МАШИННЫЕ МЕТОДЫ ОБНАРУЖЕНИЯ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ, АНАЛИЗА СТРУКТУР И ПРОЕКТИРОВАНИЯ
(Вычислительные системы)

1982 год Выпуск 92

УДК 519.I

ОБ ОДНОМ ТИПЕ ЗВЕЗДНОЙ ТРАНЗИТИВНОСТИ

Л.Л.Великович

Во многих работах (см., например, [I,2]) изучаются графы, группы автоморфизмов которых обладают определенными свойствами транзитивности. В настоящей статье, продолжающей исследования, начатые [3-5], изучаются графы, группы автоморфизмов которых транзитивны на подграфах [8], состоящих из пары несмежных вершин и неинцидентной им звезды (там же).

Под графом $G = (V(G), X(G))$ будем понимать связный обыкновенный граф [7] с множеством вершин $V(G)$ и с множеством ребер $X(G)$. Группу автоморфизмов графа G будем обозначать через $\mathrm{Aut}\, G$. Вершины и ребра графа называют [8] его элементами.

Пусть R_0 - некоторое m-арное отношение на множестве вершин, а R_1 - некоторое n-арное отношение на множестве ребер графа G, инвариантные относительно автоморфизмов $(m,n \ge 1)$. Обозначим через $H(m,n,R_0,R_1,G)$ множество упорядоченных наборов $(u_1,\ldots,u_m, x_1,\ldots,x_n)$ различных элементов графа G, где $u_i \in V(G)$, $x_j \in X(G)$, причем ни одна вершина u_i не инцидентна ни одному ребру x_j $(1 \le i \le n,\ 1 \le j \le n)$, вершины $u_1,\ldots,u_m$ находятся между собой в отношении R_0, а ребра $x_1,\ldots,x_n$ - в отношении R_1. Обозначим через $H(\tilde{m},n,R_0,R_1,G)$ множество, полученное из множества $H(m,n,R_0,R_1,G)$ отождествлением всех наборов, отличающихся только порядком следования вершин.

В случае $m = 1$ $(n=1)$ условимся, что отношение R_0 (соответственно R_1) является тождественным отображением множества $V(G)$ (соответственно $X(G)$) на себя. Тождественное отображение множества $V(G)$ будем обозначать через ε_0, а множества $X(G)$ - через ε_1.

Группу подстановок, индуцируемую группой автоморфизмов графа G на множестве $H(m,n,R_0,R_1,G)$ ($H(\tilde{m},n,R_0,R_1,G)$), будем обозначать через $\Gamma(m,n,R_0,R_1,G)$ (соответственно через $\Gamma(\tilde{m},n,R_0,R_1,G)$) и называть (m,n,R_0,R_1) - неинцидентной (соответственно $(\tilde{m},n,R_0,R_1)$-

неинцидентной) группой графа G. Граф G назовем (m,n,R_0,R_1)-транзитивным (соответственно $(\widetilde{m},n,R_0,R_1)$-транзитивным), если группа $\Gamma(m,n,R_0,R_1,G)$ транзитивна [9] на множестве $H(m,n,R_0,R_1,G)$ (соответственно группа $\Gamma(\widetilde{m},n,R_0,R_1,G)$ транзитивна на множестве $H(\widetilde{m},n,R_0,R_1,G)$).

Будем говорить, что вершины $u_1,\dots,u_m$ находятся в отношении $\bar{\sigma}_0$, если любые две из них несмежны, и говорить, что ребра $x_1,\dots$ $\dots,x_n$ находятся в отношении σ_1, если все эти ребра инцидентны одной вершине (т.е. образуют звезду). Граф G назовем (m,n)-звездно транзитивным ($(\widetilde{m},n)$-звездно транзитивным), если G является (m,n,R_0,σ_1)-транзитивным (соответственно $(\widetilde{m},n,R_0,\sigma_1)$-транзитивным). Ранее автором рассматривался случай, когда $m=1$ [3-5]. В настоящей статье рассматривается случай $m = 2$, $R_0 = \bar{\sigma}_0$. Полностью описываются $(\widetilde{2},1)$-звездно транзитивные графы, а также $(\widetilde{2},n)$-звездно транзитивные регулярные [8] графы для любого n.

Неупорядоченную пару несмежных вершин графа назовем дыркой. Несмежные ребра графа будем называть параллельными.

