МЕТОДЫ ОБНАРУЖЕНИЯ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ЭВМ
(Вычислительные системы)
1981 год Выпуск 91

УДК 519.1

АНАЛИЗ МЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ГРАФОВ

В.А.Скоробогатов, П.В. Хворостов

Для достаточно больших графов нахождение метрических характеристик, например, при анализе структурной информации,без применения ЭВМ становится невозможным, а применение ЭВМ сложно,если не пользоваться некоторой единой методикой. Основой для ее построения может быть нахождение матриц слоев графов [1]. С этой целью исследуются некоторые свойства графов, к важнейшим из которых относится равенство матриц слоев, устанавливающее,какие графы имеют одни и те же метрические характеристики. Свойство изометричности графов [8] позволяет определить класс графов с одинаковыми 1-спектральными характеристиками.

Пусть $G(V,X)$ - конечный связный неограф без петель и кратных ребер; $V(G)$ - множество вершин, $X(G)$ - множество ребер, $|V| = p$, $|X| = q$. Под расстоянием $d(u,v)$ между вершинами $u, v \in V$ понимается длина кратчайшей простой (u,v)-цепи в графе G [5]. Функция $d(u,v)$ удовлетворяет аксиомам метрики, поэтому все характеристики, связанные с расстояниями в графе, назовем метрическими. Среди них можно выделить два класса - "эксцентриситетные" и "дистанционные" характеристики.

I. Эксцентриситетные характеристики. Данный класс характеристик основан на понятии эксцентриситета вершины графа (см. табл. I).

Перечисленные характеристики позволяют рассматривать особые множества элементов графа. В отличие от характеристик их можно называть конструкциями.

Центр графа [5] - множество вершин $\{v\}$ таких, что $e(v)=r(G)$. Периферия графа - множество вершин $\{v\}$ таких, что $e(v) = d(G)$.

Т а б л и ц а I

№	Обозначение	Наименование	Выражение для вычисления
1	$e(v)$	Эксцентриситет вершины [5]	$e(v) = \max\limits_{u \in V} d(u,v)$
2	$r(G)$	Радиус графа [5]	$r(G) = \min\limits_{v \in V} e(v)$
3	$d(G)$	Диаметр графа [5]	$d(G) = \max\limits_{v \in V} e(v)$
4	$e(G)$	Эксцентриситет графа	$e(G) = \sum\limits_{v \in V} e(v)$
5	$e_{ср.}(G)$	Средний эксцентриситет вершин в графе	$e_{ср.}(G) = \frac{1}{p}\, e(G)$
6	$\Delta e(v)$ $\bar{\Delta} e(v)$	Эксцентричность вершины	$\Delta e(v) = \lvert e(v) - e_{ср.} \rvert$ $\bar{\Delta} e(v) = e(v) - e_{ср.}$
7	ΔG	Эксцентричность графа	$\Delta G = \frac{1}{p} \sum\limits_{v \in V} \Delta e(v)$

2. Д и с т а н ц и о н н ы е   х а р а к т е р и с т и к и. Этот класс характеристик непосредственно связан с дистанциями вершин графа (табл.2).

Характеристики 7-I2 могут применяться для оценки степени однородности графа по дистанционным свойствам. В некоторых случаях вместо характеристик I-4 удобнее использовать I3-I6.

По данному классу характеристик можно выделить следующие конструкции: середина графа - множество вершин $\{v\}$ таких, что $D(v) = D^*(G)$; центр тяжести графа - множество вершин $\{v\}$ таких, что $m_2(v) = m_2^*(G)$.

3. С в о й с т в а   д и с т а н ц и й. Приведем некоторые сведения о дистанциях из [2]. Пусть $G(V, X)$ - связный граф, $|V| = p$, $|X| = q$, тогда

Таблица 2

№	Обозначение	Наименование	Выражение для вычисления
1	$D(v)$	Дистанция вершины [2] (центральность [4])	$D(v) = \begin{cases} \sum_{u \in V} d(v,u) & \text{- граф связный;} \\ \infty & \text{- несвязный.} \end{cases}$
2	$D(G)$	Дистанция графа [2] (интеграция [4])	$D(G) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{v \in V} D(v) & \text{- граф связный;} \\ \infty & \text{- несвязный.} \end{cases}$
3	$D^*(G)$	Минимальная дистанция (униполярность [4])	$D^*(G) = \min_{v \in V} D(v)$
4	$\Delta D^*(v)$	Дистанционное отклонение вершины от минимума	$\Delta D^*(v) = D(v) - D^*$
5	$var(G)$	Вариация графа [2]	$var(G) = \max_{v \in V} \Delta D^*(v)$
6	ΔG^*	Дистанционное отклонение графа (централизация [4])	$\Delta G^* = \sum_{v \in V} \Delta D^*(v) = 2D(G) - pD^*$
7	$D_{cp.}(G)$	Средняя дистанция вершин	$D_{cp.}(G) = \frac{2D(G)}{p}$
8	$\Delta D(v)$ $\bar{\Delta} D(v)$	Дистанционное отклонение вершины от среднего	$\Delta D(v) = \lvert D(v) - D_{cp.}\rvert$ $\bar{\Delta} D(v) = D(v) - D_{cp.}$
9	$\Delta D(G)$	Среднее дистанционное отклонение графа	$\Delta D(G) = \frac{1}{p} \sum_{v \in V} \Delta D(v)$
10	$m_1(v)$	Среднее отклонение вершины графа [14]	$m_1(v) = \frac{D(v)}{p}$
11	$m_2(v)$	Среднеквадратичное отклонение вершины графа [14]	$m_2(v) = \frac{1}{p} \sum_{u \in V} [d(v,u)]^2$
12	$m_2^*(G)$	Дисперсия графа [14]	$m_2^*(G) = \min_{v \in V} m_2(v)$
13	$D^{-1}(v)$	Обратная дистанция вершины	$D^{-1}(v) = \frac{1}{D(v)}$
14	$D^{-1}(G)$	Обратная дистанция графа	$D^{-1}(G) = \frac{1}{D(G)}$
15	$D^{*-1}(G)$	Обратная наименьшая дистанция	$D^{*-1}(G) = \max_{v \in V} D^{-1}(v)$
16	$L(G)$	Обратная централизация	$L(G) = \sum_{v \in V} (D^{*-1} - D^{-1}(v)) = pD^{*-1} - 2D^{-1}(G)$
17	$\mu(G)$	Компактность графа [3]	$\mu(G) = \frac{1}{\binom{p}{2}} \sum_{u,v \in V} d(v\ u) = \frac{4}{p(p-1)} D(G)$

1) $p(p-1) \le D(G) + q \le \frac{1}{6}(p^3 + 5p - 6)$,

2) $p-1 \le D(v) \le \frac{1}{2}(p-1)(p+2) - q$,

равенство может быть достигнуто для всех q.

3) $2p - \deg v - 2 \le D(v) \le \frac{1}{2}(p-1)(p+2) - q$ ($\deg v$ - степень вершины v).

Для любых графов также справедливы следующие свойства:

4) $D(G) \le D(v) + D(G \setminus v)$, где $G \setminus v$ - граф, получаемый из G удалением вершины v и инцидентных ей ребер.

5) $D(G) + D(\bar{G}) \ge \frac{3}{2} p(p-1)$, и эта оценка наилучшая для $p \ge 5$ ($\bar{G}$ - дополнение G).

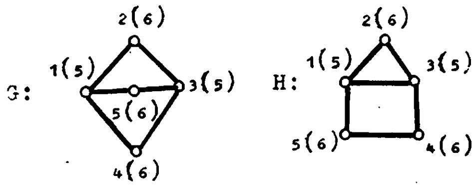


Рис. I

Дистанции не определяют граф однозначно - у графов G и H (рис. I) по две вершины с дистанцией 5 и по три вершины с дистанцией 6, но они, очевидно, неизоморфны.

Для связных графов в терминах дистанций можно сформулировать необходимое и достаточное условие того, что ребро является мостом, и достаточное условие гамильтоновости:

I) Ребро $x \in X(G)$ является мостом тогда и только тогда, когда каждая вершина в G имеет меньшую дистанцию, чем в $G \setminus x$.

2) Граф гамильтонов, если для всякой вершины v $D(v) \le$ $\le [\frac{1}{2}(3p-4)]$.

Для деревьев можно выделить дополнительные свойства.

