МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ
(Вычислительные системы)
1982 год Выпуск 93

УДК 519.65

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СПЛАЙНОВ НЕЧЕТНОЙ СТЕПЕНИ И АППРОКСИМАЦИЯ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Б.С. Киндалев

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана равномерная сетка Δ: $x_i = a + ih$, $h = (b-a)/N$, $i=0,1,\dots,N$, в узлах которой известны значения $f_i = f(x_i)$ периодической с периодом $(b-a)$ достаточно гладкой функции $f(x)$. Обозначим через $S(x)$ полиномиальный сплайн степени $2r+1$, $r=1,2,\dots$, дефекта I, интерполирующий функцию $f(x)$ в узлах сетки Δ, т.е.

a) $S(x)$ на каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ совпадает с полиномом степени $2r+1$;

в) $S(x) \in C^{2r}[a,b]$;

c) $S(x_i) = f_i$, $i = 0,1,\dots,N$.

Предполагается, что сплайн $S(x)$ – периодический, т.е. удовлетворяет краевым условиям вида: $S^{(k)}(a) = S^{(k)}(b)$, $k = 1,2,\dots,2r$.

Работа посвящена построению некоторых асимптотических формул для сплайна $S(x)$ и получению на их основе формул для аппроксимации производных функции $f(x)$.

Отметим, что для сплайнов третьей и пятой степеней ($r = 1,2$) вопросы, связанные с построением, обоснованием и применением асимптотических формул исследовались в ряде работ. Случай $r=1$ достаточно полно изложен в [I] и в [2], результаты для $r=2$ содержатся в [3,4].

В §I настоящей работы, кроме известных, приводятся новые свойства коэффициентов в линейных соотношениях, связывающих значения сплайна и его производных в узлах сетки Δ. Изложенный в этом параграфе материал носит вспомогательный характер.

Основные результаты содержатся в §2. Здесь найдено асимптотическое разложение для $S^{(2r)}(x_i)$ по степеням шага сетки h и на его основе для $S^{(2r)}(x)$ и $S^{(2r+1)}(x)$ получены асимптотические формулы. Из них, в частности, следует, что $S^{(2r)}(x) - f^{(2r)}(x) = O(h^3)$, если $x = x_i + (1/2\pm\sqrt{3}/6)h$, и $S^{(2r+1)}(x) - f^{(2r+1)}(x) = O(h^2)$, если $x = x_i + h/2$, в то время как при всех других x имеем $S^{(2r)}(x) - f^{(2r)}(x) = O(h^2)$, $S^{(2r+1)}(x) - f^{(2r+1)}(x) = O(h)$. Выведено асимптотическое выражение для скачка старшей производной сплайна, из которого вытекает соотношение $[S^{(2r+1)}(x_i + 0) - S^{(2r+1)}(x_i - 0)]/h = f^{(2r+2)}(x_i) + O(h^{2r+2})$.

В §3 строятся формулы для аппроксимации $(2r+k)$-й $(k=0,1,\ldots)$ производной функции $f(x)$. Во всех полученных формулах указаны константы при главных членах погрешности.

Хотя в настоящей работе рассматриваются только периодические сплайны, результаты могут быть распространены и на непериодический случай методом, предложенным в [I].

§I. Некоторые свойства коэффициентов в линейных соотношениях, связывающих сплайн и его производные

Предполагая, что сетка Δ периодически продолжена, запишем, следуя работе [4], для $S(x)$ соотношения:

$$\frac{1}{(2r+1)!}\sum_{j=0}^{2r} C^{(0)}_{j,2r+1} S^{(2r)}_{k-r+j} = \frac{1}{h^{2r}}\sum_{j=0}^{2r} C^{(2r)}_{j,2r+1} S_{k-r+j}, \qquad (1.1)$$

$$\frac{1}{(2r+1)!}\sum_{j=0}^{2r} C^{(0)}_{j,2r+1} \beta_{k-r+j} = \frac{1}{h^{2r+2}}\sum_{j=-1}^{2r+1} C^{(2r+2)}_{j+1,2r+3} S_{k-r+j}, \qquad (1.2)$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где обозначено $S_i = S(x_i)$, $S_i^{(2r)} = S^{(2r)}(x_i)$, $\beta_i = [S^{(2r+1)}(x_i+0) - S^{(2r+1)}(x_i-0)]/h$; $C^{(s)}_{j,l} = \nabla^{l+1}(l-j)_+^{l-s}$, $s = 0, l-1$; $z_+ = (z+|z|)/2$. Оператор ∇ является оператором разности назад. Положим

$$\gamma^{(s)}_{t,r} = \frac{1}{t!}\sum_{j=0}^{2r} C^{(s)}_{j,2r+1}(j-r)^t, \quad s = 0,2r; \quad t=0,1,\ldots \qquad (1.3)$$