Пусть $u \in V(G)$, $x \in X(G)$, где $x = w_1w_2$, причем вершина u и ребро x неинцидентны. Расстояние $\tilde{d}(u,x)$ между u и x определяется [6] как неупорядоченная пара $\{d(u,w_1),d(u,w_2)\}$. Пусть $(u,v;x) \in H(\widetilde{2},1,\bar{\sigma}_0,\varepsilon_1,G)$. Определим расстояние $\partial(u,v;x)$ между дыркой u,v и ребром x как неупорядоченную пару $\{\tilde{d}_1,\tilde{d}_2\}$, где $\tilde{d}_1 = \tilde{d}(u,x)$, $\tilde{d}_2 = \tilde{d}(v,x)$. Диапазоном ∂-расстояний графа G назовем множество $\Omega(G)$ неупорядоченных пар $\{\tilde{d}_1,\tilde{d}_2\}$, для каждой из которых в G существует тройка $(u,v;x) \in H(\widetilde{2},1,\bar{\sigma}_0,\varepsilon_1,G)$, для которой $\partial(u,v,x) = \{\tilde{d}_1,\tilde{d}_2\}$. Порядок множества $\Omega(G)$ будем называть широтой диапазона ∂-расстояний и обозначать $\omega(G)$.

ТЕОРЕМА I. *Граф G порядка $p \geq 4$ будет графом, у которого широта диапазона ∂-расстояний равна I тогда и только тогда, когда G принадлежит одному из следующих типов графов:* C_5; $K_{m,n}$ $(m+n=p)$; $K_2 \cdot K_3$; $K_3 \cdot K_3$; $rK_2 \cup \bar{K}_{p-2r}$ $(r \geq 1)$; P_5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\omega(G) = 1$. Легко видеть, что $\operatorname{diam} G \leq 3$. Пусть $\operatorname{diam} G = 2$. Имеются следующие возможности для $\Omega(G)$: I) $\{\{2,2\};\{2,2\}\}$; 2) $\{\{2,2\};\{I,2\}\}$; 3) $\{\{2,2\};\{I,I\}\}$; 4) $\{\{I,2\};\{I,2\}\}$; 5) $\{\{I,2\};\{I,I\}\}$; 6) $\{\{I,I\};\{I;I\}\}$. Рассмотрим их последовательно. Пусть $(u,v;x) \in H(\widetilde{2},1,\bar{\sigma}_0,\varepsilon_1,G)$, где $x = w_1w_2$.

I) $\Omega(G) = \{\{2,2\};\{2,2\}\}$. Так как $d(u,w_1) = d(u_1,w_2) =$

$= d(u, v) = 2$, то граф G содержит вершину t, которая смежна с вершинами u, w_1. Но $\partial(u, v, y) = \{\{I,2\}; \{2, d\}\}$, где $y = tw_1$. Следовательно, этот случай невозможен.

2) $\Omega(G) = \{\{2,2\}; \{I,2\}\}$. Как и в п.I устанавливаем, что граф содержит вершину t, которая смежна с вершинами u, w_1. Но тогда $\partial(u, w_2; y) = \{\{I,2\}; \{I, d\}\}$, где $y = tw_1$. Значит, этот случай невозможен.

3) $\Omega(G) = \{\{2,2\}; \{I,I\}\}$. Так же, как и в п.2 устанавливаем, что этот случай невозможен.

4) $\Omega(G) = \{\{I,2\}; \{I,2\}\}$. Пусть $G \neq C_5$. Предположим, что граф содержит треугольник $u_1 u_2 u_3$, и докажем индукцией по числу вершин, что $G = K_p$.

Пусть $p = 4$. Если допустить, что вершина v графа несмежна хотя бы с одной из вершин u_1, u_2, u_3, то диапазон ∂-расстояний графа содержал бы пару $\{I,I\}$, что невозможно. Значит, $G = K_4$.

Предположим, что утверждение верно при $p = n (n \geq 5)$. Пусть, далее, $p = n+1$. Удалим из графа некоторую вершину v. Тогда порядок полученного графа $G - v$ равен n. Значит, согласно предположению, $G - v = K_n$. Если допустить, что вершина v несмежна хотя бы с одной из вершин графа $G - v$, то диапазон ∂-расстояний графа G содержал бы пару $\{I,I\}$, что невозможно. Следовательно, $G = K_{n+1} = K_p$. Противоречие.