I. Если v - вершина связного графа G, то G содержит покрывающее дерево T такое, что $D(v)$ в G совпадает с $D(v)$ в T.

2. Среди связных p-вершинных графов деревья имеют наименьшую вариацию.

3. Если $v_0, v_1, \ldots, v_k$ - путь в дереве T и v_0 имеет наименьшую дистанцию среди всех вершин T, то

$$D(v_1) < D(v_2) < \ldots < D(v_k).$$

4. В дереве существует ровно одна вершина с наименьшей дистанцией либо две таких вершины, и они смежны.

5. Вершина с наибольшей дистанцией в дереве является висячей.

6. Дистанция висячей вершины в дереве T не может быть наименьшей, если $T \neq K_1$ или K_2.

4. Свойства компактности. Приведем оценки из [3], сделанные для средней дистанции графа, отличающейся от компактности графа лишь коэффициентом 1/2. Пусть G – связный p-вершинный граф, тогда $2 \le \mu(G) \le \frac{2}{3}(p+1)$. Нижняя оценка достигается на полных графах, а верхняя – на графах, являющихся простым путем.

В [3] доказано, что оценка $\mu(G) \le 2d(G)$ является наилучшей для произвольных графов и может быть усилена до $\mu(T) < 2d(T)-1$ только для деревьев с нечетным диаметром.

5. Функция сложности. В [9] вводится характеристика графа G – функция его сложности

$$\xi(G) = \frac{pq}{p+q} \sum_{\substack{i,j \\ i<j}} \gamma(i,j),$$

где p – число вершин графа, q – число ребер, $\gamma(i,j)$ – число различных простых путей из вершины с номером i в вершину с номером j. Указывается, что $\xi(G)$ обладает следующими свойствами: монотонно возрастает с числом как вершин, так и ребер графа; отражает степень связности графа; соответствует интуитивному понятию сложности, сопоставляя большие числа графам, которые "выглядят" сложно, и наоборот.

Утверждается, что этим свойствам не удовлетворяют известные меры сложности [10-12], которые относятся к информационному содержанию и базируются на некоторых инвариантных разбиениях множества вершин.

Показано, что самым сложным p-вершинным графом является K_p:

$$\xi(K_p) = \frac{p^2(p-1)}{2(p+1)}(p-2)! \sum_{r=0}^{p-2} \frac{1}{(p-r-2)!},$$

а самым простым – p-вершинное дерево T_p.

$$\xi(T_p) = \frac{p^2(p-1)}{2(2p-1)}.$$

ПРИМЕР 2. **Вычисление функции сложности графа** G **представлено на рис. 2:**

Таблица I

i	j	$\gamma(i,j)$
I	2	I
I	3	3
I	4	3
I	5	3
2	3	3
2	4	3
2	5	3
3	4	3
3	5	3
4	5	3
		$\Sigma = 28$

$$\xi(G) = \frac{pq}{p+q} \sum_{\substack{i,j \\ i<j}} \gamma(i,j) = \frac{5\cdot 6}{5+6} 28 \approx 76.3 .$$

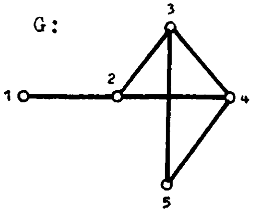


Рис.2

6. Относительные разбиения. Под относительным разбиением $V(G)$ в [I] понимается разбиение $\hat{V}(G)$ по отношению к любым фиксированным подмножествам элементов графа. Такими элементами могут быть вершины, ребра или пустое множество, в случае топологических графов в качестве элемента может рассматриваться грань. В качестве подмножеств элементов, таким образом, могут быть выбраны множества вершин, множества ребер, множества n-ок вершин или ребер и т.д. Приведем определение для случая вершин.

Относительным разбиением множества вершин для $u \in V$ называется упорядоченное множество классов $V_j(u)$ такое, что $\hat{V}(u) = \{V_j(u) \mid j = \overline{0,k(u)}, v \in V_j \Leftrightarrow d(v,u) = j\}$ класс $V_j(u)$ называется j-слоем для u*).

Пусть $v \in V_j(u)$, тогда $V_j(u)$ обозначим через $V_v(u)$ и назовем его собственным слоем вершины v, а слои, у которых номера на единицу больше или меньше j, смежными справа или слева, если в них имеется хотя бы одна вершина, смежная v. Очевидно, что для любой вершины $v \neq u$ всегда имеется непустой левый смежный слой.

---

*) Иногда под слоем понимается порожденный подграф $G_j = \langle V_j \rangle$.

Можно говорить о смежных левых и правых слоях для некоторого слоя $V_j(u)$, в этом случае достаточно, чтобы хотя бы для одной вершины из $V_j(u)$ в смежных слоях существовала вершина, смежная ей справа или слева.

Относительные разбиения порождают разбиения степеней вершин. Пусть d_v – степень вершины v, тогда $d_v = d_v^L(u) + d_v^S(u) + d_v^R(u)$, где $d_v^L(u)$, $d_v^S(u)$, $d_v^R(u)$ – соответственно левая, собственная и правая степени вершины v в разбиении $\hat{V}(u)$, которые соответственно равны числу смежных с v вершин из левого смежного, собственного и правого смежного слоев. Очевидно, что левая степень любой вершины в относительном разбиении не равна нулю. Собственная степень может быть равной нулю, когда данная вершина не принадлежит нечетному циклу, ребро которого содержится в данном слое. Если в некотором одновершинном относительном разбиении у всех вершин нулевые собственные степени, то граф – двудольный [I].

Вершина v в некотором слое V_j, $j \neq k$, с нулевой правой степенью называется тупиковой, множество всех таких вершин – тупиковым множеством данного разбиения, а объединения всех тупиковых множеств всех одновершинных разбиений – тупиковым множеством графа [I].

Подграф $\langle W_{i,k}(V_0) \rangle$, $V_0 \subset V$, порожденный множеством $W_{i,k}(V_0)$, где $W_{i,k}(V_0) = \bigcup\limits_{j=0}^{k} V_{i+j}(V_0)$, назовем k-слойным поясом или k-п о я с о м. При $k = 0$ получаем 0-п о я с: $\langle W_{i,0}(V_0)\rangle = \langle V_i(V_0)\rangle = G_i(V_0)$ или i-слой. При $k = I$ получаем I пояс: $\langle W_{i,1}(V_0)\rangle = \langle V_i(V_0) \cup V_{i+1}(V_0) \rangle$. Заметим, что граф $\langle V_i(V_0) \cup V_{i+2}(V_0) \rangle$ поясом не является.

При $i = e(v)$, $k = 0$ пояс $G_{e(v)} = \langle W_{e(v),0}(v)\rangle$ назовем оболочкой графа по отношению к вершине v. Если $k = \max\limits_{v \in V} \{e(v)\} = d(G)$, то G_d – диаметральная оболочка графа. Аналогично можно определить радиальную оболочку G_r.

Интересные сведения о графе могут быть получены путем изучения его "абсолютных" слоев. Такое название можно дать слоям разбиения графа по отношению к его центру.

7. М а т р и ц ы с л о е в. Множеству относительных разбиений можно сопоставить матрицу слоев $\lambda^n(G) = \|a_{ij}\|$, $i = \overline{1,\binom{p}{n}}$,

$j=\overline{1,d(G)}$, таким образом, что a_{ij} равно числу вершин в j-м слое относительного разбиения по отношению к i-му множеству V^0_i, $n=|V^0_i|$. Если $V_j(V^0_i)=\emptyset$, то $a_{ij}=0$. Если упорядочить строки $\lambda^n(G)$ по уменьшению длины (числа ненулевых элементов), а затем упорядочить строки одинаковой длины лексикографически, то получим каноническую $\lambda^n(G)$ матрицу. При $n=1$ получим матрицу слоев одновершинных разбиений.

По аналогии с вершинными матрицами $\lambda^n_G(V)$ можно рассматривать реберные части матриц слоев $\lambda^n_G(X)$, в которых элементам соответствуют значения разрезов между слоями (числа ребер, соединяющие смежные слои): $\lambda^n_G(X)=\|b_{ij}\|$, $b_{ij}=|E_{j-1,j}|$, а $E_{j-1,j}$ – множество ребер, соединяющих слои V_{j-1} и V_j.

