ОДНОРОДНЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ
(Вычислительные системы)
1981 год Выпуск 90

УДК 519.15:681.323

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ЗАДАНИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ДВУМЕРНЫХ ДИОФАНТОВЫХ СТРУКТУР ОДНОРОДНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Э.А. Монахова

Рассматривается вопрос существования и синтеза оптимальных диофантовых КАИС-структур [1-3], представляющих граф сети связи однородных вычислительных систем (ОВС). При разработке последних возникает задача оптимизации сетей связи, поскольку эффективность системы во многом определяется структурными возможностями сети связи. Оптимальная КАИС-структура [2] обеспечивает максимум показателей структурной живучести, надежности, коммутируемости и минимум средней и максимальной задержек при передаче по сети связи ОВС. Одна из первых постановок задачи синтеза для однородных структур сформулирована в [4]: при заданном диаметре и числе связей построить однородный эквицентральный граф с максимальным числом вершин. В [1,2] поставлена задача синтеза и нахождения условий существования оптимальных КАИС-структур и доказано [2], что среди всех КАИС-структур заданного порядка и числа связей оптимальная обладает минимальным диаметром и средним диаметром. Аналогичная задача рассмотрена в [5] при изучении многомодульной организации памяти.

Во всех работах, посвященных рассматриваемой проблеме, задача решалась либо методом перебора [2,6], либо с помощью эвристических алгоритмов [3-5]. Метод сокращенного перебора, предложенный в [6], имеет экспоненциальную оценку сложности и позволяет получить точные решения для графов с числом вершин не более 500, а эвристические алгоритмы дают решения в частных случаях и лишь в какой-то мере близкие к оптимальным.

В настоящей работе дается аналитическое решение рассматриваемой проблемы для оптимальных диофантовых КАИС-структур размерности два. Полученное решение является обобщением теоремы 5, доказанной в [6].

I. Диофантова КАИС-структура ОВС, или D_n-граф, определяется [3] следующим образом.

Пусть N вершин графа перенумерованы числами от 0 до $(N-1)$ и пусть задан набор n натуральных чисел $\{s_k\}$, $s_k < s_{k+1} < N$, $k=\overline{0,n-1}$. Для каждой вершины $i=\overline{0,N-1}$ дуга с отметкой s_k соединяет вершины i и j графа, если и только если $j-i \equiv s_k \pmod N$, $k=\overline{0,n-1}$. Назовем N порядком D_n-графа, n - его размерностью, $S=\{s_0,\dots,s_{n-1}\}$ - множеством отметок (образующих). За направление дуги с отметкой s_k на графе возьмем направление от i к j. Параметрическое описание вида $\{N;S\}=\{N;s_0,s_1,\dots,s_{n-1}\}$ задает и полностью определяет D_n-граф с множеством образующих S и с числом вершин N.

Пусть d - диаметр D_n-графа; $L_{n,i}$ - число его вершин, находящихся на расстоянии i от любой выделенной; $\bar{d}$ - средний диаметр, равный $(\sum_{i=0}^{d} iL_{n,i})/N$; $K_{n,i}$ - число вершин, находящихся на расстоянии не более i от любой выделенной. В [2,5] введены функции $L^*_{n,i}$ и $K^*_{n,i}$, которые являются верхними оценками для $L_{n,i}$ и $K_{n,i}$ и подчиняются соотношениям:

$$L^*_{n,i}=L^*_{n-1,i}+2\sum_{j=0}^{i-1}L^*_{n-1,j}, \qquad K^*_{n,i}=\sum_{j=0}^{i}L^*_{n,j}.$$

Для $n=2$ имеем $L^*_{2,i}=4i$, $K^*_{2,i}=2i^2+2i+1$. Числам $L^*_{n,i}$ и $K^*_{n,i}$ дадим следующую геометрическую интерпретацию.