Значит, граф не содержит треугольников, а следовательно, и простых циклов длины 5 с диагоналями. Учитывая, что $G \neq C_5$, легко устанавливаем, что граф не содержит простых циклов длины 5 без диагоналей.

Пусть $u_1, u_2, u_3, u_4 \in V(G)$, причем вершина u_i смежна с вершиной $u_{i+1} (1 \leq i \leq 3)$. Тогда u_1 смежна с u_4, ибо в противном случае граф содержал бы простой цикл длины 5.

Пусть теперь c_{2n+1} - нечетный цикл графа G, длина которого не меньше 7, с множеством вершин $\{u_i\}$, $1 \leq i \leq 2n + 1$, где u_i смежна с u_{i+1}. Тогда вершина u_1 должна быть смежной с вершиной u_4, а значит, с вершиной u_6 и, следовательно, с вершиной u_8 и т.д. Поэтому u_1 должна быть смежной и с вершиной u_{2n}. Следовательно, граф G содержит треугольник $u_1 u_{2n+1} u_{2n}$, что невозможно. Итак, граф не содержит простых нечетных циклов и по теореме Кёнига [7,8], G - двудольный граф, а так как $\operatorname{diam} G = 2$, то $G = K_{m,n}$ - полный двудольный граф.

5) $\Omega(G) = \{\{I,2\}; \{I,I\}\}$. Если $p=4$, то, очевидно, $G=K_2\cdot K_3$. Пусть $(u, v; x) \in H(\widetilde{2},1, \bar{\sigma}_0, \varepsilon_1, G)$, где $x = w_1w_2$ и $\widetilde{d}(u, x) = \{I,I\}$, $vw_2 \in X(G)$. Тогда любая вершина графа, отличная от u, w_1, должна быть смежной с v.

Пусть $p = 5$ и пусть $t \in V(G)$, $t \notin \{u, v, w_1, w_2\}$. Предположим, что $w_1t \in X(G)$. Тогда из $(u, v; w_1 t) \in H(\widetilde{2},1, \bar{\sigma}_0, \varepsilon_1, G)$, $w_1 v \in X(G)$, следует, что $ut \in X(G)$. Если бы $w_2t \in X(G)$, то $(w_2, t, u, w_1) \in H(\widetilde{2},1,\bar{\sigma}_0,\varepsilon_1,G)$ и $\partial(w_2, t; u, w_1) = \{\{I,I\}; \{I,I\}\}$. Следовательно, $w_2t \in X(G)$. Но теперь $\partial(v,w_1;w_2t) = \{\{I,I\}; \{I,I\}\}$. Что невозможно. Значит, $w_1t \notin X(G)$. Поэтому $(t, w_1; v w_2) \in H(\widetilde{2},1,\bar{\sigma}_0, \varepsilon_1, G)$, и из $\widetilde{d}(w_1, w_2 v) = \{I,2\}$ вытекает, что $\widetilde{d}(t, v w_2) = \{I,I\}$, т.е. $w_2t \in X(G)$. Если бы $ut \in X(G)$, то $\partial(w_1, v, ut) = \{\{I,2\}; \{I,2\}\}$. Следовательно, $ut \notin X(G)$ и $G = K_3\cdot K_3$.

Пусть теперь $p \ge 6$ и $t_1, t_2 \in V(G)\setminus \{w_1, w_2, u, v\}$. Предположим, что вершины t_1 и t_2 не смежны. Тогда $\partial(t_1, t_2; u w_2) = \{\{I,2\}; \{I,I\}\}$. Следовательно, одна из вершин t_1, t_2 должна быть смежной с обеими вершинами u, w_2. Пусть этой вершиной будет t_1. Но тогда $\partial(u,v; t_1 w_2) = \{\{I,I\}; \{I,I\}\}$, что невозможно. Значит, вершины t_1 и t_2 смежны между собой. Имеем $\partial(v, w_1; t_1 t_2) = D(v, u; t_1 t_2) = \{\{I,I\};\{I,2\}\}$. Следовательно, $\widetilde{d}(w_1, t_1t_2) = \widetilde{d}(u, t_1 t_2) = \{I,2\}$. Стало быть, каждая из вершин u, w_1 смежна только с одной из вершин t_1, t_2. Поэтому подграф графа G, порожденный вершинами u_1, w_1, t_1, t_2, может быть лишь одного из двух видов: C_4; $K_2\cdot K_3$.

