МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ
(Вычислительные системы)
1982 год Выпуск 93

УДК 519.65

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ СПЛАЙНОВ ЧЕТВЕРТОЙ И ПЯТОЙ СТЕПЕНЕЙ

Ю.С. Волков

1. Пусть на отрезке $[a,b]$ задана сетка Δ: $a=x_0<x_1<\ldots<x_N=b$, $h_i=x_{i+1}-x_i$, $i=0,1,\ldots,N-1$, с характеристикой $\rho=\max\{h_i/h_j:\ |i-j|=1;\ 0\le i,j\le N-1\}$ и в узлах сетки известны значения непрерывной, $(b-a)$-периодической функции $f(x_i)=f_i$, $i=0,1,\ldots,N$.

Функцию $S(x)\in C^3[a,b]$, удовлетворяющую условиям

$$S(x_i)=f_i,\ i=0,1,\ldots,N;\quad S^{(k)}(a)=S^{(k)}(b),\ k=1,2,3,4, \tag{1}$$

будем называть интерполяционным (периодическим) сплайном четвертой степени, если на каждом из отрезков

$$\left[a,\frac{x_0+x_1}{2}\right],\ \left[\frac{x_{i-1}+x_i}{2},\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right],\ i=1,\ldots,N-1,\ \left[\frac{x_{N-1}+x_N}{2},b\right]$$

она является полиномом четвертой степени.

Функцию $S(x)\in C^4[a,b]$, удовлетворяющую условиям (1), будем называть интерполяционным (периодическим) сплайном пятой степени, если на отрезках $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,\ldots,N$, она является полиномом пятой степени. В [1] доказано, что сплайн пятой степени существует и единствен.

В настоящей работе найдены необходимые условия равномерной сходимости интерполяционных сплайнов четвертой и пятой степеней в терминах введенной характеристики сетки. Попутно исследуется существование и единственность сплайна четвертой степени. Отметим, что для параболических и кубических сплайнов вопрос о сходимости полностью изучен в [2-4].

2. На отрезке $[x_i,x_{i+1}]$ запишем интерполяционный сплайн четвертой степени $S(x)$ в виде

$$S(x) = f_i + m_i(x-x_i) + M_i(x-x_i)^2 + \alpha_i(x-x_i)^3 +$$
$$+ \beta_i(x-x_i)^4 + \gamma_i\left(x - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)_+^4, \qquad (2)$$

где $(x-\xi)_+ = \max\{0,(x-\xi)\}$. Потребовав, чтобы $S(x)$, $S'(x)$ и $S'''(x)$ были непрерывны в точке x_{i+1}, находим

$$\left.\begin{aligned}
M_i &= \frac{12}{5}\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i^2} - \frac{7}{10}\frac{m_{i+1}}{h_i} - \frac{17}{10}\frac{m_i}{h_i} + \frac{1}{10}\alpha_{i+1}h_i - \frac{2}{5}\alpha_i h_i,\\
\beta_i &= \frac{8}{5}\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i^4} + \frac{4}{5}\frac{m_{i+1}}{h_i^3} + \frac{4}{5}\frac{m_i}{h_i^3} - \frac{3}{20}\frac{\alpha_{i+1}}{h_i} - \frac{13}{20}\frac{\alpha_i}{h_i},\\
\gamma_i &= \frac{16}{5}\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i^4} - \frac{8}{5}\frac{m_{i+1}}{h_i^3} - \frac{8}{5}\frac{m_i}{h_i^3} + \frac{4}{5}\frac{\alpha_{i+1}}{h_i} + \frac{4}{5}\frac{\alpha_i}{h_i}.
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Из условий непрерывности $S''(x)$ и $S^{IV}(x)$ в точке x_{i+1}, учитывая (3), относительно величин m_i и α_i получаем систему из $2N$ уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{7m_{i-1}}{h_{i-1}} + 17\left(\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i}\right)m_i + \frac{7m_{i+1}}{h_i} - h_{i-1}\alpha_{i-1} + 4(h_{i-1}+h_i)\alpha_i - h_i\alpha_{i+1} = g_i^{(1)},\\
&\frac{16m_{i-1}}{h_{i-1}^3} + 16\left(\frac{1}{h_{i-1}^3} + \frac{1}{h_i^3}\right)m_i + \frac{16m_{i+1}}{h_i^3} - \frac{3\alpha_{i-1}}{h_{i-1}} - 13\left(\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i}\right)\alpha_i - \frac{3\alpha_{i+1}}{h_i} = g_i^{(2)},
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

