$

где $|\omega|=1$ и $\arg\omega=\arg\lambda$. При достаточно малых $|\tilde{\xi}|<\xi_0$ и $b<b_1$, в силу оценки (3), получим

$$|A(|\lambda|^p(\tilde{\xi}+ib))|\lambda|^{-1}|\le\tilde{c}|\tilde{\xi}+ib_1|^M<1/2 .$$

Отсюда

$$|A(|\lambda|^p(\tilde{\xi}+ib))|\lambda|^{-1}+\omega|\ge 1-1/2=1/2 . \quad (11)$$

Пусть b_2 выбрано так, что при $|\tilde{\xi}|\ge\xi_0>0$ и $b<b_2$, $|\arg A(|\lambda|^p(\tilde{\xi}+ib))|\le\varphi_0$. Это можно сделать в силу леммы 4. Тогда при $|\tilde{\xi}|\le\pi|\lambda|^{-p}$ и $|\arg\lambda|<\pi-\varphi_0$, использовав оценку (7), получим

$$|A(|\lambda|^p(\tilde{\xi}+ib))|\lambda|^{-1}+\omega|\ge c(b_2,\varphi_0)(|A(|\lambda|^p(\tilde{\xi}+ib))|\lambda|^{-1}|+$$

$$+|\omega|\ge\tilde{c}(b_2,\varphi_0)(|\tilde{\xi}+ib|^M+1)\ge\tilde{c}(|\tilde{\xi}|^M+1) . \quad (12)$$

В равенстве (10) сделаем замену $\bar{\xi}=\tilde{\xi}+i(\operatorname{sign}y)b_0$, $b_0=\min(b_1,b_2)$. Воспользовавшись аналитичностью и периодичностью с периодом $2\pi|\lambda|^{-p}$ функций $A(|\lambda|^p\tilde{\xi})$ и $e^{i|\lambda|^p y\tilde{\xi}}$, получим

$$K_\lambda(y)=|\lambda|^{p-1}\int\limits_{|\tilde{\xi}|\le\pi|\lambda|^{-p}}(A(|\lambda|^p\bar{\xi})|\lambda|^{-1}+\omega)^{-1}e^{i|\lambda|^p y\bar{\xi}}\,d\tilde{\xi} . \quad (13)$$

Отсюда, использовав оценки (11) и (12), получим

$$|K_\lambda(y)|\le e^{-|\lambda|^p|yb_0|}|\lambda|^{p-1}\left(\int\limits_{|\tilde{\xi}|\le\xi_0}2d\tilde{\xi}+\int\limits_{\xi_0\le|\tilde{\xi}|\le\pi|\lambda|^{-p}}\tilde{c}(|\tilde{\xi}|^M+1)d\tilde{\xi}\right)\le$$

$$\le ce^{-|\lambda|^p|yb_0|}|\lambda|^{p-1} .$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Пусть выполнены условия теоремы, $M=1$ и $0<|\lambda|\le 2S$, тогда $|K_\lambda(y)|\le \tilde{c}|\lambda y|^{-\alpha} e^{-|\lambda||yb_0|}$, $0<\alpha<1$, $y\neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично тому, как это сделано в лемме 5, получим представление (I3) для функции $K_\lambda(y)$, которое при $M=1$ имеет вид:

$$K_\lambda(y) = \int\limits_{|\tilde{\xi}|\le\pi|\lambda|^{-1}} (A(|\lambda|\bar{\xi})|\lambda|^{-1}+ \omega)^{-1} e^{i|\lambda|y\bar{\xi}}\, d\tilde{\xi} =$$

$$= e^{-|\lambda||yb_0|} \int\limits_{|\tilde{\xi}|\le\pi|\lambda|^{-1}} e^{i|\lambda|y\tilde{\xi}} f(\tilde{\xi})d\tilde{\xi} = e^{-|\lambda||yb_0|} J,$$

где $f(\xi) = (A(|\lambda|(\xi+ i(\mathrm{sign}\,y)b_0))|\lambda|^{-1} + \omega)^{-1}$. Заметим, что в силу оценок (II) и (I2), для модуля функции $f(\xi)$ справедливо неравенство

$$|f(\xi)|\le c_1(1 + |\xi|)^{-1} \quad \text{при} \quad |\xi| \le \pi|\lambda|^{-1}. \qquad (I4)$$

В силу определения функции $A(\xi)$, функция $f(\xi)$ дифференцируема, и при $|\xi| \le \pi|\lambda|^{-1}$, аналогично неравенству (I4), получается оценка

$$|f'(\xi)|\le c_2(1+|\xi|)^{-2}. \qquad (I5)$$

Воспользовавшись результатом леммы 2, можно записать

$$|J| \le c|\lambda y|^{-\alpha} \int\limits_{-T}^{T}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{|f(\xi)-f(\xi-t)|}{t^{1+\alpha}}\, dt d\xi \le$$

$$\le c|\lambda y|^{-\alpha}\left(\int\limits_{-T}^{T}\int\limits_{0}^{T} \frac{|f(\xi) - f(\xi - t)|}{t^{1+\alpha}}\, dt d\xi + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{-T}^{T}\int\limits_{T}^{\infty} \frac{|f(\xi)-f(\xi -t)|}{t^{1+\alpha}}\, dt d\xi \right) = c|\lambda y|^{-\alpha}(I_1 + I_2),$$

где $T = \pi|\lambda|^{-1}$.