Согласно [5], имеют место равенства

$$\gamma^{(s)}_{t,r} = 0, \text{ если } \quad t < s, \text{ либо } \quad s+t \text{ нечетно}; \tag{1.4}$$

$$\gamma^{(s)}_{s+2m,r} = \frac{(2r+1-s)!}{2^{2m}}\alpha_{2m,r}, \quad m = 0,1,\dots,\left[\frac{2r+1-s}{2}\right]; \tag{1.5}$$

$$\gamma^{(s)}_{s+2m,r} = \frac{(2r+1-s)!}{2^{2m}}\alpha_{2m,r} + (-1)^{s+1}\frac{B_{2m}}{2m}, \; m = \left[\frac{2r+3-s}{2}\right]. \tag{1.6}$$

Здесь B_{2m} - числа Бернулли [6]; $[u]$ - целая часть числа u, а коэффициенты $\alpha_{0,r} = 1, \alpha_{2,r}, \dots$ определяются из тождества

$$\operatorname{sh}^{2r+2}x = x^{2r+2}(\alpha_{0,r} + \alpha_{2,r}x^2 + \alpha_{4,r}x^4 + \dots). \tag{1.7}$$

Следуя [5], нетрудно получить

$$\gamma^{(2r)}_{2r+4,r} = \frac{1}{16}[\alpha_{4,r} - 2B_2\alpha_{2,r} - 2B_4]. \tag{1.8}$$

ЛЕММА I. Имеют место соотношения:

$$\frac{1}{2(2r+1)!}\left\{\sum_{j=0}^{2r} C^{(0)}_{j,2r+1}(j-r)^2\right\} -$$

$$-\frac{1}{(2r+2)!}\left\{\sum_{j=0}^{2r} C^{(2r)}_{j,2r+1}(j-r)^{2r+2}\right\} = \frac{1}{12}, \tag{1.9}$$

$$\frac{1}{(2t)!(2r+1)!}\sum_{j=0}^{2r} C^{(0)}_{j,2r+1}(j-r)^{2t} =$$

$$= \frac{1}{(2r+2+2t)!}\sum_{j=0}^{2r+2} C^{(2r+2)}_{j,2r+3}(j-r-1)^{2r+2+2t}, \; t=0,1,\dots,r. \tag{1.10}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя обозначение (I.3), запишем (I.9) и (I.I0) в виде

$$\frac{1}{(2r+1)!}\gamma^{(0)}_{2,r} = \gamma^{(2r)}_{2r+2,r} + \frac{1}{12}, \tag{1.11}$$

$$\frac{1}{(2r+1)!}\gamma^{(0)}_{2t,r} = \gamma^{(2r+2)}_{2r+2t+2,r+1}, \; t=0,1,\dots,r. \tag{1.12}$$

Справедливость (I.II) вытекает из (I.5), (I.6). Чтобы доказать (I.I2), воспользуемся выражением для $\gamma^{(s)}_{s+2t,r}$ из [5]. При $s=2r$ имеем

$$\gamma^{(2r)}_{2r+2t,r} = -\frac{2^{-2t}}{(2r+2t)!}\left\{\left(\frac{d}{dx}\right)^{2r+2t}\left[\operatorname{sh}^{2r+2}x\,\frac{d}{dx}\operatorname{cth} x\right]\right\}_{x=0}.$$

Вычисляя производные и учитывая (I.7), получаем

$$\gamma^{(2r)}_{2r+2t,r} = 2^{-2t}\alpha_{2t,r-1},\ t = 0,1,\ldots\ . \tag{1.13}$$

Полагая здесь $r=r+1$ и принимая во внимание (I.5), убеждаемся в справедливости (I.I2).