где

$$g_i^{(1)} = 24\left(\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i^2} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}^2}\right), \quad g_i^{(2)} = 32\left(\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i^4} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}^4}\right),$$

$i=1,2,\ldots,N$; $h_0=h_N$; $m_{N+j}=m_j$, $\alpha_{N+j}=\alpha_j$, $f_{N+j}=f_j$, $j = 0,1$.

Сделав замену $u_i = \dfrac{m_i}{\sqrt{h_i h_{i-1}}}$, $v_i = \sqrt{h_i h_{i-1}}\,\alpha_i$, $t_i = \sqrt{\dfrac{h_i}{h_{i-1}}}$, запишем эту систему в матричной форме

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^{(1)} \\ g^{(2)} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 17\left(t_1+\frac{1}{t_1}\right) & 7t_2 & 0 & \ldots & 0 & \frac{7}{t_N} \\ \frac{7}{t_1} & 17\left(t_2+\frac{1}{t_2}\right) & 7t_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 7t_1 & 0 & 0 & \ldots & \frac{7}{t_{N-1}} & 17\left(t_N+\frac{1}{t_N}\right) \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 4\left(t_1+\frac{1}{t_1}\right) & -\frac{1}{t_2} & 0 & \ldots & 0 & -t_N \\ -t_1 & 4\left(t_2+\frac{1}{t_2}\right) & -\frac{1}{t_3} & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{1}{t_1} & 0 & 0 & \ldots & -t_{N-1} & 4\left(t_N+\frac{1}{t_N}\right) \end{bmatrix},$$

$$C = 16\begin{bmatrix} t_1^3+\frac{1}{t_1^3} & \frac{t_2}{t_1^2} & 0 & \ldots & 0 & \frac{t_1^2}{t_N} \\ \frac{t_2^2}{t_1} & t_2^3+\frac{1}{t_2^3} & \frac{t_3}{t_2^2} & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{t_1}{t_N^2} & 0 & 0 & \ldots & \frac{t_N^2}{t_{N-1}} & t_N^3+\frac{1}{t_N^3} \end{bmatrix},$$

$$D = -\begin{bmatrix} 13\left(t_1+\frac{1}{t_1}\right) & \frac{3}{t_1^2 t_2} & 0 & \ldots & 0 & 3t_1^2 t_N \\ 3t_1 t_2^2 & 13\left(t_2+\frac{1}{t_2}\right) & \frac{3}{t_2^2 t_3} & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{3}{t_N^2 t_1} & 0 & 0 & \ldots & 3t_{N-1}t_N^2 & 13\left(t_N+\frac{1}{t_N}\right) \end{bmatrix},$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix}, \quad g^{(1)} = \begin{bmatrix} g_1^{(1)} \\ g_2^{(1)} \\ \vdots \\ g_N^{(1)} \end{bmatrix}, \quad g^{(2)} = \begin{bmatrix} h_N h_1 g_1^{(2)} \\ h_1 h_2 g_2^{(2)} \\ \vdots \\ h_{N-1} h_N g_N^{(2)} \end{bmatrix}.$$

ЛЕММА. Если выполнено ограничение $\rho \le (3+\sqrt{129})/6 \approx 2.39$, то интерполяционный сплайн четвертой степени существует и единствен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, достаточно показать, что при некоторых $\mu, \lambda \neq 0$ матрица

$$\begin{bmatrix} A + \mu B & \lambda B \\ C + \mu D & \lambda D \end{bmatrix}$$

не вырождена. Выберем параметры μ и λ из условий диагонального преобладания в этой матрице, что эквивалентно неравенствам

$$r_i^{(1)} = \left|(17+4\mu)\left(t_i+\frac{1}{t_i}\right)\right| - \left|\frac{7}{t_{i-1}} - \mu t_{i-1}\right| - \left|7t_{i+1} - \frac{\mu}{t_{i+1}}\right| - \lambda t_{i-1} - \frac{\lambda}{t_{i+1}} -$$

