

УДК 621.01:518

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СПЛАИНОВ ПРИ СИНТЕЗЕ ЗАКОНОВ ДВИЖЕНИЯ

Е.А.Новгородцев, Б.М.Кунявский

Проектирование механизмов технологических машин начинается с синтеза закона движения рабочего органа, который затем реализуется точно (при помощи кулачкового механизма) или приближенно (при помощи рычажных механизмов) [1]. Закон движения рабочего органа представляет собой зависимость его перемещения от времени или угла поворота ведущего звена.

Закон движения $a(\tau)$ (где $\tau = t/T$, $t \in [0, T]$ - время, T - период движения), а также его первая $b(\tau)$ и вторая $c(\tau)$ производные называются соответственно коэффициентами пути, скорости и ускорения (см. [1]). "Качество" закона движения определяется характером функции $c(\tau)$. В частности, от ее поведения зависят динамические нагрузки и износ кинематических пар [2,3].

Закон движения рабочего органа, особенно быстроходной машины, должен быть таким, чтобы коэффициент ускорения был непрерывно дифференцируемой функцией с как можно более плавным графиком. Кроме того, закон движения должен обеспечивать выполнение ряда условий на концах интервала перемещения, которые для движения типа выстой-подъем-выстой имеют вид:

$$a(0) = 0, \quad a(1) = 1; \quad (1)$$

$$b(0) = a'(0) = 0, \quad b(1) = a'(1) = 0; \quad (2)$$

$$c(0) = a''(0) = 0, \quad c(1) = a''(1) = 0. \quad (3)$$

Во многих случаях описанные [1] законы движения не удовлетворяют конструктора, и он вынужден синтезировать их. С этой целью можно использовать представление коэффициента пути в виде многочлена высокой степени [2]. Однако при этом обычно не удовлетворяется требование плавности графика ускорения, что приводит к до-

полнительным вибрациям рабочего органа. Другой подход состоит в кусочной аппроксимации коэффициента ускорения, но в этом случае трудно добиться непрерывности его производной. Оба упомянутых подхода весьма трудоемки. Поэтому разработка универсального и нетрудоемкого метода синтеза любых законов движения является актуальной задачей.

В данной работе предлагается метод синтеза закона движения, основанный на аппроксимации коэффициента ускорения кубическим сплайном. Коэффициенты скорости и пути получаются соответственно в виде сплайнов четвертой и пятой степеней.

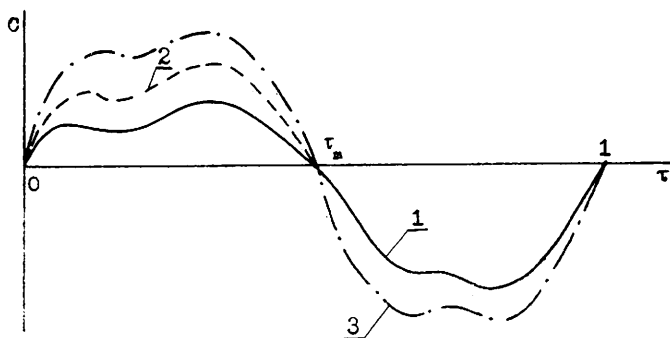


Рис. I

Коэффициент ускорения закона движения типа в́стой-подъём-в́стой имеет вид, представленный на рис. I (кривая I), и состоит из двух участков ускорений: положительного и отрицательного. Задав - шись видом графика и выбрав на отрезке $[0,1]$ $N + 1$ ($N \geq 7$) узлов интерполяции, аппроксимируем его кубическим сплайном, приняв в качестве краевых условий нулевые значения первой производной или условия типа $IU[4]$:

$$S(\tau) = \sum_{\alpha=0}^3 a_i^{\alpha} (\tau - \tau_i)^{\alpha}, \quad \tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \quad i = 0, \dots, N+1. \quad (4)$$

В число узлов интерполяции обязательно должна входить точка τ_n , разделяющая положительную и отрицательную части графика ($c(\tau_n)=0$). Однако сплайн (4) нельзя принять в качестве коэффициента ускорения, так как, вообще говоря, не будут выполняться обязательные условия (I), (2).