Полная одновершинная матрица слоев может быть представлена в виде $\lambda^1_G=[\lambda^1_G(V),\ \lambda^1_G(X)]$. Можно также рассматривать матрицы следующего вида. Вершинные матрицы слоев $\lambda^2_G(V,x)$, полученные по отношению к ребрам; $\lambda^2_G(V,\bar{x})$ – тоже для несмежных пар вершин. Очевидно, что $\lambda^2_G(V,x)\cup\lambda^2_G(V,\bar{x})=\lambda^2(G)$. Для матриц слоев введем следующие обозначения. Матрицу

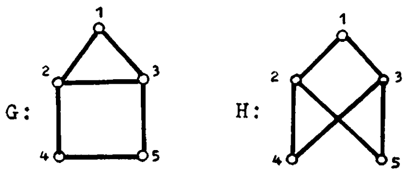
$$\lambda^1(\bar{P}_5)=\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\end{array}\left\|\begin{array}{cc}2&2\\2&2\\2&2\\3&1\\3&1\end{array}\right\|$$

можно представлять в виде $\|1,2,3\ (2,2);\ 4,5\ (3,1)\|$ или, если номера вершин не важны, в виде $\|3\cdot(2,2);\ 2\cdot(3,1)\|$. Из известных свойств [1] матриц слоев отметим следующие: $G\simeq H\Rightarrow\lambda^1(G)=\lambda^1(H)$; $\lambda^1(G)=\lambda^1(H)\not\Rightarrow G\simeq H$, даже если у графов G и H нет нетождественных автоморфизмов. Это верно в том числе и для деревьев $\lambda^i(G)=\lambda^i(H)\not\Rightarrow\lambda^j(G)=\lambda^j(H)$, где $i,j\in\{1,2\}$; если $\{\lambda^i(G)\}$ – семейство всех i-матриц графа, то $\forall i$ имеем $\lambda^i(H)=\lambda^i(G)\not\Rightarrow G\simeq H$. Это следует из существования пары графов G и H (рис. 3)*). Из $\lambda^1_G(X)=\lambda^1_H(X)$ не следует, что $G\simeq H$.

В настоящее время не известны примеры графов G и H, для которых не выполнялись бы следующие соотношения: $\lambda^2_G(V,X)=\lambda^2_H(V,X)\Rightarrow G\simeq H$ и $\lambda^1_G=\lambda^1_H\ \&\ \lambda^2_G(V,X)=\lambda^2_H(V,X)\Rightarrow G\simeq H$.

*) Пример найден Ю.Е.Бессоновым.

В матрице слоев могут содержаться тождественные строки. Эта тождественность строк определяет на множестве вершин некоторое отношение эквивалентности. Часть матрицы слоев, состоящая из всех попарно различных строк, называется 1-спектром графа.



$\forall i \quad \lambda^i(G) = \lambda^i(H);$

$\lambda^1 = \|3\cdot(2,2);2\cdot(3,1)\|;$

$\lambda^2 = \|3\cdot(2,1);7\cdot(3)\|;$

$\lambda^3 = \|10\cdot(2)\|:\lambda^4 = \|5\cdot(1)\|.$

Рис. 3

Матрицы слоев являются двумерными относительными характеристиками графов.

В [7] исследована "точность" идентификации графов этими характеристиками. В [8] вводится понятие изометричности графов. Говорят, что H изометричен из G: $G \rightsquigarrow H$ тогда и только тогда,когда для любой вершины $v \in V(G)$ существует однозначное отображение φ: $V(G) \xrightarrow{\text{на}} V(H)$ такое, что для любых вершин $v,u \in V(G)$ сохраняются расстояния: $d(u,v) = d(\varphi_u,\varphi_v)$: $\varphi_u,\varphi_v \in V(H)$.Если $G \rightsquigarrow H$ и $H \rightsquigarrow G$, то $G \leftrightsquigarrow H$, т.е. графы изометричны. В [7] доказаны необходимые и достаточные условия изометричности графов,которые формулируются в виде $1(G) = 1(H) \Rightarrow G \leftrightsquigarrow H$. Таким образом,графы G и H изометричны, если их 1-спектры совпадают. Изометричные графы могут иметь различные вершинные матрицы слоев первого порядка.Графы с одинаковыми матрицами изометричны, у них одинаково и число всех возможных соответствий, на которое влияет лишь число одинаковых строк в матрицах.

Очевидно, всегда имеет место $G \leftrightsquigarrow G$, т.е. граф всегда изометричен себе, число соответствий графа самому себе не одинаково для различных графов. Это число определяется наличием совпадающих строк в матрицах слоев.

8. Метрические характеристики и матрицы слоев. Покажем, что многие метрические характеристики удобно вычислять по матрицам слоев. Речь пойдет только о матрице слоев первого порядка.

Функцию, вычислимую по $\lambda(G)$, назовем λ-вычислимой. Непосредственно из свойств матрицы слоев следует, что длина строки равна эксцентриситету соответствующей вершины. Длина первой строки равна диаметру, а последней - радиусу графа. Таким образом, эксцентриситетные характеристики λ-вычислимы.

Поскольку дистанционные характеристики вычисляются через дистанции вершин, то их λ-вычислимость следует из λ-вычислимости $\underline{D(v),\ v \in V}$. Рассмотрим i-ю вершину графа и величину $a_{ij} \cdot j$ $(j = \overline{1, e(i)})$, $e(i)$ - эксцентриситет i-й вершины, которая равна сумме расстояний между i-й вершиной и всеми вершинами из j-го слоя разбиения $\hat{V}(i)$. Суммируя по всем j, получаем следующую формулу:

$$D(i) = \sum_{j=1}^{e(i)} a_{ij} \cdot j ;$$

из которой следует λ-вычислимость дистанционных характеристик.

Эту формулу можно применять для непосредственного вычисления или для получения аналитических выражений определения дистанций. Для примера рассмотрим некоторые известные графы.

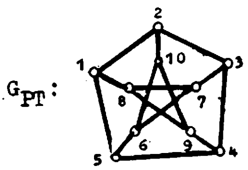


Рис. 4

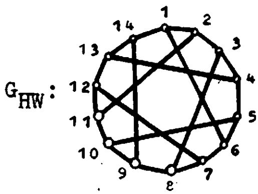


Рис. 5

Для графа Петерсена (рис.4) легко установить, что $\lambda(G_{PT}) = \|10 \cdot (3,6)\|$, и, значит, $D(G_{PT}) = 75$. Для графа Хивуда (рис. 5) $\lambda(G_{HW}) = \|14 \cdot (3,6,4)\|$, и, значит, $D(G_{HW}) = 189$.

Пусть C_p - простой цикл порядка p, тогда

$$\lambda(C_p) = \|p \cdot \underbrace{(2,2,\ldots,2,1)}_{(p-2)/2+1}\|,$$

если p четно, то $D(C_p) = \dfrac{p^3}{8}$, и если p нечетно, то

$$\lambda(C_p) = \|p \cdot \underbrace{(2,2,\ldots,2)}_{(p-1)/2}\|,\quad D(C_p) = \frac{p(p^2-1)}{8}.$$

Пусть K_p - полный p-вершинник, тогда

$$\lambda(K_p) = \|p(p-1)\| \text{ и } D(K_p) = \frac{p(p-1)}{2}.$$

Пусть K_{p_1,p_2} - полный двудольный граф с порядками долей p_1 и p_2, тогда $\lambda(K_{p_1,p_2}) = \| p_1\cdot(p_2,p_1-1);\ p_2\cdot(p_1,p_2-1) \|$, откуда можно получить, что $D(K_{p_1,p_2}) = p_1p_2 + p_1(p_1-1) + p_2(p_2-1)$.

Можно вычислять характеристики не по матрице $\lambda(G)$, а по спектру $l(G)$. Такие характеристики, которые назовем l-спектральными, могут быть использованы для изучения свойств симметрий графов, определяемых отношением изометричности [7], путем сравнения характеристик, полученных по $l(G)$ и по $\lambda(G)$.

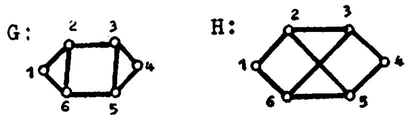


Рис. 6

Из примера графов (рис.6) следует, что функция сложности графа $\xi(G)$ не является λ-вычислимой. Для этих графов λ-матрицы совпадают и имеют вид $\lambda(G) = \lambda(H) = \|2\cdot(2,\ 2,\ I);\ 3\cdot(3,2)\|$.