§2. Асимптотические разложения

В пространстве векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ определим норму $\|x\| = \max\limits_{1\le i\le N}|x_i|$. В пространстве матриц $A = [a_{ij}]$, $i,j = 1,2,\ldots$ $\ldots, N$, с ней согласована норма $\|A\| = \max\limits_{i}\sum\limits_{j}|a_{ij}|$.

Введем векторы $S^{(2r)} = (S_1^{(2r)}, S_2^{(2r)}, \ldots, S_N^{(2r)})^T$, $F=(f_1, f_2, \ldots$ $\ldots, f_N)^T$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_N)^T$ и обозначим через A, B, D циркулянты порядка N [7], у которых первые строки имеют соответственно вид:

$$(C^{(0)}_{r,2r+1}, C^{(0)}_{r+1,2r+1}, \ldots, C^{(0)}_{2r,2r+1}, 0, \ldots, 0, C^{(0)}_{0,2r+1}, \ldots, C^{(0)}_{r-1,2r+1})\ ,$$

$$(C^{(2r)}_{r,2r+1}, C^{(2r)}_{r+1,2r+1}, \ldots, C^{(2r)}_{2r,2r+1}, 0, \ldots, 0, C^{(2r)}_{0,2r+1}, \ldots, C^{(2r)}_{r-1,2r+1}),$$

$$(C^{(2r+2)}_{r+1,2r+3}, C^{(2r+2)}_{r+2,2r+3}, \ldots, C^{(2r+2)}_{2r+2,2r+3}, 0, \ldots, 0, C^{(2r+2)}_{0,2r+3}, \ldots, C^{(2r+2)}_{r,2r+3}).$$

Так как для периодических $S(x)$ и $f(x)$ выполняются условия

$$S_{N+j} = S_j,\ S^{(2r)}_{N+j} = S^{(2r)}_j,\ \beta_{N+j} = \beta_j,\ f_{N+j} = f_j,\ j = -r, -r+1, \ldots, r+1,$$

то для $k = 1, 2, \ldots, N$ можно записать (I.I), (I.2) в виде систем уравнений:

$$\frac{1}{(2r+1)!}AS^{(2r)} = \frac{1}{h^{2r}}BF, \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{(2r+1)!}A\beta = \frac{1}{h^{2r+2}}DF. \tag{2.2}$$

При доказательстве теорем, которые будут сформулированы ниже, существенно используется ограниченность нормы матрицы A^{-1} константой, не зависящей от h. Этот факт следует, например, из полученной в [5] оценки

$$\|A^{-1}\| \le \frac{2r+2}{2^{2r+2}(2^{2r+2}-1)\,|B_{2r+2}|} . \tag{2.3}$$

ТЕОРЕМА I. Пусть периодический сплайн $S(x)$ интерполирует $(b-a)$-периодическую функцию $f(x) \in C^{2r+6}[a,b]$ в узлах сетки Δ. Тогда

$$S_i^{(2r)} = f_i^{(2r)} - \frac{h^2}{12} f_i^{(2r+2)} + Kh^4 f_i^{(2r+4)} + O(h^6) \quad i=0,1,\dots,N, \tag{2.4}$$

где $K = 1/360$ при $r = 1$ и $K = 1/240$ при $r > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\tilde{S}^{(2r)}$ вектор с компонентами

$$\tilde{S}_i^{(2r)} = f_i^{(2r)} - \frac{h^2}{12} f_i^{(2r+2)} + Kh^4 f_i^{(2r+4)}, \; i=1,2,\dots,N. \tag{2.5}$$

Пусть E_k, $k = 1,2,\dots,N$, – невязка, которая возникает после подстановки (2.5) в k-е уравнение системы (2.I) вместо $S_i^{(2r)}$. Имеем

$$E_k = \frac{1}{(2r+1)!} \sum_{j=0}^{2r} C_{j,2r+1}^{(0)} \left[f_{j+k-r}^{(2r)} - \frac{h^2}{12} f_{j+k-r}^{(2r+2)} + Kh^4 f_{j+k-r}^{(2r+4)} \right] -$$

$$- \frac{1}{h^{2r}} \sum_{j=0}^{2r} C_{j,2r+1}^{(2r)} f_{j+k-r} .$$

После разложения по формуле Тейлора в точке x_k величин f_{j+k-r} и $f_{j+k-r}^{(2r+s)}$, $s = 0,2,4$, получаем