$$- 4\lambda\left(t_i + \frac{1}{t_i}\right) > 0,$$

$$r_i^{(2)} = 13\lambda\left(t_i+\frac{1}{t_i}\right) - 3\lambda t_i^2 t_{i-1} - \frac{3\lambda}{t_{i+1}t_i^2} - \left|\frac{16t_i^2}{t_{i-1}} - 3\mu t_i^2 t_{i-1}\right| -$$

$$- \left|16\left(t_i^3 + \frac{1}{t_i^3}\right) - 13\mu\left(t_i+\frac{1}{t_i}\right)\right| - \left|16\frac{t_{i+1}}{t_i^2} - \frac{3\mu}{t_{i+1}t_i^2}\right| > 0.$$

Пусть μ и λ удовлетворяют ограничениям

$$\frac{16}{13}\left(\rho - 1 + \frac{1}{\rho}\right) \le \mu \le \frac{16}{3\rho}, \quad \lambda > 0, \ \lambda - \mu < \frac{16}{3\rho}.$$

Эти неравенства имеют смысл при $\rho \le (3+\sqrt{129})/6$. Тогда

$$r_i^{(1)} = (17+4\mu-4\lambda)\left(t_i+\frac{1}{t_i}\right) - \frac{7}{t_{i-1}} + (\mu-\lambda)t_{i-1} - 7t_{i+1} + \frac{\mu-\lambda}{t_{i+1}}.$$

Учитывая, что $\frac{1}{\sqrt{\rho}} \le t_i \le \sqrt{\rho}$, $(r_i^{(1)})'_{t_{i-1}} > 0$, $(r_i^{(1)})'_{t_{i+1}} < 0$ и

$(r_i^{(1)})'_{t_i} = 0$ при $t_i = 1$, имеем

$$r_i^{(1)} \geq 34 - 14\sqrt{\rho} - (\lambda-\mu)\left(\frac{2}{\sqrt{\rho}} + 8\right). \qquad (6)$$

Аналогично

$$r_i^{(2)} \geq 16\left(t_i^3+\frac{1}{t_i^3}\right)-16\sqrt{\rho}\left(t_i^2+\frac{1}{t_i^2}\right)+\left[\frac{3}{\sqrt{\rho}}\left(t_i^2+\frac{1}{t_i^2}\right)-13\left(t_i+\frac{1}{t_i}\right)\right](\mu-\lambda). \quad (7)$$

Полагая в (6) и (7) $\lambda-\mu = (17-7\sqrt{\rho})/\left(4+\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right)-\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало (например, $\lambda-\mu = (17-7\sqrt{\rho})/5$), получаем $r_i^{(1)} > 0$, $r_i^{(2)} > 0$, т.е. система (5) имеет единственное решение. Что и требовалось.

3. На промежутке $[a, b]$ рассмотрим последовательность разбиений Δ_k: $a = x_{k,0} < x_{k,1} < \ldots < x_{k,N_k} = b$, $k = 0,1,\ldots$; $h_{k,i} = x_{k,i+1}-x_{k,i}$, удовлетворяющую условию $\max_i \{h_{k,i}\} \to 0$ при $k \to \infty$. Пусть оператор $P_k : C[a,b] \to C[a,b]$ ставит в соответствие функции $f(x)$ интерполяционный сплайн $S_k(f; x)$ на сетке Δ_k. Согласно теореме Банаха-Штейнхауза [5, с.269], необходимым условием равномерной сходимости последовательности $\{S_k(f; x)\}$ к функции $f(x)$ является ограниченность последовательности $\{\| P_k \|\}$.