Оценим интеграл I_1. Представим его в виде суммы интегралов

$$I_1=\int_0^T t^{-\alpha-1}\int_{-T}^{T}|f(\xi)-f(\xi-t)|\,d\xi dt=\int_0^T t^{-1-\alpha}\left(\int_{-T}^{-T+t}+\int_{-T+t}^{0}+\int_0^t+\int_t^T\right)|f(\xi)-$$

$$-f(\xi-t)|\,d\xi dt=I_{11}+I_{12}+I_{13}+I_{14}.$$

Будем оценивать каждое слагаемое отдельно. Оценим I_{11}, используя периодичность функции $f(\xi)$:

$$I_{11}\le\int_0^T t^{-1-\alpha}\left(\int_{-T}^{-T+t}|f(\xi)|\,d\xi+\int_{-T}^{-T+t}|f(\xi-t)|\,d\xi\right)dt\le$$

$$\le\int_0^T t^{-1-\alpha}\left(\int_{-T}^{-T+t}c_1(1+|\xi|)^{-1}d\xi+\int_{-T-t}^{-T}|f(\xi)|\,d\xi\right)dt\le$$

$$\le\int_0^T t^{-1-\alpha}\left(\int_{-T}^{-T+t}c_1(1-\xi)^{-1}d\xi+\int_{-T-t}^{-T}|f(\xi+2T)|\,d\xi\right)dt\le$$

$$\le\int_0^T t^{-1-\alpha}(\ln(1+T)-\ln(1+T-t))\,dt+\int_0^T t^{-1-\alpha}\int_{-T-t}^{T}c_1(1+|2T+\xi|)^{-1}d\xi dt=$$

$$=2\int_0^T t^{-1-\alpha}\ln\left(1+\frac{t}{1+T-t}\right)dt\le 2\int_0^\infty t^{-1-\alpha}\ln(1+t)\,dt.$$

Итак, I_{11} ограничен величиной, не зависящей от λ.

Прежде чем оценивать интеграл I_{12}, оценим модуль подынтегральной функции $\varphi(\xi,t)=t^{-1-\alpha}|f(\xi)-f(\xi-t)|$. В области, по которой вычисляется интеграл I_{12}, $|\xi|\le T$ и $|\xi-t|\le T$. Поэтому справедливы оценки (I4) и (I5), из которых следует неравенство

$$|\varphi(\xi,t)|\le c\,\min(t^{-\alpha}(1+|\xi|)^{-2},\ \ t^{-\alpha-1}(1+|\xi|)^{-1}).$$

Отсюда при любом $0\le\rho\le 1$ выполняется

$$|\varphi(\xi,t)|\le ct^{-\alpha-\rho}(1+|\xi|)^{\rho-2}.$$

Пусть $0<\rho_1<1-\alpha<\rho_2<1$. Тогда из последнего неравенства получим, что

$$|\varphi(\xi,t)|\le c(1+|\xi|)^{\rho_2-2}\min(t^{-\alpha-\rho_1},\ t^{-\alpha-\rho_2}).$$

Теперь

$$I_{12} \le c \int_0^T \min(t^{-\alpha-\rho_1},\ t^{-\alpha-\rho_2})dt \int_{-T+t}^{0} (1+|\xi|)^{\rho_2-2} d\xi \le$$

$$\le c \int_0^\infty \min(t^{-\alpha-\rho_1},\ t^{-\alpha-\rho_2})dt \int_{-\infty}^{0} (1+|\xi|)^{\rho_2-2} d\xi .$$

Интеграл I_{12} ограничен величиной, не зависящей от λ .

Интегралы I_{13} и I_{14} оцениваются аналогично интегралам I_{11} и I_{12}. Оценим интеграл I_2 , используя периодичность $f(\xi)$:

$$I_2 = \int_T^\infty t^{-1-\alpha} \int_{-T}^{T} |f(\xi)-f(\xi-t)|\, d\xi dt \le \int_T^\infty t^{-1-\alpha} \left(\int_{-T}^{T} |f(\xi)| d\xi + \int_{-T}^{T} |f(\xi-t)| d\xi \right) dt =$$

$$= \int_T^\infty t^{-1-\alpha} \times 2 \int_{-T}^{T} |f(\xi)| d\xi dt \le 2 \int_T^\infty t^{-1-\alpha} dt \int_{-T}^{T} c_1 (1+|\xi|)^{-1} d\xi \le$$

$$\le \tilde{c} T^{-\alpha} \ln(1+T) \le k,$$

где k не зависит от λ .