Рассмотрим случай $n=2$. Зададим на плоскости Евклида прямоугольную систему координат (x,y). Разделим плоскость на единичные квадраты так, чтобы центры квадратов имели целочисленные координаты, а стороны были параллельны осям координат. Зафиксируем в качестве начала квадрат с центром в точке $(0,0)$ и будем называть его нулевым ярусом. Все квадраты, которые имеют по крайней мере одну общую сторону с квадратом, составляющим нулевой ярус, образуют первый ярус. Все квадраты, имеющие с квадратами из первого яруса по крайней мере одну общую сторону, образуют второй ярус и т.д. (см. рис.I). Число в квадрате на рис.I указывает, какому ярусу принадлежит квадрат. Тогда $L^*_{2,i}$ есть число квадратов, принадлежащих i-у ярусу, а $K^*_{2,i}$ - число квадратов, принадлежащих всем ярусам от нулевого до i-го включительно. Множество квадратов с координатами (x, y), удовлетворяющими неравенству $\Sigma(|x|+|y|) \leq$ $\leq d$, в дальнейшем будем называть ромбом и обозначать $Rh(d)$.

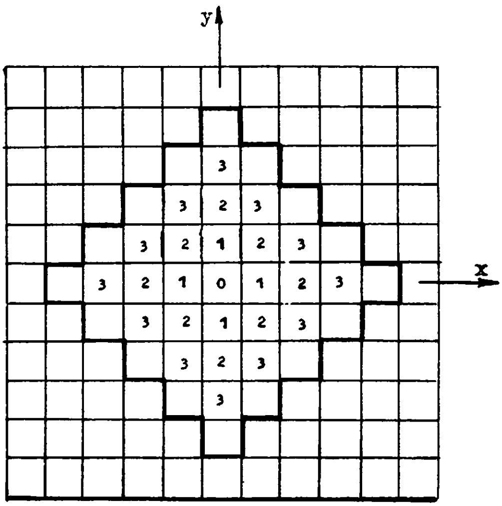


Рис. I

Обобщение данной интерпретации в евклидовом пространстве размерности $n>2$ очевидно.

Полученную геометрическую картину будем использовать в качестве модели D_2-графа $\{N;\ s_0, s_1\}$, поставив в соответствие его вершинам квадраты, а дугам - общие стороны квадратов. Нумерацию вершин проводим следующим образом: в квадрат с координатами (x, y) записываем номер m, определяемый из соотношения $s_0 x + s_1 y \equiv m (\mathrm{mod}\ N)$. На такой картине изображены не все дуги D_2-графа, а именно: не изображены (для упрощения) те дуги, которые соответствуют сторонам квадратов, принадлежащим внешнему контуру геометрической модели.

Предельным [6] D_n-графом называется граф, который имеет на всех ярусах, кроме последнего d-го, максимально возможное число вершин $L^*_{n,i}$ $(i=\overline{0,d-1})$, а на последнем ярусе - $(N-K^*_{n,d-1})$ вершин.

Предельный D_n-граф обладает минимально возможными диаметром и средним диаметром [2,6] в классе всех D_n-графов порядка N. Таким образом, предельный D_n-граф является оптимальным, и задача синтеза оптимальных структур сводится к синтезу предельных. Но не для всех значений N и n предельные D_n-графы существуют [6].

2. Дальнейшее исследование посвящено предельным D_n-графам размерности 2.

Вопрос об аналитическом синтезе оптимальных параметрических описаний диофантовых двумерных структур ОВС решает следующая

ТЕОРЕМА. Пусть k и N - натуральные числа и

$$2k^2-1 \le N \le 2k^2+4k+3 . \qquad (1)$$

Тогда предельный D_2-граф порядка N существует и имеет параметрическое описание вида $\{N;\ k,k+1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (I) перепишем в виде $2k^2+2k+1-2(k+1) \le N \le 2k^2+2k+1+2(k+1)$ или

$$N^*-2(k+1) \le N \le N^*+2(k+1), \qquad (2)$$

где $N^*=2k^2+2k+1$.

Известно [6], что предельный D_2-граф порядка N^* существует и имеет описание вида $\{N^*;\ 1,2k+1\}$. Заметим, что k и N^* взаимнопросты, и, умножая образующие I и $2k+1$ на k, перейдем к эквивалентному [6] описанию $\{N^*;\ k,k+1\}$: $k \cdot 1 = k$, $k(2k+1)=2k^2+k >]\frac{N^*}{2}[$, $N^*-(2k^2+k)=k+1$, ($]x[$ - целая часть x). Таким образом, для $N=N^*$ существует предельное описание $\{N^*;\ k,k+1\}$.

Обратимся к геометрической модели D_2-графа. Все множество вершин предельного D_2-графа порядка N^* должно полностью заполнить ромб $Rh(k)$ с числом клеток N^*, диагонали которого содержат по $2k+1$ клеток. Определим теперь такую процедуру нумерации всех клеток ромба, которая позволит получить на ромбе предельный D_2-граф $\{N;\ k,k+1\}$.