По табл. 3, где приведены значения $\gamma(i,j)$ (числа путей различных длин между соответствующими парами вершин), и формуле для

Т а б л и ц а 2

G:

i	I	2	3	4	5	6
I		4	6	8	6	4
2			5	6	4	5
3				4	5	4
4					4	6
5						5

Т а б л и ц а 3

H:

i	I	2	3	4	5	6
I		5	6	8	6	5
2			5	6	5	4
3				5	4	5
4					5	6
5						5

вычисления сложности графа из 5 легко установить, что $\xi(G) \approx 260,2$, $\xi(H) \approx 274,3$, т.е. $\xi(G) \neq \xi(H)$.

9. **П р о г р а м м а м е т р и ч е с к о г о а н а л и з а г р а ф о в.** Программа нахождения метрических характеристик и конструкций графов написана на языке ПЛ/I для ОС ЕС ЭВМ (приложение I).

Входной информацией для программ служит описание семейств графов на языке OGRA-3.0.*) Приведем некоторые правила описания семейств графов на этом языке: "имя семейства графов" "имя перво-

*) Полностью этот язык предполагается опубликовать отдельно.

го графа * цепь и (или)звезда *...* цепь и (или) звезда ** ... имя последнего графа * ...* цепь и (или) звезда ***".

Один граф также является семейством. Имя семейства и имена графов могут состоять из произвольных наборов символов.Цепь - это последовательность наборов символов, описывающих вершины, и разделителей, которая соответствует цепи в графе. Звезда - это множество наборов символов, описывающих вершину и смежные ей вершины через соответствующие разделители. Изолированная вершина v может быть описана в виде * v *. Граф P_5 может быть описан в виде P5 *I-2-3-4-5 ** или, применяя допустимые сокращения, с целью уменьшить длину записи путем устранения последовательности идущих подряд чисел, можно записать P5 * I--5** . Граф $\bar{K}_3 + v$, который сам является звездой,можно записать в виде $\bar{K}_3$ + v * v - 1,2,3** . Или,применяя аналогичные сокращения,можно получить $\bar{K}_3$ + v*v - 1,, 3** .

Вершины графа могут быть пронумерованы произвольными положительными числами,не обязательно идущими подряд. Одна вершина в описании может встречаться несколько раз. Приведем пример описания семейства, состоящего из двух графов

'ПАРА ГРАФОВ' 'P5*1--5**НЕ К3 + V*V-1,,3***' .

Для представления орграфа применяется такой же способ.Запись *v-u* соответствует дуге в орграфе, при этом необходимо описать тип графа. Помеченные мультиграфы отличаются правилами описания вершин и ребер. При описании вершины сначала указывается ее номер, затем ее метка и в скобках приводится описание мультиребра,соединяющего описываемую вершину с предыдущей. Метка вершины может содержать произвольный набор символов, но не может начинаться с цифры и не может содержать символов *,-,',(,). Мультиребро описывается в виде совокупности описаний его кратности, типа (веса).Кратность описывается в виде числа, а тип - в виде произвольного набора символов. Если описание типа (веса) ребра начинается с цифры, то чтобы его отличить от кратности перед описанием типа, следует писать символ ! . Приведем пример описания пары вершин, соединенных двумя непомеченными ребрами, двумя ребрами с метками a1 и b1, и ребром, имеющим вес 5: мультиребро * I-2(2,a1,b1,! 5).

При обработке помеченных мультиграфов с петлями программа игнорирует метки и петли, а кратные ребра считаются некратными.

Программа может обрабатывать также сильносвязные орграфы.

Результат работы программы (приложение 2) показан на примере семейства с именем "УНИГРАФЫ", которое состоит из двух графов, приведенных на рис. 2 и 3, графа G.

Литература

1. СКОРОБОГАТОВ В.А. Относительные разбиения и слои графов. -В кн.: Вопросы обработки информации при проектировании систем (Вычислительные системы, вып. 69). Новосибирск, 1977, с. 6-9.

2. ENTRIGER R.C., JACKSON D.E., SNYDER D.A. Distance in graphs. Czechoslovak Math.J., 1976, v.26(101), N 2, p.283-297.

3. DOYLE I.K., GRAVER I.E. Mean distance in graph.- Discrete Math., 1977, v.17, N 2, p.147-155.

4. ХЕВИК Т., ГЛЕДИЧ Н.П. Структурные параметры графов. Теоретические исследования. -В кн.: Математика в социологии. М., 1977, с. 151-169.

5. ХАРАРИ Ф. Теория графов.-М.: Мир, 1973. - 350 с.

6. СКОРОБОГАТОВ В.А. О распознавании изоморфизма неориентированных графов.-В кн.: Вычислительные системы. Вып. 33, Новосибирск, 1969, с. 34-37.

7. СКОРОБОГАТОВ В.А. Матрицы слоев и изометричность графов. -В кн.: Автоматизация проектирования в микроэлектронике. Теория. Методы, алгоритмы (Вычислительные системы, вып. 77). Новосибирск, 1976. с. 20-24.

8. CHARTRAND G., STEWART M., jr. Isometric graphs.- Lect. Notes Math., 1971, N 186, p.63-67.

9. MINOLY D. Combinational graph complexity.- Atti.Acad.Waz. Lincei. Rend. A. sci.fis.mat. l'natur., 1975(1976), v.59, N 6, p. 154-171.

10. TRUCCO E. Note on the information content of graphs.-Bull. Math.Biophys., 1956, p.129-135.

11. MOWSHOURTZ A. Entropy and complexity of graphs.-Bull.Math. Biophys., 1968, v.30, p.225-240.

12. MARSHALL C.W. Applied graph theory.- New York: Willy-Interscience, 1971. - 240 p.

13. ДЕНИЩИК Е.Ю., СКОРОБОГАТОВ В.А., ХВОРОСТОВ П.В. О вычислении метрических характеристик графов. -В кн.: Методы и программы решения оптимизационных задач на графах и сетях. Тезисы докл. Всесоюз. совещ. 3-5 сент. 1980 г. Новосибирск. ВЦ СО АН СССР. Новосибирск, 1980, с. 23-24.

14. ОРЕ Е. Теория графов. -М.: Наука, 1968. - 336 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
30 октября 1981 года