Оценки интегралов I_1 и I_2 показывают, что $|J| \le c|\lambda y|^{-\alpha}$, где c не зависит ни от y , ни от λ . Лемма доказана.

Завершает доказательство теоремы следующая

ЛЕММА 7. Пусть выполнены условия теоремы, тогда при $|\arg \lambda| < \pi - \varphi_0$ справедливо неравенство $\|u\|_h \le c|\lambda|^{-1} \|f\|_h$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $A(\xi)+\lambda \ne 0$ при $|\arg\lambda| < \pi - \varphi_0$, то воспользуемся равенством (5) для оценки модуля решения уравнения (4). Получим

$$|u(x)| \le (2\pi)^{-1} \sum_{y\in R} |K_\lambda(y)| \max_{y\in R} |f(x-y)| .$$

Отсюда

$$\|u\|_h \le (2\pi)^{-1} \sum_{y\in R} |K_\lambda(y)| \|f\|_h .$$

Для завершения доказательства достаточно показать, что при $|\arg\lambda| < \pi - \varphi_0$ и $0 < |\lambda| < \infty$ справедливо неравенство

$$\sum_{y\in R} |K_\lambda(y)| \le \tilde{c} |\lambda|^{-1}. \qquad (16)$$

Действительно, при $|\lambda| \geq 2s$, воспользовавшись результатом леммы 3, получим

$$\sum_{y\in R} |K_\lambda(y)| \leq 4\pi \sum_{y\in R} e^{-|ya|} |\lambda|^{-1} \leq c_1 |\lambda|^{-1} .$$

Если $0 < |\lambda| \leq 2s$, то при $M > 1$, воспользовавшись результатом леммы 5, получим

$$\sum_{y\in R} |K_\lambda(y)| \leq c \sum_{y\in R} e^{-|\lambda|^p |yb_0|} |\lambda|^{p-1} \leq c|\lambda|^{-1} \sum_{y\in R} |\lambda|^p e^{-|\lambda|^p |yb_0|} \leq c_2 |\lambda|^{-1}.$$

Если $M = 1$, результат леммы 6 позволяет записать

$$\sum_{y\in R} |K_\lambda(y)| \leq \tilde{c} \sum_{\substack{y\in R \\ y\neq 0}} |\lambda y|^{-\alpha} e^{-|\lambda y| b_0} \leq \tilde{c}_2 |\lambda|^{-1}.$$

Таким образом, оценка (I6) установлена для произвольного порядка M. Доказаны лемма и теорема в целом.

Литература

I. СОБОЛЕВСКИЙ П.Е. О дробных степенях позитивных операторов. -Докл. АН СССР, 1966, т.166, № 6, с.1296-1299.

2. СОБОЛЕВСКИЙ П.Е. О корректной разрешимости в С-норме первой краевой задачи для эллиптических и параболических уравнений в прямоугольной области.-Тр.сем.ак.Г.И.Марчука,Новосибирск,1976,3I.

3. GRISVARD P. Equations differentielles abstractes.- Ann. Scient.Ecol.Norm.Supe,1969(1970),v.2,N 3,p.311-395.

4. СОБОЛЕВСКИЙ П.Е. Дробные степени коэрцитивно-позитивных сумм операторов. -Докл. АН СССР, 1975, т.225, №6, с.I27I-I274.

5. АЛИБЕКОВ Х.А., СОБОЛЕВСКИЙ П.Е. Об устойчивости и сходимости разностных схем высокого порядка аппроксимации для параболических уравнений. II. - Деп. ВИНИТИ, №3645-76 Деп. - 50 с.

6. СМИРНИЦКИЙ Ю.А., СОБОЛЕВСКИЙ П.Е. Коэрцитивная разрешимость разностных эллиптических уравнений. -Деп. ВИНИТИ, № 2007-78 Деп. - 3I с.

7. СМИРНИЦКИЙ Ю.А., СОБОЛЕВСКИЙ П.Е. Коэрцитивная разрешимость разностных параболических уравнений в С-норме. -Деп.ВИНИТИ, № 415I-79 Деп. - 24 с.

8. СОБОЛЕВСКИЙ П.Е. Теория полугрупп и устойчивость разностных схем. -Новосибирск, Б.И. 1976 - 38 с. - (Препринт/ВЦ СО АН СССР).

9. СОБОЛЕВСКИЙ П.Е., ХОАНГ Ван Лай. О точных оценках разностных схем,построенных с помощью тождества Г.И.Марчука.-Новосибирск, Б.и. 1977. - 17 с. (Препринт/ВЦ СО АН СССР; 43).

10. АЛИБЕКОВ Х.А., СОБОЛЕВСКИЙ П.Е. Об устойчивости разностных схем для параболических уравнений. - Докл. АН СССР, 1977, т. 232, № 4, с.737-740.

11. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ М.А. и др. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. - М.: Наука, 1966. - 499 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
26 ноября 1980 года