Допустим сначала, что этот подграф есть $K_2\cdot K_3$, и пусть ut_1, $ut_2 \in X(G)$. Имеем $\partial(w_1, t_1; w_2v) = \{\{I,2\}; \{I,I\}\}$. Но $\widetilde{d}(w_1, w_2v) = \{I,2\}$. Следовательно, $d(t_1, w_2v) = \{1,1\}$ и $t_1w_2 \in X(G)$. Но тогда $\partial(u,v,t_1,w_2) = \{\{I,I\}; \{I,I\}\}$. Противоречие. Значит, подграф, порожденный вершинами w_1, w_2, t_1, t_2, есть C_4. Пусть ut_1, $w_1t_2 \in X(G)$. Как и раньше, из рассмотрения тройки $(w_1, t_1; w_2v)$ вытекает, что $t_1 w_2 \in X(G)$. Но тогда $\partial(u,v; t_1 w_2) = \{\{I,I\}; \{I,I\}\}$, и опять приходим к противоречию. Таким образом, число вершин графа G не больше пяти, и, значит, либо $G = K_2\cdot K_3$, либо $G = K_3\cdot K_3$.

6) $\Omega(G) = \{\{I,I\};\{I,I\}\}$. Покажем, что любая вершина графа не смежна самое большее лишь с одной вершиной. Предположим, что вершина u не смежна с вершинами v_1, v_2, и пусть $u w_1v_1$, $u w_2v_2$ — две диаметральные цепи. Но тогда $\partial(u, v_1, x) = \{\{I,2\}; \{d_1, d_2\}\}$, где $x = w_2v_2$, что невозможно. Поэтому множество несмежных вершин графа G состоит из непересекающихся дырок. Если граф G содержит r дырок, то $G = rK_2 \cup \overline{K}_{p-2r}$.

Пусть $\operatorname{diam} G=3$. Предположим, что $G \neq P_4$, и пусть $u_1u_2u_3u_4$ – диаметральная цепь графа G. Вершина $v \neq u_i$ $(1 \le i \le 4)$ не может быть смежной с обеими вершинами u_1, u_4. Поэтому допустим, что v не смежна с u_1. Тогда $\partial(v,u_1; x_3) = \{\{2,3\}; \{d_1, d_2\}\} = \{\{1,2\}; \{1,2\}\} = \partial(u_1, u_4, x_2)$, где $x_i = u_i u_{i+1} (1 \le i \le 3)$. Пришли к противоречию с $\omega(G) = 1$, что и завершает доказательство.

Как непосредственное следствие из теоремы I вытекает

ТЕОРЕМА 2. Граф G порядка $p \ge 4$ будет $(\tilde{2},1)$-звездно транзитивным тогда и только тогда, когда широта диапазона ∂-расстояний графа G равна I.

ЗАМЕЧАНИЕ. В [I] среди четырех основных проблем комбинаторной математики отмечается следующая проблема транзитивности: для данной комбинаторной структуры найти множество численных условий регулярности, наличие которых с необходимостью влечет существование у группы автоморфизмов этой структуры определенных свойств транзитивности.

Теоремы I и 2 дают решение проблемы транзитивности для графов в одном специальном случае.

ТЕОРЕМА 3. Регулярный граф G степени $n \ge 2$ будет $(\tilde{2},n)$-звездно транзитивным тогда и только тогда, когда $G = K_{n,n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – регулярный степени $n (n \ge 2)$, $(\tilde{2},n)$-звездно транзитивный граф и пусть u – произвольная вершина графа G, а $N(u) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ – окрестность [8] вершины u. Пусть $x_i = uv_i \in X(G)$ $(i = 1,2\dots n)$ и $w_1 w_2$ – дырка графа G, не инцидентная ни одному из ребер x_i. Очевидно, наборы $(w_1w_2; x_1, x_2, \dots$ $\dots, x_n), (w_1w_2; x_i, x_j, \dots, x_n) \in H(\tilde{2}, n, \bar{\sigma}_0, \sigma_1, G)$, где $|\{i, j, \dots$ $\dots, k\}| = n$. Поэтому существует автоморфизм, переводящий первый из них во второй. При этом упорядоченная пара вершин (v_1, v_2) переходит в упорядоченную пару вершин (v_i, v_j). Значит, $\operatorname{Aut} G$ дважды транзитивна [9] на множестве $N(u)$, и либо $\langle N(u) \rangle = K_n$, либо $\langle N(u) \rangle = \overline{K_n}$. Если $\langle N(u) \rangle = K_n$, то $\langle N[u] \rangle = K_{n+1}$, а так как G – регулярный граф степени n, то $G = K_{n+1}$, что невозможно. Следовательно, $\langle N(u) \rangle = \overline{K_n}$.