Нумерация заключается в присвоении всем клеткам ромба, выбираемым в определенном ниже рекурсивном порядке, очередного номера из множества $(0,I,\ldots,N^*-1)$. Пусть i принимает значения из последовательности $I=\{0,1,\ldots,k,-k,-k+1,\ldots,0\}$.

Для очередного i клетки ромба, центры которых лежат на прямой $y=-x+i$, выбираются в порядке увеличения координаты y в следующих пределах:

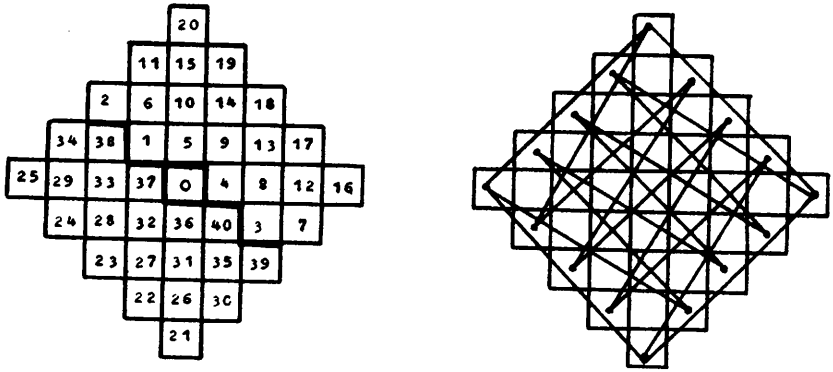
при $i=0$ (первый раз) $0 \le y \le]\frac{k}{2}[$;

при $i \ne 0$ $]\frac{i-k}{2}[\le y \le]\frac{i+k}{2}[$;

при $i=0$ (второй раз) $]-\frac{k}{2}[\le y \le -1$.

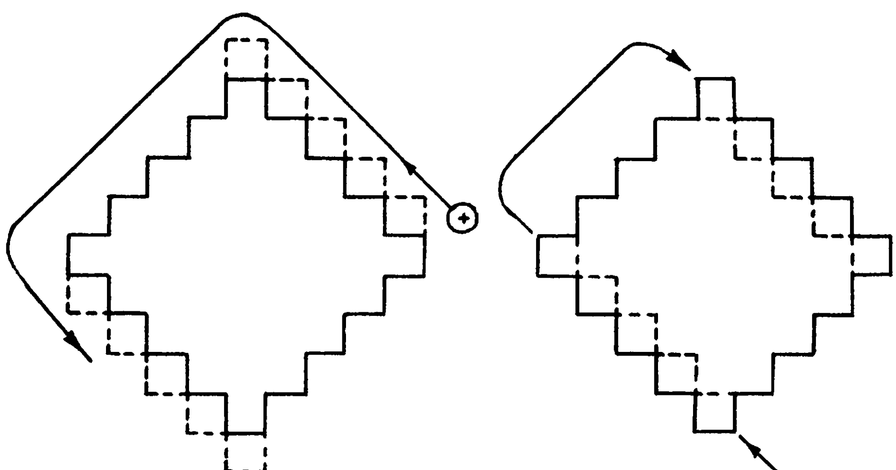
Переходим к $i+1$.

Нумерация заканчивается на клетке с координатами $(I,-I)$, которая получает номер (N^*-1).



а) б)

Рис. 2



а) б)

Рис. 3

Заметим, что две последовательно выбираемые прямые содержат либо k , либо $k+1$ клеток. Поэтому номер любой клетки с координатами (x,y) отличается от номера клетки с координатами $(x+1,y)$ на k , а от номера клетки с координатами $(x,y+1)$ – на $(k+1)$ по mod N^*. На рис.2,а приведен пример нумерации ромба Rh(4) с N^* = = 41. Теперь, чтобы получить на перенумерованном ромбе D_2-граф $\{N^*;\ k,k+1\}$, достаточно связать между собой образующими k и $k+1$ клетки последнего яруса. На рис.2,б показаны эти связи для Rh(4) с N^* = 41. Данная структура связей переносится на случай произвольного Rh(k). Таким образом, описанная процедура нумерации задает на ромбе предельный D_2-граф $\{N^*;\ k,k+1\}$.