ТЕОРЕМА. При любом $\rho > \rho^* \approx 1.592$ существует последовательность сеток $\{\Delta_k\}$, для которой $\|P_k\| \to \infty$ при $k \to \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разделим $[a,b]$ на $\nu = 2k+1$ равных частей длиной $H_k = (b-a)/\nu$. На каждом из отрезков $[a + lH_k, a+(l+1)H_k]$, $l = 0,1,\ldots,2k$, построим разбиение $a + lH_k = x_{k,l\nu} < x_{k,l\nu+1} < \ldots$

$\ldots < x_{k,l\nu+\nu} = a+(l+1)H_k$ так, что $h_{k,j} = \rho^{j-l\nu}h_k$, $j = l\nu,\ldots,l\nu+k$; $h_{k,j} = \rho^{2k-j+1}\, h_k$, $j = l\nu+k+1,\ldots,l\nu+2k$, где $h_k = H_k/(2+2\rho+\ldots$ $\ldots+2\rho^{k-1}+\rho^k)$.

Очевидно, построенная таким образом последовательность сеток Δ_k удовлетворяет условиям $\max_{|i-j|=1}\{h_{k,i}/h_{k,j}\} \leq \rho$, $\max_i\{h_{k,i}\} \to 0$ при $k \to \infty$.

Периодический сплайн четвертой степени, интерполирующий $f(x)$, может быть записан в виде $S_k(f;x) = \sum_i f_i F_k^i(x)$, где $F_k^i(x)$ – фундаментальные периодические сплайны четвертой степени со свойством $F_k^i(x_{k,j}) = \delta_{ij}$.

Имеем

$$\|P_k\| = \sup_{\|f(x)\|_C=1} \| S_k(f;x)\|_C = \max_{a\le x \le b} \sum_i |F_k^i(x)| >$$

$$> \sum_{l=0}^{\nu} \left|F_k^{l\nu}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \ge \left| \sum_{l=0}^{\nu} F_k^{l\nu}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|.$$

Функция $\varphi(x) = \sum_{l=0}^{\nu} F_k^{l\nu}(x)$ является сплайном четвертой степени на $[a,b]$.

Дальнейшие рассуждения существенно опираются на единственность сплайна четвертой степени. Согласно доказанной выше лемме это имеет место при $\rho \le (3+\sqrt{129})/6$.

Построим на интервале $[a+kH_k,\ a+(k+1)H_k]$ периодический сплайн периода H_k, принимающий на концах этого интервала значение 1, а во всех внутренних узлах 0. Продолжим его по периодичности на $[a,b]$. В силу единственности $\varphi(x)$, полученный сплайн совпадет с $\varphi(x)$ и тем самым функцию $\varphi(x)$ можно рассматривать как периодический сплайн на отрезке $[a+kH_k,\ a+(k+1)H_k]$.

Функция $\varphi(x)$ симметрична относительно точки $(a+b)/2$. Поэтому если обозначить $z_i=h_{k,k\nu+i}\varphi'(x_{k,k\nu+i})$, $y_i=h^3_{k,k\nu+i}\varphi'''(x_{k,k\nu+i})$, то

$$z_i = -z_{\nu-i}/\rho, \quad y_i = -y_{\nu-i}/\rho, \quad i = 0,1,\dots,k. \tag{8}$$

Из формул (2)-(3) для сплайна $\varphi(x)$ определяем

$$\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{z_k}{4} - \frac{y_k}{32}.$$

Следовательно, чтобы оценить норму $\|P_k\|$ снизу, достаточно вычислить величины z_k и y_k. Из условий периодичности и из (8) находим $z_0 = z_\nu = y_0 = y_\nu = 0$. Учитывая это обстоятельство, а также (8), исключая неизвестные y_i, из (4) получаем

$$y_k = -R_1 z_k - R_2 z_{k-1}, \tag{9}$$

$$a_1z_1+a_2z_2+a_3z_3 = g_1, \tag{10а}$$

$$b_2z_1+b_3z_2+b_4z_3+b_5z_4=g_2, \tag{10б}$$

$$b_1z_{i-2}+b_2z_{i-1}+b_3z_i+b_4z_{i+1}+b_5z_{i+2}=0,\ i=3,\dots,k-2, \tag{10в}$$

$$b_1z_{k-3}+b_2z_{k-2}+b_3z_{k-1}+(b_4-b_5)z_k=0, \tag{10г}$$

$$a_4 z_{k-2} + a_5 z_{k-1} + a_6 z_k = 0, \tag{10д}$$

где

$$R_1 = \frac{\rho^3(6+7\rho)}{(\rho+1)(2+3\rho)}, \quad R_2 = \frac{\rho^4}{(\rho+1)(2+3\rho)},$$