Условие (2) равносильно требованию равенства площадей положительного и отрицательного участков графика коэффициента ускорений [1]. Это условие можно выполнить, не изменяя характера графика, если, например, изменить масштаб положительного участка графика сплайна, т.е. построить новый сплайн:

$$S_1(\tau) = \sum_{\alpha=0}^3 b_{\alpha}^i (\tau - \tau_i)^{\alpha}, \quad \tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \quad i = 0 \dots N-1, \quad (5)$$

где

$$b_{\alpha}^i = \mu a_{\alpha}^i; \quad \mu = \begin{cases} - \int_{\tau_m}^1 S_1(\tau) d\tau / \int_0^{\tau_m} S_1(\tau) d\tau & \text{при } i < m, \\ 1 & \text{при } i \geq m. \end{cases}$$

Получаемый в результате график $S_1(\tau)$ на отрезке $[0, \tau_m]$ будет иметь вид кривой 2 (рис.1), а на отрезке $[\tau_m, 1]$ будет совпадать с графиком $S(\tau)$.

Интегрируя (5), получаем сплайн четвертой степени, удовлетворяющий условиям (2) и (3):

$$S_2(\tau) = \sum_{\alpha=1}^4 \frac{1}{\alpha} b_{\alpha}^i (\tau - \tau_i)^{\alpha} + u_i, \quad \tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \quad i = 0, \dots, N-1, \quad (6)$$

где $u_0 = 0$ и $u_i = S_2(\tau_i - 0)$, $i = 1, \dots, N-1$.

Проинтегрировав (6), получим сплайн пятой степени

$$S_3(\tau) = \sum_{\alpha=2}^5 \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} b_{\alpha}^i (\tau - \tau_i)^{\alpha} + u_i (\tau - \tau_i) + d_i, \quad (7)$$

$$\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \quad i = 0, \dots, N-1,$$

где $d_0 = 0$, и $d_i = S_3(\tau_i - 0)$, $i = 1, \dots, N-1$. Сплайн $S_3(\tau)$ еще нельзя принять за коэффициент пути, так как не выполняется второе из условий (I). Это условие будет удовлетворяться, если в качестве коэффициента пути принять

$$a(\tau) = \mu_1 S_1(\tau), \quad (8)$$

где

$$\mu_1 = 1/S_3(1). \quad (9)$$

Теперь для (8) удовлетворяются все условия (I)-(3), график коэффициента ускорения подобен графику, задаваемому конструктором (кривая 3 на рис. I), а коэффициенты скорости и ускорения выражаются сплайнами

$$b(\tau) = \mu_1 s_2(\tau), \quad c(\tau) = \mu_1 s_1(\tau). \quad (10)$$

Таким образом, алгоритм синтеза закона движения для случая выстой-подъем-выстой будет следующим:

1. Конструктором задается график коэффициента ускорения $c(\tau)$.
2. На графике выбираются узлы интерполяции, обеспечивающие заданную форму $c(\tau)$ при аппроксимации его кубическим сплайном (одним из узлов должна быть точка $\tau_{\text{м}}$ раздела положительной и отрицательной областей $c(\tau_{\text{м}}) = 0$), и строится сплайн $s(\tau)$ (4).
3. Сплайн $s(\tau)$ по формуле (5) преобразуется в сплайн $s_1(\tau)$.
4. По формулам (7), (9) строится сплайн $s_3(\tau)$ и определяется коэффициент μ_1 .
5. Коэффициенты синтезированного закона движения выражаются по формулам (8), (10) через μ_1 и сплайны $s_1(\tau)$, $s_2(\tau)$, $s_3(\tau)$.

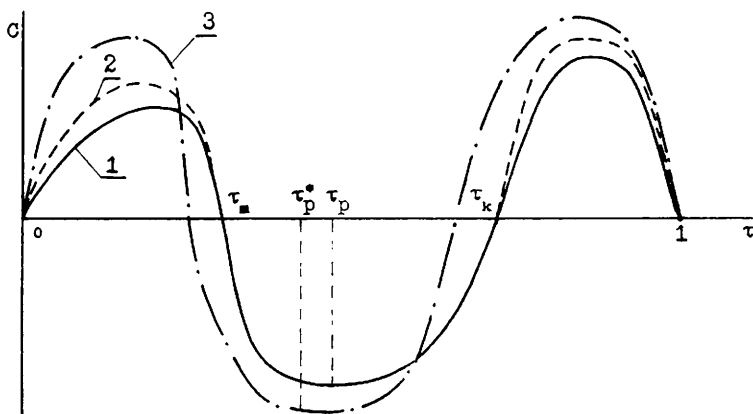


Рис. 2

Несколько отличным от изложенного будет построение закона движения типа выстой-подъем-опускание-выстой, для которого график коэффициента ускорения состоит из двух положительных и одного отрицательного участков (кривая I, рис. 2).