Из ромба Rh(k) (на рис.3 обозначен сплошной линией), изменяя число клеток на единицу, будем получать новые предельные конфигурации: путем наращивания (рис.3,а) и сокращения (рис.3,б) клеток. Пунктирными линиями показаны клетки, наращиваемые (рис. 3,а) и сокращаемые (рис.3,б). Порядок наращивания и сокращения клеток указывается стрелками. Всего, таким образом, можно получить $4(k+1)$ новых предельных конфигураций с числом клеток, меняющимся в диапазоне неравенства (2).

Обобщим процедуру нумерации ромба Rh(k) на все множество полученных предельных конфигураций. А именно в случае наращивания появившиеся $N - N^*$ клеток нумеруем в описанном порядке сразу после нумерации клетки с координатами $(0,\ k)$, а в случае сокращения клеток из нумерации исключаем $N^* - N$ клеток. Как и в Rh(k), номера любых соседних клеток отличаются либо на k, либо на $(k+1)$ по mod N.

Остается показать, что всегда можно связать между собой образующими k или $(k+1)$ клетки, имеющие, по крайней мере, одну сторону, принадлежащую внешнему контуру конфигурации. Пусть $N^* < N \le N^* + k+1 = 2k^2 + 3k + 2$. Обозначим число клеток на последнем ярусе через i $(i = \overline{1,\ k+1})$. Тогда $N = 2k^2 + 2k + 1 + i$. Возьмем клетку с номером $j = k^2 + k + i$. Покажем, что ее можно связать образующими k и $k+1$ с клетками $k^2 + 2k + i$ и $k^2 + 2k + i + 1$. Действительно, $(j+k)$ mod $N = j+k = k^2 + 2k + i$ и $(j+k+1)$ mod $N = k^2 + 2k + i + 1$. А это клетки с координатами $(-k+1, -1)$ и $(-k,\ 0)$. Для всех клеток с номерами, принадлежащими множеству $k^2 + k + 1, \ldots, k^2 + k + i - 1$, связи по образующим k и $k+1$ получаются аналогично (см.рис.4). Связи по образующим k и $k+1$ для клеток с номерами, принадлежащими множеству $k^2 + i, \ldots, k^2 + k$, также изображены на рис.4. Для остальных клеток со сторонами, принадлежащими внешнему контуру, структура связей такая же, как и на Rh(k) (см. рис. 2,б). Случаи, когда $N^* + k + 1 < N \le N^* + 2(k+1)$, $N^* - (k+1) \le N < N^*$, $N^* - 2(k+1) \le N < N^* - (k+1)$, рассматриваются аналогично.

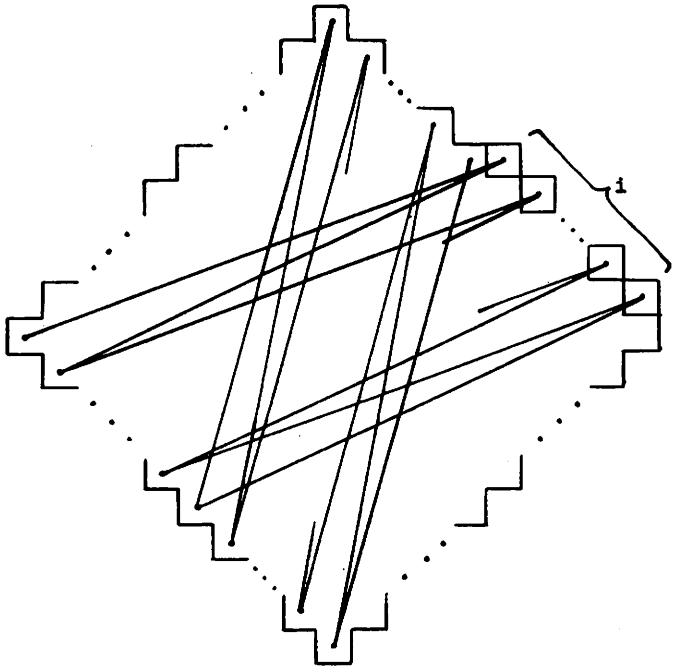


Рис. 4

Таким образом, данная нумерация задает предельный D_2-граф с образующими k и k+1 на каждой предельной конфигурации с числом вершин N из неравенства (2). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ I. Для любого натурального N предельный D_2-граф порядка N существует и имеет параметрическое описание вида $\{N;\ k, k+1\}$, где