$$E_k = \frac{1}{(2r+1)!} \sum_{j=0}^{2r} C_{j,2r+1}^{(0)} \left[\sum_{t=0}^{5} \frac{1}{t!} (j-r)^t h^t f_k^{(2r+t)} - \right.$$

$$\left. - \frac{h^2}{12} \sum_{t=0}^{3} \frac{1}{t!} (j-r)^t h^t f_k^{(2r+t+2)} + Kh^4 \sum_{t=0}^{1} \frac{1}{t!} (j-r)^t h^t f_k^{(2r+t+4)} \right] -$$

$$- \frac{1}{h^{2r}} \sum_{j=0}^{2r} C_{j,2r+1}^{(2r)} \sum_{t=0}^{2r+5} h^t f_k^{(t)} \frac{1}{t!} (j-r)^t + O(h^6) .$$

Меняя порядок суммирования и учитывая (I.3), (I.4), находим

$$E_k = \frac{1}{(2r+1)!}\left[\sum_{t=0}^{2}\gamma_{2t,r}^{(0)}h^{2t}f_k^{(2r+2t)} - \frac{h^2}{12}\sum_{t=0}^{1}\gamma_{2t,r}^{(0)}h^{2t}f_k^{(2r+2t+2)} + \right.$$

$$\left. + Kh^4\gamma_{0,r}^{(0)}f_k^{(2r+4)}\right] - \frac{1}{h^{2r}}\sum_{t=r}^{r+2}\gamma_{2t,r}^{(2r)}h^{2t}f_k^{(2t)} + O(h^6).$$

Собирая коэффициенты при одинаковых по порядку производных, получаем

$$E_k = \left[\frac{1}{(2r+1)!}\gamma_{0,r}^{(0)} - \gamma_{2r,r}^{(2r)}\right]f_k^{(2r)} + h^2\left[\frac{1}{(2r+1)!}(\gamma_{2,r}^{(0)} - \frac{1}{12}\gamma_{0,r}^{(0)}) - \right.$$

$$\left. - \gamma_{2r+2,r}^{(2r)}\right]f_k^{(2r+2)} + h^4\left[(\gamma_{4,r}^{(0)} - \frac{1}{12}\gamma_{2,r}^{(0)} + K\gamma_{0,r}^{(0)})\frac{1}{(2r+1)!} - \right.$$

$$\left. - \gamma_{2r+4,r}^{(2r)}\right]f_k^{(2r+4)} + O(h^6).$$

Из (I.5), (I.6) и (I.8) имеем

$$K = \gamma_{2r+4,r}^{(2r)} - \frac{1}{(2r+1)!}(\gamma_{4,r}^{(0)} - \frac{1}{12}\gamma_{2,r}^{(0)}).$$

Поэтому коэффициент при $f_k^{(2r+4)}$ обращается в нуль. Коэффициенты при других производных равны нулю в силу (I.5) и соотношения (I.II) леммы I. Таким образом, $A\tilde{S}^{(2r)} = F + O(h^6)$. Следовательно, $A(\tilde{S}^{(2r)} - S^{(2r)}) = O(h^6)$. Отсюда, учитывая оценку (2.3), имеем $\|\tilde{S}^{(2r)} - S^{(2r)}\| = O(h^6)$ или $S_i^{(2r)} = \tilde{S}_i^{(2r)} + O(h^6)$, что и требовалось доказать.

Используя результаты теоремы I, получим асимптотические разложения для $S^{(2r)}(x)$ и $S^{(2r+1)}(x)$ в точке $x = x_i+th$, $t\in[0,1]$. На интервале $[x_i,x_{i+1}]$ имеем $S^{(2r)}(x) = tS_{i+1}^{(2r)} + (1-t)S_i^{(2r)}$, $S^{(2r+1)}(x) = (S_{i+1}^{(2r)} - S_i^{(2r)})/h$. Подставляя в эти формулы выражения для $S_i^{(2r)}$, $S_{i+1}^{(2r)}$ из (2.4) и выполняя разложение по формуле Тейлора в точке $x = x_i + th$, получаем