Приложение I.

```
TR: PROC OPTIONS(MAIN);
     DCL C CHAR(32000) VAR;
     DCL(K,I,I1,J,J1,J2,AL,FAL,IS,N,P) DEC FIXED(5);DCL(EM,ER) DEC
     FIXED(9,3);DCL(MV(P),KP(P),SKP(P),LAM1(P,0:P),LAM(P,0:IS),T(P),
     LAMS(N,IS)) DEC FIXED(5) CTL;
     DCL(EK(P),DK(P),SD(P)) DEC FIXED(9,3) CTL;
     DCL (FL1,FL2,FL3) DEC FIXED(1);
     DCL (NEB(P,P) DEC FIXED(5,1),(LAB(P),XY(2,P)) CHAR(50) VAR,
          C2(P) DEC FIXED(5)) CTL;
     PUT SKIP LIST('ОБОЗНАЧЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК В ПРОГРАММЕ:');
     PUT SKIP LIST('1-РАДИУС ГРАФА');PUT SKIP LIST('2-ДИАМЕТР ГРАФА');
     PUT SKIP LIST('3-СРЕДНИЯ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТ ВЕРШИН');
     PUT SKIP LIST('4-ЭКСЦЕНТРИСИТЕТ ГРАФА');
     PUT SKIP LIST('5-ЭКСЦЕНТРИЧНОСТЬ ГРАФА');
     PUT SKIP LIST('6-ДИСТАНЦИЯ ГРАФА');
     PUT SKIP LIST('7-СРЕДНЯЯ ДИСТАНЦИЯ ВЕРШИН');
     PUT SKIP LIST('8-МИНИМАЛЬНАЯ ДИСТАНЦИЯ (УНИПОЛЯРНОСТЬ)');
     PUT SKIP LIST('9-ДИСТАНЦИОННОЕ ОТКЛОНЕНИЕ ГРАФА (ЦЕНТРАЛИЗАЦИЯ)');
     PUT SKIP LIST('10-СРЕДНЕЕ ДИСТАНЦИОННОЕ ОТКЛОНЕНИЕ ГРАФА');
     PUT SKIP LIST('11-ОБРАТНАЯ ДИСТАНЦИЯ ГРАФА');
     PUT SKIP LIST('12-АНАЛОГ НАИМЕНЬШЕЯ ДИСТАНЦИИ');
     PUT SKIP LIST('13-ОБРАТНАЯ ЦЕНТРАЛИЗАЦИЯ');
     PUT SKIP LIST('14-ДИСПЕРСИЯ ГРАФА');
     PUT SKIP LIST('15-КОМПАКТНОСТЬ ГРАФА');
     PUT SKIP LIST('16-ЭКЦЕНТРИСИТЕТ ВЕРШИНЫ');
     PUT SKIP LIST('17-ЭКСЦЕНТРИЧНОСТЬ ВЕРШИНЫ');
     PUT SKIP LIST('18-ДИСТАНЦИЯ ВЕРШИНЫ');
     PUT SKIP LIST('19-ДИСТАНЦИОННОЕ ОТКЛОНЕНИЕ ВЕРШИНЫ ОТ МИНИМУМА');
     PUT SKIP LIST('20-ДИСТАНЦИОННОЕ ОТКЛОНЕНИЕ ВЕРШИНЫ ОТ СРЕДНЕГО');
     PUT SKIP LIST('21-СРЕДНЕЕ ОТКЛОНЕНИЕ ВЕРШИНЫ');
     PUT SKIP LIST('22-СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОЕ ОТКЛОНЕНИЕ ВЕРШИНЫ');
     PUT SKIP LIST('23-ОБРАТНАЯ ДИСТАНЦИЯ ВЕРШИНЫ');
     ON ENDFILE (SYSIN) GO TO M6;
 M1: GET LIST(C);FL1,FL2,FL3=0;
     IF INDEX(C,'УНИ')¬=0B THEN FL1=1;
     IF INDEX(C,'НЕОР')=0B THEN IF INDEX(C,'ОР')¬=0B THEN FL2=1;
     IF INDEX(C,'НЕХИМ')=0B THEN IF INDEX(C,'ХИМ')¬=0B THEN FL3=1;
     PUT SKIP(2) LIST(C);
 M2: GET LIST(C);J1=0;
 M3: CALL CALKA;
     ALLOCATE LAM1,T,MV,KP,SKP,EK,DK,SD;LAM1=0;T=0;I=1;
M11: MV=0;KP=0;SKP=0;J2=1;MV(I)=1;IS=0;DO J=1 TO P;
     IF NEB(I,J)¬=0 & MV(J)=0 THEN DO;MV(J)=1;KP(J2)=J;J2=J2+1;
     IS=IS+1;END;END;LAM1(I,0)=C2(I);N=1;LAM1(I,N)=IS;AL=IS;
M12: FAL=0;J2=1;DO J=1 TO P;SKP(J)=KP(J);END;DO K=1 TO AL;I1=SKP(K);
     IS=0;DO J=1 TO P;IF NEB(I1,J)¬=0 & MV(J)=0 THEN DO;MV(J)=1;
     KP(J2)=J;J2=J2+1;IS=IS+1;END;END;FAL=FAL+IS;END;T(I)=T(I)+1;
     IF FAL=0 THEN GOTO M14;AL=FAL;N=N+1;LAM1(I,N)=AL;GOTO M12;
M14: I=I+1;IF I>P THEN GOTO M15;GOTO M11;
M15: AL,IS=T(1);DO J=2 TO P;IF AL>T(J) THEN AL=T(J);END;DO J=2 TO P;
     IF IS<T(J) THEN IS=T(J);END;ALLOCATE LAM;DO K=1 TO P;DO J=0 TO IS;
     LAM(K,J)=LAM1(K,J);END;END;FREE LAM1;
     DO K=1 TO P;MV(K)=LAM(K,1);
     DO J=2 TO IS WHILE(LAM(K,J)¬=0);MV(K)=MV(K)+LAM(K,J)*J;END;END;
     DO K=1 TO P;SD(K)=LAM(K,1)*LAM(K,1);
     DO J=2 TO IS WHILE(LAM(K,J)¬=0);
     SD(K)=SD(K)+LAM(K,J)*LAM(K,J)*J;END;SD(K)=SD(K)/P;END;
     DO J=1 TO P;KP(J)=T(J);SKP(J)=0;END;N=1;
     DO K=1 TO P-1;DO I=K+1 TO P;IF KP(K)<KP(I) THEN DO;FAL=KP(K);
     KP(K)=KP(I);KP(I)=FAL;DO J=0 TO IS;FAL=LAM(K,J);LAM(K,J)=LAM(I,J);
     LAM(I,J)=FAL;END;END;END;END;
     I1=1;DO K=1 TO P;IF KP(K)¬=0 THEN DO;
     SKP(I1)=1;DO J=K+1 TO P;IF KP(K)=KP(J) THEN DO;SKP(I1)=SKP(I1)+1;
```

```
      KP(J)=0;END;ELSE DO;I1=I1+1;GOTO M20;END;END;END;
M20:  END;DO K=1 TO P WHILE(SKP(K)¬=0);IF SKP(K)¬=1 THEN DO;
      DO I=N TO N+SKP(K)-2;DO I1=I+1 TO N+SKP(K)-1;DO J=1 TO IS
      WHILE(LAM(I,J)¬=0);IF LAM(I,J)>LAM(I1,J) THEN GOTO M21;
      IF LAM(I,J)<LAM(I1,J) THEN DO;DO J2=0 TO IS
      WHILE(LAM(I,J2)¬=0);FAL=LAM(I,J2);LAM(I,J2)=LAM(I1,J2);
      LAM(I1,J2)=FAL;END;GOTO M21;END;END;
M21:  END;END;END;N=N+SKP(K);END;PUT SKIP;
      PUT SKIP LIST('МАТРИЦА СЛОЕВ ГРАФА');
      DO K=1 TO P;PUT SKIP EDIT(LAM(K,0))(F(4));PUT EDIT('*')(X(1),A);
      DO J=1 TO IS;PUT EDIT(LAM(K,J))(F(4));END;END;PUT SKIP;
 PUT SKIP;PUT EDIT((120)'*')(A);J=1;PUT EDIT('*',J,'*')(A,F(2),X(2),A);
      J=2;PUT EDIT(J,'*')(F(2),X(2),A);DO J=3 TO 15;IF J=8 THEN DO;
 PUT EDIT(J,'*')(F(4),X(2),A);GOTO M18;END;IF J=6 | J=7 | J=14 THEN DO;
      PUT EDIT(J,'*')(F(5),X(4),A);GOTO M18;END;
      PUT EDIT(J,'*')(F(4),X(3),A);
M18:  END;PUT EDIT((120)'*')(A);PUT EDIT
      ('*','*','*','*','*','*','*','*','*','*','*','*','*','*','*','*')
      (A,X(4),A,X(4),A,X(7),A,X(7),A,X(7),A,X(9),A,X(9),A,X(6),A,X(7),A,
X(7),A,X(7),A,X(7),A,X(7),A,X(9),A,X(7),A);
      PUT EDIT('*',AL,'*')(A,F(3),X(1),A);
      PUT EDIT(IS,'*')(F(3),X(1),A);
      FAL=T(1);DO J=2 TO P;FAL=FAL+T(J);END;EM=FAL/P;EM=ROUND(EM,2);
      PUT EDIT(EM,'*')(F(6,2),X(1),A);PUT EDIT(FAL,'*')(F(6),X(1),A);
      DO J=1 TO P;EK(J)=T(J)-EM;END;EM=ABS(EK(1));DO J=2 TO P;
   EM=EM+ABS(EK(J));END;EM=ROUND(EM,2);PUT EDIT(EM,'*')(F(6,2),X(1),A);
      EM=MV(1);DO J=2 TO P;EM=EM+MV(J);END;EM=EM/2;
      PUT EDIT(EM,'*')(F(8,1),X(1),A);ER=2*EM/P;ER=ROUND(ER,2);
      PUT EDIT(ER,'*')(F(8,2),X(1),A);FAL=MV(1);DO J=2 TO P;
      IF FAL>MV(J) THEN FAL=MV(J);END;PUT EDIT(FAL,'*')(F(5),X(1),A);