$$k = [(\sqrt{2N-1} - 1)/2] \tag{3}$$

($[x]$ - ближайшее целое x).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим для данного натурального N по формуле (3) значение k и найдем, для каких еще натуральных чисел из этой формулы получается то же самое k. Для этого выражение (3) представим в другой, эквивалентной ему форме:

$$k-\frac{1}{2}\le(\sqrt{2N-1}-1)/2<k+\frac{1}{2}.$$

Преобразуя данное неравенство и учитывая, что N может принимать только натуральные значения, получаем $2k^2+1\le N\le 2k^2+4k+2$, т.е. множество тех значений N, для которых из формулы (3) получается одно и то же k. Но $2k^2-1<2k^2+1\le N\le 2k^2+4k+2<2k^2+4k+3$, и, по теореме, предельный D_2-граф порядка N существует и имеет параметрическое описание вида $\{N;\ k,k+1\}$. Что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любого натурального N диаметр предельного D_2-графа порядка N определяется по формуле $d=\lceil(\sqrt{2N-1}-1)/2\rceil$, где $\lceil x\rceil$ - ближайшее целое, не меньшее x.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из того, что для $N=2(d-1)^2+2(d-1)+1$ диаметр предельной структуры равен $d-1$, а для всех $2(d-1)^2+2(d-1)+1<N\le 2d^2+2d+1$ он равен d. Из квадратного уравнения $2d^2+2d+1=N$ получаем значение d.

СЛЕДСТВИЕ 3. Предельные D_2-графы с порядками $N=2k^2-1;\ 2k^2;\ 2k^2+1$, кроме описания вида $\{N;\ k,k+1\}$, имеют также описания вида $\{N;\ k-1,k\}$, а с порядками $N=2k^2+4k+1;\ 2k^2+4k+2;\ 2k^2+4k+3$ - описания вида $\{N;\ k+1,k+2\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из возможности представления каждого из названных порядков через $(k-1)$ для первых 3-х порядков или через $(k+1)$ для вторых 3-х порядков. Например, $N=2k^2-1=2(k-1)^2+4(k-1)+1$.

Из того факта, что D_n-графы образуют подкласс КАИС-структур, вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4. Для любого натурального N существует предельная КАИС-структура, обладающая циклической группой автоморфизмов с определяющими соотношениями $\{a,b,a^k=1,\ b^{k+1}=1,\ ab=ba\}$, где k определяется по формуле (3).

Применяя эквивалентные преобразования к описанию вида $\{N;\ k,k+1\}$, можно получить множество эквивалентных предельных описаний данного графа.

Обратим внимание на два интересных обстоятельства, следующих из доказательства теоремы.

Во-первых, если рассматривать натуральные числа как порядки D_2-графов, то весь натуральный ряд оказывается разбит на участки одинакового предельного параметрического описания $\{k,k+1\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Длина этих участков увеличивается с ростом k.

Во-вторых, у предельных D_2-графов $\{N;\ k,k+1\}$ при переходе от N к $N+1$ на отрезке $[2k^2+2k+1, 2(k+1)^2+1]$ сохраняется нумерация (адресация) вершин с нулевой по (k^2+k)-ю (см.рис.2,а); а на отрезке $[2k^2-1,\ 2k^2+2k+1]$ - номера (адреса) вершин с нулевой по (k^2-1)-ю. Указанное свойство потребуется нам в дальнейшем при рассмотрении адресации, наращиваемости и реконфигурации таких структур.

3. Способность системы к сохранению структуры связей при наращивании числа элементов, или гибкость связей [7], - одна из основных характеристик архитектуры системы. В работе [8] возможность наращивания числа вершин без коренной ломки уже имеющихся межмашинных соединений является одним из основных критериев выбора класса $\Lambda(n,v,g)$-графов в качестве структур ОВС. Для D_2-графов оказывается возможным сохранение свойства оптимальности при наращивании числа вершин ценой минимальной перестройки структуры связей.