Определим расстояние между вершиной u и не инцидентной ей дыркой $w_1 w_2$ как неупорядоченную пару $\{d(u,w_1); d(u,w_2)\} = \hat{d}(u; w_1 w_2)$.

Предположим, что $\operatorname{diam} G \geq 5$, и пусть u - конец диаметральной цепи $u\, v_i\, w_1\, w_2 w_3 w_4 \ldots$. Очевидно, наборы $(w_1, w_3;\, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(w_1, w_4;\, x_1, x_2, \ldots, x_n) \in H(\widetilde{2},\, n,\, \overline{\sigma}_0,\, \sigma_1, G)$. Поэтому они подобны и существует автоморфизм, переводящий тройку $(u;\, w_1,\, w_3)$ в тройку $(u;\, w_1, w_4)$, что невозможно, ибо $\overline{d}(u; w_1\, w_3) = \{2,4\} \neq \{2,5\} = \overline{d}(u;\, w_1, w_4)$. Поэтому $\operatorname{diam} G=4$.

Пусть $\operatorname{diam} G=4$ и $u\, v_i w_1 w_2 w_3$ - диаметральная цепь графа G. Так как $n \geq 2$, то существует ребро $w_3 t$, инцидентное вершине w_3 и отличное от $w_3 w_2$. Для звезды с центром в вершине w_3 существует не инцидентная ей дырка u, w_1. Поэтому, по ранее доказанному, $N(w_3) = \overline{K}_n$ и вершины t, w_2 не смежны. Наборы $(w_1, w_3;\, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(w_2, t;\, x_1, x_2, \ldots, x_n) \in H(\widetilde{2},\, n,\, \overline{\sigma}_0,\, \sigma_1, G)$. Значит, они подобны, и существует автоморфизм, переводящий тройку $(u,\, w_1,\, w_3)$ в тройку $(u,\, w_2,\, t)$, что невозможно, ибо $\overline{d}(u;\, w_1,\, w_3) = \{2,4\} \neq \{3,d\} = \overline{d}(u;\, w_2,\, t)$, где $d = d(u,t)$. Следовательно, $\operatorname{diam} G \neq 4$.

Предположим теперь, что $\operatorname{diam} G = 3$, и пусть $u\, v_i w_1\, w_2$ - диаметральная цепь графа G. Пусть $w_2 t_1$ - ребро графа, инцидентное вершине w_2 и отличное от $w_2\, w_1$. Если бы каждое из ребер, инцидентных вершине w_1, было инцидентно некоторой вершине из $N(u)$, то $\deg w_1 \geq n+1$. Поэтому существует ребро $w_1\, t_2$, где $t_2 \notin N(u)$. Вершины w_2 и t_2 не смежны, ибо в противном случае $N(w_2) \neq \overline{K}_n$. Наборы $(w_1, t_1;\, x_1, \ldots, x_n), (w_2, t_2;\, x_1, \ldots, x_n) \in H(\widetilde{2},\, n,\, \overline{\sigma}_0,\, \sigma_1, G)$. Поэтому существует автоморфизм, который первый набор переводит во второй. При этом тройка $(u,\, w_1, t_1)$ переходит в тройку $(u,\, w_2, t_2)$. Следовательно, $\overline{d}(u;\, w_1, t_1) = \{2, d_1\} = \{3,\, d_2\} = \overline{d}(u;\, w_2, t_2)$, где $d_1 = d(u,\, t_1)$, $d_2 = d(u,\, t_2)$. Значит, $d(u, t_1) = 3$, $d(u, t_2) = 2$. Наборы $(w_1, t_1;\, x_i, x_2, \ldots, x_n), (w_1, t_1;\, x_j;\, x_2, \ldots, x_n) \in H(\widetilde{2},\, n,\, \overline{\sigma}_0,\, \sigma_1, G)$. Поэтому существует автоморфизм, переводящий первый набор во второй. При этом автоморфизме вершина u неподвижна, вершина v_i переходит в вершину v_j и пара $\{w_1, t_1\}$ переходит в себя. Но $d(u, t_1) = 3 \neq 2 = d(u,\, w_2)$. Поэтому пара (u, t_1) не может перейти в пару $(u,\, w_1)$. Значит, при данном автоморфизме вершины w_1, t_1 неподвижны. Пара вершин (w_1, v_i) переходит в пару $(w_1,\, v_j)$. Но $w_1 v_i \in X(G)$, значит, и $w_1 v_j \in X(G)$. Итак, вершина w_1 смежна со всеми вершинами из $N(u)$. Пришли к противоречию. Следовательно, $\operatorname{diam} G \neq 3$.