  K=2*EM-P*FAL;PUT EDIT(K,'*')(F(6),X(1),A);DO J=1 TO P;DK(J)=MV(J)-ER;
      END;ER=ABS(DK(1));DO J=2 TO P;ER=ER+ABS(DK(J));END;ER=ER/P;
      ER=ROUND(ER,2);PUT EDIT(ER,'*')(F(6,2),X(1),A);ER=1/EM;
      PUT EDIT(ER,'*')(F(6,3),X(1),A);ER=1/FAL;
      PUT EDIT(ER,'*')(F(6,3),X(1),A);ER=P*ER-2/EM;ER=ROUND(ER,2);
      PUT EDIT(ER,'*')(F(6,2),X(1),A);ER=SD(1);DO J=2 TO P;IF ER>SD(J)
      THEN ER=SD(J);END;ER=ROUND(ER,2);PUT EDIT(ER,'*')(F(8,2),X(1),A);
      IF P=1 THEN PUT EDIT('*')(X(7),A);ELSE DO;EM=EM*4/(P*(P-1));
      EM=ROUND(EM,2);PUT EDIT(EM,'*')(F(6,2),X(1),A);END;
      PUT EDIT('*','*','*','*','*','*','*','*','*','*','*','*','*','*','
*','*')(A,X(4),A,X(4),A,X(7),A,X(7),A,X(7),A,X(9),A,X(9),A,X(6),A,X(7),
A,X(7),A,X(7),A,X(7),A,X(7),A,X(9),A,X(7),A);
      PUT EDIT((120)'*')(A);PUT SKIP(5);PUT EDIT((91)'*')(A);PUT SKIP;
      PUT EDIT('*','0','*')(A,X(2),A(3),A);DO J=16 TO 23;IF J=16 | J=19
      THEN DO;PUT EDIT(J,'*')(F(4),X(2),A);GOTO M19;END;IF J=17 | J=20
      THEN DO;PUT EDIT(J,'*')(F(8),X(7),A);GOTO M19;END;IF J=22 THEN DO;
PUT EDIT(J,'*')(F(6),X(4),A);GOTO M19;END;PUT EDIT(J,'*')(F(5),X(3),A);
M19:  END;PUT SKIP;PUT EDIT((91)'*')(A);DO J=1 TO P;PUT SKIP;
PUT EDIT('*',C2(J),'*')(A,F(4),X(1),A);PUT EDIT(T(J),'*')(F(5),X(1),A);
      EM=ROUND(EK(J),2);PUT EDIT(EM)(F(7,2));EM=ABS(EM);
      PUT EDIT(EM,'*')(F(7,2),X(1),A);PUT EDIT(MV(J),'*')(F(7),X(1),A);
      K=MV(J)-FAL;PUT EDIT(K,'*')(F(5),X(1),A);
      EM=ROUND(DK(J),2);PUT EDIT(EM)(F(7,2));EM=ABS(EM);
      PUT EDIT(EM,'*')(F(7,2),X(1),A);EM=MV(J)/P;EM=ROUND(EM,2);
      PUT EDIT(EM,'*')(F(7,2),X(1),A);SD(J)=ROUND(SD(J),2);
      PUT EDIT(SD(J),'*')(F(9,2),X(1),A);EM=1/MV(J);
      PUT EDIT(EM,'*')(F(7,3),X(1),A);END;PUT SKIP;PUT EDIT((91)'*')(A);
      PUT SKIP;
      PUT SKIP LIST('ЦЕНТР ГРАФА');
      PUT SKIP;DO J=1 TO P;IF T(J)=AL THEN PUT EDIT(C2(J))(F(4));END;
      PUT SKIP LIST('ПЕРИФЕРИЯ ГРАФА');
      PUT SKIP;DO J=1 TO P;IF T(J)=IS THEN PUT EDIT(C2(J))(F(4));END;
      PUT SKIP LIST('СЕРЕДИНА ГРАФА');
      PUT SKIP;DO J=1 TO P;IF MV(J)=FAL THEN PUT EDIT(C2(J))(F(4));END;
```

```
      PUT SKIP LIST('ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ГРАФА');
      PUT SKIP;DO J=1 TO P;IF SD(J)=ER THEN PUT EDIT(C2(J))(F(4));END;
      PUT SKIP;
      PUT SKIP LIST('L-СПЕКТР ГРАФА');
      I1=1;J2,N=0;
M16:  AL=I1+1;DO K=AL TO P;
      DO J=1 TO IS WHILE(LAM(I1,J)¬=0 | LAM(K,J)¬=0);
      IF LAM(I1,J)¬=LAM(K,J) THEN GOTO M17;END;
      DO J=1 TO IS WHILE(LAM(K,J)¬=0);LAM(K,J)=0;END;
M17:  END;I1=I1+1;IF I1<P THEN GOTO M16;DO J=1 TO P;
      IF LAM(J,1)¬=0 THEN N=N+1;END;ALLOCATE LAMS;DO K=1 TO P;
      IF LAM(K,1)¬=0 THEN DO;J2=J2+1;DO J=1 TO IS;LAMS(J2,J)=LAM(K,J);
      END;END;END;DO K=1 TO N;PUT SKIP;DO J=1 TO IS;
      PUT EDIT(LAMS(K,J))(F(4));END;END;
      FREE MV,KP,SKP,T,EK,DK,SD,LAM,LAMS,C2,NEB,XY,LAB;
 M4:  IF SUBSTR(C,J1+1,1)='*' THEN GO TO M1;GO TO M3;
CALKA: PROC;
      DCL (I,J,K,K1,L,N,P1,P2,P3,PR) DEC FIXED(5);
      DCL P0 DEC FIXED(5,1);
      DCL (A,X,Y,MET) CHAR(50) VAR,S(N) CHAR(1) CTL;
      DCL (C1(3,FLOOR(N/2)),C22(PR)) DEC FIXED(5) CTL;
 /* K-СЧЕТЧИК В МАССИВЕ S,    L-СЧЕТЧИК В МАССИВЕ C1   */
      K=0;PR=1;L=1;DO J=J1+1 TO 32000;IF SUBSTR(C,J,1)='*' THEN  DO;
      IF K=0 THEN I,K=J+1-J1;
      IF SUBSTR(C,J+1,1)='*' THEN GO TO C1;END;END;
 /*   N-ЧИСЛО СИМВОЛОВ В ЗАПИСИ ГРАФА     */
 C1:  N=J+1-J1;ALLOCATE S,C1;C1=0;PUT SKIP(2);
      DO J=1 TO N;S(J)=SUBSTR(C,J1+J,1);PUT EDIT(S(J))(A);END;
      J1=J1+N;
      ON CONV BEGIN;PUT EDIT('ОШИБКА ПРИ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ЛИТЕРНОЙ СТРОКИ
В АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДАННЫЕ.')(A(70));
      PUT EDIT('СМ. СИМВОЛЫ',C1(2,L),' -',K-1)(A(11),F(4),A(2),F(4));
      FREE S,C1;GOTO M4;END;
 /*   C1(1,*)-ПОРЯДКОВЫЕ НОМЕРА ВЕРШИН
      C1(2,*)-С КАКОЙ ПОЗИЦИИ НАЧИНАЕТСЯ ЗАПИСЬ НОМЕРА ВЕРШИНЫ
      C1(3,*)-СКОЛЬКО ПОЗИЦИЙ ЗАНИМАЕТ НОМЕР ВЕРШИНЫ    */
 C2:  IF S(K)='0' THEN K=K+1;
 C3:  A=S(K);C1(2,L)=K;P=1;K=K+1;
      DO J=K TO N WHILE (S(J)='1' | S(J)='2' | S(J)='3' | S(J)='4' |
      S(J)='5' | S(J)='6' | S(J)='7' | S(J)='8' | S(J)='9' | S(J)='0');
      A=A||S(J);P=P+1;END;K=J;C1(1,L)=A;C1(3,L)=P;
      IF C1(1,L)<0 | C1(1,L)=0 THEN DO;PUT EDIT('СРЕДИ НОМЕРОВ ВЕРШИН
ВСТРЕЧАЕТСЯ 0 ИЛИ ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО.')(SKIP,A(64));
      PUT EDIT('СМ. СИМВОЛЫ',C1(2,L),' -',K-1)(A(11),F(4),A(2),F(4));
      FREE S,C1;GOTO M4;END;
      IF PR<C1(1,L) THEN PR=C1(1,L);L=L+1;
 /*   ИГНОРИРУЕМ КООРДИНАТЫ,МЕТКИ,КРАТНОСТЬ       */
 C4:  IF S(K)¬='-' & S(K)¬=',' & S(K)¬='*' THEN DO;K=K+1;GOTO C4;END;
      IF S(K)='-' THEN DO;K=K+1;
      IF S(K)='-' THEN DO;K=K+1;L=L+1;END;GOTO C2;END;
      IF S(K)=',' THEN DO;K=K+1;
      IF S(K)=',' THEN DO;K=K+1;L=L+1;END;GOTO C2;END;
      IF S(K)='*' THEN DO;K=K+1;IF K=N THEN GOTO C5;GOTO C2;END;
 /* ПЕРЕНУМЕРАЦИЯ ВЕРШИН */
 C5:  L=L-1;K=I;ALLOCATE C22;C22=0;
      DO I=1 TO L;IF C1(1,I)>0 THEN C22(C1(1,I))=C1(1,I);
      ELSE DO;DO J=C1(1,I-1)+1 TO C1(1,I+1);C22(J)=J;END;END;END;
 /* СЖАТИЕ C22 */
      J=1;DO I=1 TO PR;IF C22(I)>0 THEN DO;C22(J)=C22(I);J=J+1;END;END;
      P=J-1;ALLOCATE C2;DO J=1 TO P;C2(J)=C22(J);END;FREE C22;