$$a_1 = \rho^3(204 + 926\rho + 1773\rho^2 + 1761\rho^3 + 885\rho^4 + 176\rho^5),$$

$$a_2 = \rho(84 + 367\rho + 647\rho^2 + 580\rho^3 + 195\rho^4),$$

$$a_3 = 12 + 13\rho,$$

$$a_4 = \rho^6(27\rho^2 + 66\rho + 32),$$

$$a_5 = \rho^2(480 + 1934\rho + 3128\rho^2 + 2561\rho^3 + 1083\rho^4 + 189\rho^5),$$

$$a_6 = 832 + 3372\rho + 6258\rho^2 + 5594\rho^3 + 2535\rho^4 + 459\rho^5),$$

$$b_1 = \rho^5,$$

$$b_2 = \rho(1+\rho)(15 + 16\rho + 7\rho^2),$$

$$b_3 = 17/\rho^2 + 57/\rho + 82 + 57\rho + 17\rho^2,$$

$$b_4 = (7/\rho^2 + 16/\rho + 15)(1 + 1/\rho)/\rho,$$

$$b_5 = 1/\rho^5,$$

$$g_1 = -8\rho^6(99 + 228\rho + 179\rho^2 + 44\rho^3),$$

$$g_2 = -8\rho^5.$$

Решение разностных уравнений (10в) можно записать в виде

$$z_i = C_1\omega_1^i + C_2\omega_2^i + C_3\omega_3^i + C_4\omega_4^i, \quad i = 1,2,\ldots,k, \tag{11}$$

где ω_j – корни уравнения

$$\frac{1}{\rho^5}\omega^4 + \frac{1}{\rho}\left(1+\frac{1}{\rho}\right)\left(15+16\frac{1}{\rho}+7\frac{1}{\rho^2}\right)\omega^3 + \left(17\frac{1}{\rho^2}+57\frac{1}{\rho}+82+57\rho+17\rho^2\right)\omega^2 +$$
$$+ \rho(1+\rho)(15+16\rho+7\rho^2)\omega + \rho^5 = 0. \tag{12}$$

Легко проверить, что при любом $\rho \geq 1$ корни ω_j вещественны, отрицательны и простые. Пусть $\omega_1 > \omega_2 > \omega_3 > \omega_4$. Потребовав, чтобы решение (11) удовлетворяло (10г) и (10д), получаем

$$\left.\begin{aligned} C_1\omega_1^k p_1 + C_2\omega_2^k p_2 + C_3\omega_3^k p_3 + C_4\omega_4^k p_4 = 0, \\ C_1\omega_1^k p_5 + C_2\omega_2^k p_6 + C_3\omega_3^k p_7 + C_4\omega_4^k p_8 = 0, \end{aligned}\right\}$$

где $p_j = -b_5(1+\omega_j)$, $p_{j+4} = a_4\omega_j^{-2} + a_5\omega_j^{-1} + a_6$, $j = 1,2,3,4$. Отсюда находим

$$C_3 = \left(\frac{\omega_1}{\omega_3}\right)^k q_1 C_1 + \left(\frac{\omega_2}{\omega_3}\right)^k q_2 C_2, \; C_4 = \left(\frac{\omega_1}{\omega_4}\right)^k q_3 C_1 + \left(\frac{\omega_2}{\omega_4}\right)^k q_4 C_2,$$

где $q_1=(p_3p_4-p_1p_8)/q$, $q_2=(p_6p_4-p_2p_8)/q$, $q_3 = (p_1p_7 - p_5p_3) / q$, $q_4 = (p_2p_7 - p_6p_3)/q$, $q = p_8p_3 - p_4p_7$.