Таким образом, $\operatorname{diam} G = 2$. Если бы $n = 2$, то либо $G = C_4$, либо $G = C_5$. Однако $H(\widetilde{2},\, 2, \overline{\sigma}_0,\, \sigma_1, C_4) = H(\widetilde{2}, 2,\, \overline{\sigma}_0,\, \sigma_1, C_5) = \emptyset$. Поэтому $n \geq 3$. Пусть u - вершина, $x_i = u\, v_i$ $(1 \leq i \leq n)$ - инцидентные ей ребра, w_1, w_2 – дырка, не инцидентная ни одному из ребер x_i.

Очевидно, $\vec{d}(u;\ w_1, w_2) = \{2,\ 2\}$. Рассмотрим несколько вариантов.

а) Предположим, что существует вершина $v_j \in N(u)$, смежная с каждой из вершин w_1, w_2. Так как наборы $(w_1, w_2;\ x_j,\ x_2, \ldots, x_n), (w_1;\ w_2;\ x_i; x_2, \ldots, x_n) \in H(\tilde{Z}, n, \bar{\sigma}_0, \sigma_1, G)$, то существует автоморфизм, переводящий первый из них во второй. При этом вершина v_j переходит в вершину v_i, а так как вершина v_j смежна с каждой из вершин w_1, w_2, то и вершина v_i смежна с каждой из этих вершин. Значит, каждая вершина из $N(u)$ смежна с обеими вершинами w_1, w_2. Поэтому каждая из вершин w_1, w_2 смежна только с вершинами из $N(u)$ и $N(w_1) = N(w_2) = N(u)$. Пусть $w \in V(G) \setminus (N[u] \cup \{w_1 w_2\})$. Очевидно, вершина w не смежна ни с одной из вершин u, w_1, w_2. Наборы $(w_1, w_2;\ x_1, x_2, \ldots, x_n), (w, w_1; x_1, x_2, \ldots, x_n) \in H(\tilde{Z}, n, \bar{\sigma}_0, \sigma_1, G)$. Поэтому существует автоморфизм, переводящий первый набор во второй. При этом автоморфизме вершины $v_i \in N(u)$ $(1 \le i \le n)$ неподвижны, а одна из вершин w_1, w_2 переходит в вершину w. Но для каждой из вершин w_1, w_2 имеем $N(w_1) = N(w_2) = N(u)$. Поэтому и $N(w) = N(u)$. Следовательно, G – полный двудольный граф. Учитывая регулярность G, получаем, что $G = K_{n,n}$ $(n \ge 3)$.

б) Допустим теперь, что не существует вершины из $N(u)$, смежной с каждой из вершин w_1, w_2. Так как $\vec{d}(u;\ w_1, w_2) = \{2, 2\}$, то существуют вершины $v_i, v_j \in N(u)$, первая из которых смежна с w_1, а вторая с w_2. Так как наборы $(w_1, w_2;\ x_i, x_j, x_3, \ldots, x_n), (w_1, w_2;\ x_k, x_l, x_3, \ldots, x_n) \in H(\tilde{Z}, n, \bar{\sigma}_0, \sigma_1, G)$ $(1 \le k, l \le n)$, то они подобны. Поэтому существует автоморфизм, переводящий упорядоченную пару (v_i, v_j) в упорядоченную пару (v_k, v_l). Значит, каждая из вершин v_k, v_l смежна только с одной из вершин w_1, w_2. Поэтому множество $N(u)$ можно разбить на два класса: $N(u) = N_1(u) \cup N_2(u)$, $N_1(u) \cap N_2(u) = \emptyset$, где $N_i(u)$ – множество вершин из $N(u)$, смежных с вершиной w_i $(i = 1, 2)$.