      PUT SKIP LIST ('ПОРЯДОК ГРАФА');PUT EDIT (P)(F(3));
      PUT EDIT (' НОМЕРА ВЕРШИН',(C2(J) DO J=1 TO P))(A(17),(P)F(4));
      IF P<PR THEN DO;DO I=1 TO L;IF C1(1,I)>0 THEN DO;
      DO J=1 TO P;IF C1(1,I)=C2(J) THEN GO TO C6;END;
```

```
G6: C1(1,I)=J;END;END;END;
/* ЗАПОЛНЕНИЕ МАТРИЦЫ СМЕЖНОСТЕЙ */
     ALLOCATE NEB,XY,LAB;NEB=0;XY=' ';LAB=' ';K1=1;
G7: CALL CM;P1=P3;CALL KK(P1);IF FL1=0 THEN CALL KM(P1);
G8: IF S(K)='-' THEN DO;K=K+1;
     IF S(K)='-' THEN DO;K1=K1+1;CALL CM;P2=P3;
     IF P2>P1 THEN DO;
     DO I=P1 TO P2-1;NEB(I,I+1)=P0;IF FL2=0 THEN NEB(I+1,I)=P0;
     IF FL1=0 THEN DO;J=I+1;CALL KM(J);END;END;
     END;ELSE DO;PUT SKIP LIST('ОШИБКА В ЦЕПОЧКЕ:НОМЕР КОНЦЕВОЙ ВЕРШИНЫ
ДОЛЖЕН БЫТЬ БОЛЬШЕ НОМЕРА НАЧАЛЬНОЙ ');
     PUT EDIT (C2(P1),'--',C2(P2))(F(4),A(2));
     PUT EDIT(' CM.',C1(3,K1-1),' СИМВОЛА,НАЧИНАЯ С ',C1(2,K1-1))
     (A(4),F(5),A(19),F(5));END;
     IF X¬=' ' | Y¬=' ' THEN DO;PUT SKIP LIST
     ('ДОПУЩЕНА ОШИБКА ПРИ КОДИРОВАНИИ КООРДИНАТ В ЦЕПОЧКЕ');
     PUT EDIT (C2(P1),'--',C2(P2))(F(3),A(2));
     PUT EDIT(' CM.',C1(2,K1-1)+C1(3,K1-1),' СИМВОЛ')(A(3),F(4),A(7));
     END;P1=P2;END;ELSE CALL REB;GOTO G8;END;
G9: IF S(K)=',' THEN DO;K=K+1;
     IF S(K)=',' THEN DO;K1=K1+1;CALL CM;
     IF P3>P2 THEN DO;
     DO I=P2+1 TO P3;NEB(P1,I)=P0;IF FL2=0 THEN NEB(I,P1)=P0;
     IF FL1=0 THEN CALL KM(I);END;
     END;ELSE DO;PUT SKIP LIST('ОШИБКА В ЗВЕЗДЕ:НОМЕР КОНЦЕВОЙ ВЕРШИНЫ
ДОЛЖЕН БЫТЬ БОЛЬШЕ НОМЕРА НАЧАЛЬНОЙ ');
     PUT EDIT ('#',C2(P1),'-...',C2(P2),',',C2(P3))
     (A(2),F(4),A(4),F(4));
     PUT EDIT(' CM.',C1(3,K1-1),' СИМВОЛА,НАЧИНАЯ С ',C1(2,K1-1))
     (A(4),F(5),A(19),F(5));END;
     IF X¬=' ' | Y¬=' ' THEN DO;PUT SKIP LIST
     ('ДОПУЩЕНА ОШИБКА ПРИ КОДИРОВАНИИ КООРДИНАТ В ЗВЕЗДЕ');
     PUT EDIT ('#',C2(P1),'-,..',C2(P2),',',C2(P3))
(A(2),F(3),A(4),F(3));PUT EDIT(' CM.',C1(2,K1-1)+C1(3,K1-1),' СИМВОЛ')
     (A(4),F(4),A(7));END;
     IF S(K)=',' THEN GOTO G9;P1=P3;END;ELSE CALL REB;GOTO G8;END;
     IF S(K)='*' THEN DO;IF K=N-1 THEN GOTO G10;GOTO G7;END;
/* ОБЩИЙ КОНТРОЛЬ И ПЕЧАТЬ */
     IF S(K)¬='-' & S(K)¬=',' & S(K)¬='*' THEN DO;
     PUT SKIP EDIT('НЕСООТВЕТСТВИЕ ОПИСАНИЯ-ЗАКОДИРОВАН МУЛЬТИГРАФ,CM.'
     ,K,'СИМВОЛ')(A(50),F(4),A(7));FREE C2,NEB,XY,LAB,S,C1;GOTO M4;END;
G10: I,J=0;DO K=1 TO P;IF LAB(K)=' ' THEN I=I+1;
     IF XY(1,K)=' ' THEN J=J+1;END;
     IF J=P THEN PUT SKIP LIST('ВЕРШИНЫ НЕ ИМЕЮТ КООРДИНАТ');
    IF J>0 & J<P THEN PUT SKIP LIST('ЧАСТЬ ВЕРШИН НЕ ИМЕЕТ КООРДИНАТ');
     IF I=P THEN PUT SKIP LIST('ВЕРШИНЫ ГРАФА НЕПОМЕЧЕНЫ');
     IF I>0 & I<P THEN PUT SKIP LIST('ЧАСТЬ ВЕРШИН НЕПОМЕЧЕНА');
/* ВОССТАНОВЛЕНИЕ ХИМИЧЕСКИХ МЕТОК */
     IF FL3=1 & I>0 THEN DO;
PUT SKIP LIST('ВОССТАНАВЛИВАЮТСЯ ОТСУТСТВУЮЩИЕ УГЛЕВОДОРОДНЫЕ МЕТКИ');
     PUT SKIP EDIT ((C2(I) DO I=1 TO P))(F(5));
     PUT SKIP EDIT ((LAB(I) DO I=1 TO P))(X(3),(P)A(5));
     DO K=1 TO P;IF LAB(K)=' ' THEN DO;P0=0;
     DO I=1 TO P;P0=P0+NEB(K,I);END;P1=FLOOR(P0);
     IF P1=1 THEN DO;LAB(K)='CH3';GOTO G11;END;
     IF P1=2 THEN DO;LAB(K)='CH2';GOTO G11;END;
     IF P1=3 THEN DO;LAB(K)='CH';GO TO G11;END;
     IF P1=4 THEN LAB(K)='C';END;
G11: END;PUT SKIP EDIT ((LAB(I) DO I=1 TO P))(X(3),(P)A(5));END;
     PUT SKIP LIST ('СПИСОК РЕБЕР И МЕТОК ');
     DO K=1 TO P;PUT SKIP EDIT (C2(K))(F(3));
     IF J<P THEN PUT EDIT ('!',XY(1,K),':',XY(2,K))(A(1),A(3));
     PUT EDIT (LAB(K),'-')(A(5),A);
     DO N=1 TO P;IF NEB(K,N)¬=0 THEN DO;
```

```
     PUT EDIT(C2(J),'(',NEB(K,N),');')(F(3),A(1),F(3,1),A(2));
     END;END;END;FREE S,C1;
/* КОНЕЦ ОБЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПЕЧАТИ */
CM: PROC;
/* K1-СЧЕТЧИК В C1 */
     P3=C1(1,K1);K=C1(2,K1)+C1(3,K1);K1=K1+1;X,Y,MET=' ';P0=1;
/* ОБРАБОТКА КООРДИНАТ */
     IF S(K)=':' THEN DO;A=S(K+1);K=K+2;
     DO J=K TO N WHILE (S(J)¬=':');A=A||S(J);END;
     X=A;K=J+1;A=S(K);K=K+1;
     DO J=K TO N WHILE (S(J)='0' | S(J)='1' | S(J)='2' | S(J)='3' |
     S(J)='4' | S(J)='5' | S(J)='6' | S(J)='7' | S(J)='8' | S(J)='9');
     A=A||S(J);END;Y=A;K=J;END;IF FL1=1 THEN GOTO C12;
/* ДЛЯ МУЛЬТИГРАФОВ */
/* ОБРАБОТКА МЕТОК */
     IF S(K)¬='(' & S(K)¬='-' & S(K)¬=',' & S(K)¬='*' THEN DO;
     A=S(K);K=K+1;DO J=K TO N WHILE
     (S(J)¬='(' & S(J)¬='-' & S(J)¬=',' & S(J)¬='*');A=A||S(J);END;
     K=J;MET=A;END;
/* ОБРАБОТКА ВАЛЕНТНОСТЕЙ */
     IF S(K)='(' THEN DO;A=S(K+1);K=K+2;
     DO J=K TO N WHILE (S(J)¬=')');A=A||S(J);END;P0=A;K=J+1;END;
C12: END CM;
/* КОНТРОЛЬ КООРДИНАТ J-ОЙ ВЕРШИНЫ (В НОВОЙ НУМЕРАЦИИ) */
KK: PROC(J);
     DCL J DEC FIXED(5);IF XY(1,J)¬=' ' & XY(2,J)¬=' ' THEN DO;
     IF (X¬=' ' & XY(1,J)¬=X) | (Y¬=' ' & XY(2,J)¬=Y) THEN PUT EDIT
     ('ДОПУЩЕНА ОШИБКА ПРИ КОДИРОВАНИИ КООРДИНАТ ВЕРШИНЫ',C2(J))
     (SKIP,A(50),F(5));END;ELSE DO;XY(1,J)=X;XY(2,J)=Y;END;END KK;
/* КОНТРОЛЬ МЕТКИ J-ОЙ ВЕРШИНЫ */
KM: PROC(J);
     DCL J DEC FIXED(5);IF LAB(J)¬=' ' THEN DO;
     IF MET¬=' ' & LAB(J)¬=MET THEN DO;
     PUT SKIP LIST('ДОПУЩЕНА ОШИБКА ПРИ КОДИРОВАНИИ МЕТКИ ВЕРШИНЫ');
     PUT EDIT (C2(J))(F(3));END;END;ELSE LAB(J)=MET;END KM;
REB: PROC;
     CALL CM;P2=P3;NEB(P1,P2)=P0;IF FL2=0 THEN NEB(P2,P1)=P0;
     CALL KK(P2);IF FL1=0 THEN CALL KM(P2);
     IF S(K)=',' THEN GO TO C9;P1=P2;END REB;
     END GALKA;
M6: END TR;
```