Таким образом,

$$z_i = C_1\left(\omega_1^i + q_1\left(\frac{\omega_1}{\omega_3}\right)^k \omega_3^i + q_3\left(\frac{\omega_1}{\omega_4}\right)^k \omega_4^i\right) +$$

$$+ C_2\left(\omega_2^i + q_2\left(\frac{\omega_2}{\omega_3}\right)^k \omega_3^i + q_4\left(\frac{\omega_2}{\omega_4}\right)^k \omega_4^i\right), \quad i=1,2,\ldots,k. \qquad (13)$$

Используя (9) и (I3), в итоге имеем

$$\|P_k\| > \left|\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| = |\omega_2|^k \left|C_1K_1\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^k + C_2K_2\right|,$$

где

$$K_1 = \left(\frac{1}{4} + \frac{R_1}{32}\right)\left(1+q_1+q_3\right) + \frac{R_2}{32}\left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{q_1}{\omega_3} + \frac{q_3}{\omega_4}\right),$$

$$K_2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{R_1}{32}\right)\left(1+q_2+q_4\right) + \frac{R_2}{32}\left(\frac{1}{\omega_2} + \frac{q_2}{\omega_3} + \frac{q_4}{\omega_4}\right).$$

Потребуем, чтобы величины z_1, z_2, z_3, z_4 , определяемые формулой (I3), удовлетворяли уравнениям (I0а), (I0б). Переходя в этих уравнениях к пределу при $k \to \infty$, приходим к системе

$$\left.\begin{aligned} \tilde{C}_1\sigma_1 + \tilde{C}_2\sigma_2 &= g_1 \\ \tilde{C}_1\sigma_3 + \tilde{C}_2\sigma_4 &= g_2 \end{aligned}\right\},$$

где $\sigma_j = a_1\omega_j + a_2\omega_j^2 + a_3\omega_j^3$, $\sigma_{j+2} = -b_1$, $\tilde{C}_j = \lim\limits_{k\to\infty} C_j$, $j = 1,2$.

Расчеты, выполненные с помощью ЭВМ, показывают, что $\tilde{C}_2K_2 \neq 0$. Поэтому если k достаточно велико, то $\|P_k\| > c|\omega_2|^k$, где $c \neq 0$.

Значит, последовательность $\{\|P_k\|\}$ будет неограниченной, если $|\omega_2| > 1$. Это равносильно требованию $\rho > \rho^* \approx 1.592$, где ρ^* таково, что $\omega_2 = -1$.

Тем самым утверждение теоремы доказано при $\rho \le (3 + \sqrt{129})/6$. Однако выбирая последовательность сеток так же, как в [2], это ограничение можно снять. При этом характер рассуждений не меняется, но значительно усложняются выкладки. Такое исследование проведено в дипломной работе автора, выполненной под руководством В.Л.Мирошниченко.

4. Рассуждения, проделанные выше относительно сплайнов четвертой степени, можно перенести на сплайны пятой степени. В результате вместо уравнения (II) получаем

$$\frac{1}{\rho^5}\omega^4 + \frac{1}{\rho}\left(1+\frac{1}{\rho}\right)\left(4+5\frac{1}{\rho}+4\frac{1}{\rho^2}\right)\omega^3 + \left(6\frac{1}{\rho^2}+16\frac{1}{\rho}+22+16\rho+6\rho^2\right)\omega^2 +$$

$$+\ \rho(1+\rho)(4+5\rho+4\rho^2)\omega + \rho^5 = 0 .$$

Это уравнение имеет корни $\omega_4 < \omega_3 < \omega_2 < \omega_1 < 0$. Необходимое условие равномерной сходимости сплайнов пятой степени есть $\rho > \rho^* \approx$ ≈ 1.416, где ρ^* вычисляется из условия $\omega_2 = -1$.

Литература

I. АЛБЕРГ Дж., НИЛЬСОН Э., УОЛШ Дж. Теория сплайнов и ее приложения. -М.: Мир, 1972. - 316 с.

2. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. -М.: Наука, 1980. - 352 с.

3. ЗМАТРАКОВ Н.Л. Сходимость интерполяционного процесса для параболических и кубических сплайнов. -Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1975, т.138, с. 71-93.

4. MARSDEN M.J. Cubic spline interpolation of continuous functions.- J.Approx.Theory, 1974, v.10, N 2, p.103-111.

5. ЛОРАН П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. -М.: Мир, 1969. - 496 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
6 апреля 1982 года