Предположим, что $|N_1(u)| \ne |N_2(u)|$, и пусть, например, $|N_1(u)| > |N_2(u)|$. Пусть $v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{ik} \in N_1(u), v_{j1}, v_{j2}, \ldots, v_{jl} \in N_2(u)$, где $k > l$. Очевидно, наборы $(w_1, w_2; x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}, \ldots, x_{in})$ $(w_1, w_2;\ x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jl}, \ldots, x_{ik}, \ldots, x_{in}) \in H(\tilde{Z}, n, \sigma_0, \sigma_1, G)$. Поэтому существует автоморфизм, переводящий первый из них во второй, при этом ребро x_{ik}, а значит, и вершина x_{ik} остаются неподвижными. Если при этом автоморфизме вершина w_1 остается неподвижной, то пара смежных вершин w_1, w_{i1} переходит в пару несмежных вершин w_1, v_{j1}, что невозможно. Если же вершина w_1 переходит в вершину w_2, то пара смежных вершин w_1, v_{ik} переходит в пару несмежных вершин w_2, v_{ik}, что также невозможно. Поэтому $|N_1(u)| = |N_2(u)| = \frac{n}{2}$. Следовательно, n - четное число.

Пусть $w_r t_s$ $(r = 1,2,\ 1 \le s \le n)$ - ребра, инцидентные вершинам w_1, w_2 и отличные от ребер $w_r\ w_s$. Очевидно, ни одно из ребер $w_1 t_s$ не инцидентно ни одной вершине из $N_2(u)$. Поэтому для звезды с центром в вершине w_1 существует не инцидентная ей дырка, состоящая из любых двух вершин из $N_2(u)$. Следовательно, $N(w_1) = \bar{K}_n$. Теперь имеем: вершина $t_s \in N(w_1)$ не смежна ни с одной вершиной из $N_1(u)$, а так как $d(u,t_s) = 2$, то вершина t_s смежна с некоторой вершиной $v_m \in N_2(u)$. Как и для вершины w_1, легко устанавливаем, что $N(w_2) = \bar{K}_n$. Поэтому вершины t_s и w_2 не смежны. Дырка w_2, t_s не инцидентна ни одному из ребер x_i $(1 \le i \le n)$. Но тогда, как и раньше, легко устанавливаем, что вершина w_2 смежна со всеми вершинами из $N(u)$. Значит, существует вершина из $N(u)$, смежная с обеими вершинами w_1, w_2. Пришли к противоречию. Следовательно, этот случай невозможен. Теорема полностью доказана.

Литература

I. BIGGS N. Finite groups of automorphisms. - Cambridge:Cambr. Univ.Press,1971. - 117 p.

2. BIGGS N. Algebraic graph theory. - Cambridge: Cambr.Univ. Press,1974. - 170 p.

3. ВЕЛИКОВИЧ Л.Л. Об одном представлении группы автоморфизмов графа. -Деп. ВИНИТИ № 248-75 Деп. - I2 с.

4. ВЕЛИКОВИЧ Л.Л. Об индуцированных группах графа. -Всесоюз. алгебраич. симпозиум. Тез.докл. Гомель, 1975, с. 384-385.

5. ВЕЛИКОВИЧ Л.Л. Звездно транзитивные графы. -Мат. заметки. 1980, т. 28, вып. 2, с. 265-270.

6. ВЕЛИКОВИЧ Л.Л. О диапазонах графа. -Всесоюз. алгебраич. симпозиум. Тез. докл. Гомель, 1975, с. 386-387.

7. ЗЫКОВ А.А. Теория конечных графов. -Новосибирск: Наука, 1969. - 543 с.

8. ХАРАРИ Ф. Теория графов. -М.: Мир, 1969. - 300 с.

9. WIELANDT H. Finite permutation groups. - New York-London: Academic.Press,1964. - 114 p.

Поступила в ред.-изд.отд.
I сентября 1981 года