Приложение 2

1-РАДИУС ГРАФА
2-ДИАМЕТР ГРАФА
3-СРЕДНИЙ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТ ВЕРШИН
4-ЭКСЦЕНТРИСИТЕТ ГРАФА
5-ЭКСЦЕНТРИЧНОСТЬ ГРАФА
6-ДИСТАНЦИЯ ГРАФА
7-СРЕДНЯЯ ДИСТАНЦИЯ ВЕРШИН
8-МИНИМАЛЬНАЯ ДИСТАНЦИЯ (УНИПОЛЯРНОСТЬ)
9-ДИСТАНЦИОННОЕ ОТКЛОНЕНИЕ ГРАФА (ЦЕНТРАЛИЗАЦИЯ)
10-СРЕДНЕЕ ДИСТАНЦИОННОЕ ОТКЛОНЕНИЕ ГРАФА
11-ОБРАТНАЯ ДИСТАНЦИЯ ГРАФА
12-АНАЛОГ НАИМЕНЬШЕЙ ДИСТАНЦИИ
13-ОБРАТНАЯ ЦЕНТРАЛИЗАЦИЯ
14-ДИСПЕРСИЯ ГРАФА
15-КОМПАКТНОСТЬ ГРАФА
16-ЭКЦЕНТРИСИТЕТ ВЕРШИНЫ
17-ЭКСЦЕНТРИЧНОСТЬ ВЕРШИНЫ
18-ДИСТАНЦИЯ ВЕРШИНЫ
19-ДИСТАНЦИОННОЕ ОТКЛОНЕНИЕ ВЕРШИНЫ ОТ МИНИМУМА
20-ДИСТАНЦИОННОЕ ОТКЛОНЕНИЕ ВЕРШИНЫ ОТ СРЕДНЕГО
21-СРЕДНЕЕ ОТКЛОНЕНИЕ ВЕРШИНЫ
22-СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОЕ ОТКЛОНЕНИЕ ВЕРШИНЫ
23-ОБРАТНАЯ ДИСТАНЦИЯ ВЕРШИНЫ

УНИГРАФЫ

```
ГРАФ С НА РИС.2          *1-*5-3*2-4**
ПОРЯДОК ГРАФА   5 НОМЕРА ВЕРШИН      1   2   3   4   5
ВЕРШИНЫ НЕ ИМЕЮТ КООРДИНАТ
ВЕРШИНЫ ГРАФА НЕПОМЕЧЕНЫ
СПИСОК РЕБЕР И МЕТОК
  1      -  2(1.0);
  2      -  1(1.0);  3(1.0);  4(1.0);
  3      -  2(1.0);  4(1.0);  5(1.0);
  4      -  2(1.0);  3(1.0);  5(1.0);
  5      -  3(1.0);  4(1.0);

МАТРИЦА СЛОЕВ ГРАФА
   5 *   2   1   1
   1 *   1   2   1
   3 *   3   1   0
   4 *   3   1   0
   2 *   3   1   0
```

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	3	2.40	12	2.40	15.0	6.00	5	5	1.20	0.066	0.200	0.87	1.80	3.0[illegible]

#	16	17		18	19	20		21	22	23
1	3	0.60	0.60	8	3	2.00	2.00	1.60	2.40	0.125
2	2	-0.40	0.40	5	0	-1.00	1.00	1.00	2.20	0.20[illegible]
3	2	-0.40	0.40	5	0	-1.00	1.00	1.00	2.20	0.20[illegible]
4	2	-0.40	0.40	5	0	-1.00	1.00	1.00	2.20	0.20[illegible]
5	3	0.60	0.60	7	2	1.00	1.00	1.40	1.80	0.142

```
ЦЕНТР ГРАФА
   2   3   4
ПЕРИФЕРИЯ ГРАФА
   1   5
СЕРЕДИНА ГРАФА
   2   3   4
ЦЕНТР ТЯ ЕСТИ ГРАФА
   5

L-СПЕКТР ГРАФА
   2   1   1
   1   2   1
   3   1   0

ГРАФ G НА РИС.3          *2-1,3,4-5-3-1**
ПОРЯДОК ГРАФА   5 НОМЕРА ВЕРШИН      1    2    3    4    5
ВЕРШИНЫ НЕ ИМЕЮТ КООРДИНАТ
ВЕРШИНЫ ГРАФА НЕПОМЕЧЕНЫ
СПИСОК РЕБЕР И МЕТОК
  1      -  2(1.0);  3(1.0);
  2      -  1(1.0);  3(1.0);  4(1.0);
  3      -  1(1.0);  2(1.0);  5(1.0);
  4      -  2(1.0);  5(1.0);
  5      -  3(1.0);  4(1.0);

МАТРИЦА СЛОЕВ ГРАФА
   2 *   3   1
   3 *   3   1
   1 *   2   2
   4 *   2   2
   5 *   2   2
```

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	2	2.00	10	0.00	14.0	0.60	5	3	0.48	0.071	0.200	0.86	2.20	2.80

#	16	17	18	19	20	21	22	23
1	2	0.00 0.00	6	1	0.40 0.40	1.20	2.40	0.166
2	2	0.00 0.00	5	0	-0.60 0.60	1.00	2.20	0.200
3	2	0.00 0.00	5	0	-0.60 0.60	1.00	2.20	0.200
4	2	0.00 0.00	6	1	0.40 0.40	1.20	2.40	0.166
5	2	0.00 0.00	6	1	0.40 0.40	1.20	2.40	0.166

```
ЦЕНТР ГРАФА
   1   2   3   4   5
ПЕРИФЕРИЯ ГРАФА
   1   2   3   4   5
СЕРЕДИНА ГРАФА
   2   3
ЦЕНТР ТЯ ЕСТИ ГРАФА
   2   3

L-СПЕКТР ГРАФА
   3   1
   2   2
```