Для такого закона должны удовлетворяться краевые условия (2), (3), а условие (1) заменяется условием равенства нулю коэффициента перемещения в конце периода движения

$$a(0) = a(1) = 0. \quad (11)$$

Кроме того, необходимо, чтобы в некоторой точке τ_p , являющейся концом цикла подъема, перемещение рабочего органа было равно заданному, т.е.

$$a(\tau_p) = 1. \quad (12)$$

Алгоритм синтеза такого типа законов движения следующий:

1. Задается график коэффициента ускорения $s(\tau)$ (кривая I, рис.2).

2. Выбираются узлы интерполяции, в число которых должны входить точки τ_m и τ_k раздела участков положительных и отрицательных ускорений ($s(\tau_m) = 0$ и $s(\tau_k) = 0$), и точка τ_p , разделяющая периоды подъема и опускания рабочего органа. По $N+1$ узлам строится сплайн $S(\tau)$ (4).

3. Сплайн $S(\tau)$ с целью удовлетворения условий (2) преобразуется в сплайн $S_1(\tau)$ по формуле

$$S_1(\tau) = \sum_{\alpha=1}^3 b_{\alpha}^i (\tau - \tau_i)^{\alpha}, \quad \tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \quad i = 0, \dots, N-1, \quad (13)$$

где $b_{\alpha}^i = \mu \cdot a_{\alpha}^i$,

$$\mu = \begin{cases} -\int_{\tau_m}^{\tau_p} S_1(\tau) d\tau / \int_0^{\tau_m} S_1(\tau) d\tau & \text{при } i < m, \\ 1 & \text{при } m \leq i < k, \\ -\int_{\tau_p}^{\tau_k} S_1(\tau) d\tau / \int_{\tau_k}^1 S_1(\tau) d\tau & \text{при } i \geq k. \end{cases}$$

Сплайн (13) имеет график типа кривой 2 на рис. 2.

4. По формулам (6) и (7) строятся сплайны $s_2(\tau)$ и $s_3(\tau)$. Удовлетворение условия (II) достигается за счет замены переменной и введением ряда коэффициентов. Для этого из решения уравнения

$$s_3(\tau_p) \cdot \tau_p^{*2} (1 - \tau_p)^2 = [s_3(\tau_p) - s_3(1)] (1 - \tau_p^*)^2 \cdot \tau_p^2$$

определяется τ_p^* и вводятся новые сплайны

$$s_1^*(\tau) = s_1(\tau^*), \quad (14)$$

$$s_2^*(\tau) = \mu_2 \sum_{\alpha=1}^4 \frac{1}{\alpha} b_{\alpha}^1 (\tau^* - \tau_1)^{\alpha} + u_1, \quad (15)$$

$$s_3^*(\tau) = \mu_2^2 \sum_{\alpha=2}^5 \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} b_{\alpha}^1 (\tau^* - \tau_1)^{\alpha} + \mu_2 \cdot u_1 \cdot (\tau^* - \tau_1) + d_1, \quad (16)$$

где $\mu_2 = \tau_p / \tau_p^*$,

$$\tau_p^* = \begin{cases} \mu_2 \tau & \text{при } \tau \leq \tau_p, \\ 1 - (1 - \tau) / \mu_2 & \text{при } \tau > \tau_p. \end{cases}$$

5. Искомые характеристики закона движения выражаются через сплайны (I4)–(I6) и коэффициент μ_1 , позволяющий удовлетворить условию (I2): $a(\tau) = \mu_1 s_3^*(\tau)$, $b(\tau) = \mu_1 s_2^*(\tau)$; $c(\tau) = \mu_1 s_1^*(\tau)$, где $\mu_1 = 1/s^*(\tau_p^*)$.

Предлагаемая методика позволяет не только синтезировать законы движения с желаемой формой графиков ускорения, но может быть использована и при синтезе оптимальных законов.

Л и т е р а т у р а

1. АРТОВОЛЕВСКИЙ И.И., ЛЕВИТСКИЙ Н.И., ЧЕРКУДИНОВ С.А. Синтез плоских механизмов. -М.: Физматгиз, 1969. - 1084 с.
2. НОВГОРОДЦЕВ В.А., ЭПШТЕЙН Ю.В. Оптимизация полидинамических законов движения ведомого звена кулачкового механизма. -В кн.: Теория механизмов и машин. Вып. 3, 1967, с.13-25.
3. ВУЛЬФСОН И.И., КОВНЕР В.Я., ХИТРИК В.Э. Совместный учет технологических и динамических требований при синтезе законов движения батана. - Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. 1977, № 1, с.116-120.
4. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. -М.: Наука, 1980. - 350 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
12 февраля 1980 года