УТВЕРЖДЕНИЕ. В ОВС с двумерной диофантовой структурой, заданной описанием вида $\{N;\ k,k+1\}$, где k определяется из выражения (3), для сохранения оптимальности, при наращивании числа машин на единицу в пределах участка данного описания, достаточно:

1) увеличить на единицу адреса машин с i-й по $(N-1)$-ю и присвоить новой машине адрес i; номер i определяется следующим образом:

$$i = N-k^2+1 \text{ при } 2k^2-1 \le N \le 2k^2+k,$$

$$i = k^2+k+1 \text{ при } 2k^2+k \le N \le 2k^2+2k+1,$$

$$i = N-k^2-k \text{ при } 2k^2+2k+1 \le N \le 2k^2+3k+2,$$

$$i = k^2+2k+2 \text{ при } 2k^2+3k+2 \le N \le 2k^2+4k+3;$$

2) перестроить программно (изменить номера направлений связи без перестройки аппаратуры) k связей;

3) перестроить аппаратно (пересоединить каналы связи) k+1 связей.

Таблица

N	R	P
$2k^2-1$	4k-2	2k-3
$2k^2$ … $2k^2+k-1$	4k-1	2k-2
$2k^2+k$	4k	2k-1
$2k^2+k+1$ … $2k^2+2k$	4k+1	2k
$2k^2+2k+1$ … $2k^2+3k+1$	4k+2	2k+1
$2k^2+3k+2$ … $2k^2+4k+2$	4k+3	2k+2

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Используя замечание о сохранении адресации вершин, находим соотношение между i (адресом той машины, с которой начинается переадресация) и N. Ясно, что после выполнения шага I все внутренние связи, имеющиеся на конфигурации, сохраняются и перестройка коснется только связей между крайними вершинами конфигурации, а общее число связей крайних вершин между собой (обозначим R) равно числу ребер контура конфигурации, деленному на 2. Оно складывается из числа P связей, которые не меняются при наращивании числа машин, и числа связей, которые изменяются. Из геометрических соображений нетрудно определить R и P для всевозможных значений N (см. таблицу).

Как легко видеть, число связей, которые требуется изменить, равно 2k+1 для всех значений N, из них k связей изменяют номера (имя образующей), а k+1 связей пересоединяются.

Отношение числа изменяемых аппаратно связей к общему числу связей D_2-графа равно $(k+1)/2N$ и не превосходит величины $(k+1)/(2k^2-1)$. При $N \to \infty$ данное отношение стремится к нулю, как $1/\sqrt{N}$.

З а к л ю ч е н и е

В настоящей работе решен положительно вопрос о существовании предельных КАИС-структур размерности два, поставленный [2] в общем виде в качестве гипотезы: для любых значений N и n предельные КАИС-структуры существуют.

Для ОВС с двумерной оптимальной диофантовой структурой получены аналитические формулы вычисления диаметра и параметрического описания структуры для любого, сколь угодно большого числа элементарных машин. Предложен простой алгоритм перестройки структуры при наращивании числа машин в ОВС с двумерной диофантовой струк - турой, сохраняющий свойство оптимальности и параметрическое опи - сание структуры ОВС. Дана оценка необходимо изменяемого при этом числа связей.

Л и т е р а т у р а

1. ВОРОБЬЕВ В.А., КОРНЕЕВ В.В. Некоторые вопросы теории структур однородных вычислительных систем. -В кн.: Вопросы теории и построения вычислительных систем (Вычислительные системы, вып. 60). Новосибирск, 1974, с.3-16.

2. КОРНЕЕВ В.В. О макроструктуре однородных вычислительных систем. - Там же, с. 17-34.

3. ВОРОБЬЕВ В.А. Простейшие структуры однородных вычислительных систем. - Там же, с. 35-49.

4. АРТАМОНОВ Г.Т. Об одном способе построения однородных эквицентральных сетей. -Техническая кибернетика, 1970, №6, с.109-114.

5. WONG C.K., Don COPPERSMITH. A combinatorial problem related to multimodule memory organization. - J.Assoc.Comput.Machinery,1974,v.21,N 3,p.392-402.

6. МОНАХОВА Э.А. Синтез оптимальных диофантовых структур. -В кн.: Вопросы теории и построения вычислительных систем (Вычисли - тельные системы, вып. 80).Новосибирск, 1979, с.18-35.

7. ANDERSON G.A.,JENSEN E.D. Computer interconnection structures: taxonomy, characteristics and examples. - Acm. Computing Surveys,1975,v.7,N 4,p.197-213.

8. КОРНЕЕВ В.В., МОНАХОВ О.Г. Графы межмашинных связей однородных вычислительных систем. - Изв. АН СССР. Тех. кибернетика, 1980, № 2, с.195-201.

Поступила в ред.-изд.отд.
9 марта 1981 года