$$S^{(2r)}(x) = f^{(2r)}(x) - \frac{(6t^2-6t+1)h^2}{12}f^{(2r+2)}(x) +$$

$$+ \frac{(1-t)t(1-2t)h^3}{3!}f^{(2r+3)}(x) + O(h^4), \qquad (2.6)$$

$$S^{(2r+1)}(x) = f^{(2r+1)}(x) + \frac{(1-2t)h}{2} f^{(2r+2)}(x) +$$

$$+ \frac{(6t^2-6t+1)h^2}{12} f^{(2r+3)}(x) + O(h^3) . \qquad (2.7)$$

Если вычислить корни полиномов при главных членах погрешности в формулах (2.6), (2.7), то легко видеть, что

$$S^{(2r)}(\tilde{x}) = f^{(2r)}(\tilde{x}) \mp \frac{\sqrt{3}h^3}{108} f^{(2r+3)}(\tilde{x}) + O(h^4), \qquad (2.8)$$

$$S^{(2r+1)}(x^*) = f^{(2r+1)}(x^*) - \frac{h^2}{24} f^{(2r+3)}(x^*) + O(h^3), \qquad (2.9)$$

где $\tilde{x} = x_i + (1/2 \pm \sqrt{3}/6\,)h,\ x^* = x_i + h/2.$

Формулы (2.6)-(2.9) полностью характеризуют погрешность, возникающую при приближении производными сплайна порядка $2r$ и $2r+1$ соответствующих производных интерполируемой функции.

ТЕОРЕМА 2. Пусть периодический сплайн $S(x)$ интерполирует $(b-a)$-периодическую функцию $f(x) \in C^{4r+6}[a,b]$ в узлах сетки Δ. Тогда

$$\frac{S^{(2r+1)}(x_i+0) - S^{(2r+1)}(x_i-0)}{h} =$$

$$= f_i^{(2r+2)} + \frac{B_{2r+2}}{(2r+2)!} h^{2r+2} f_i^{(4r+4)} + O(h^{2r+4}),\ i=0,1,\dots,N.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем величины

$$\tilde{\beta}_i = f_i^{(2r+2)} + \alpha h^{2r+2} f_i^{(4r+4)}, \quad i=1,2,\dots,N. \quad (2.10)$$

Подберем α таким образом, чтобы вектор $\tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_N)$ удовлетворял системе (2.2) с точностью до членов порядка $O(h^{2r+4})$. Обозначим через R_k, $k = 1,2,\dots,N$, невязку, которая получается после подстановки (2.10) в k-е уравнение системы (2.2), т.е.

$$\frac{M_{i-2} - 14M_{i-1} + 14M_{i+1} - M_{i+2}}{24h} = f_i^{(2r+1)} + K_{21} h^4 f_i^{(2r+5)} + O(h^6),$$

где $K_{21} = -12/6!$, если $r=1$, и $K_{21} = -11/6!$, если $r > 1$.

Процесс повышения точности можно продолжить. Например, аппроксиммируя $f_i^{(2r+2k+4)}$ в (3.5) по формуле (3.3), а $f_i^{(2r+2k+5)}$ в (3.7) по формуле (3.4), получаем приближения производных $f_i^{(2r+2k)}$ и $f_i^{(2r+2k+1)}$ с точностью $O(h^6)$ и т.д.

Возможен другой подход к построению формул повышенной точности, суть которого заключается в комбинации разностных аппроксимаций с формулами, построенными на основе сплайнов [I]. Пусть, например, с помощью сплайнов аппроксимируется $f_i^{(k)}$ с точностью $O(h^p)$. Возьмем разностную аппроксимацию для $f_i^{(k)}$ с тем же порядком точности, но с другой константой в главном члене погрешности. Составляя линейную комбинацию этих формул так, чтобы исчез главный член погрешности, получаем формулу, точность которой повышается по меньшей мере на порядок.

Приведем примеры формул точности $O(h^4)$, которые построены таким способом. Используя (3.3) и (3.I), получаем

$$\frac{1}{r+1}\left[(r+k)\frac{\delta^{2k}M_i}{h^{2k}} + (1-k)\frac{\delta^{2k+2r}f_i}{h^{2k+2r}}\right] = f_i^{(2r+2k)} +$$

$$+ K_3 h^4 f_i^{(2r+2k+4)} + O(h^6), \; k=0,1,\dots , \qquad (3.8)$$

где $K_3 = (1+k)(4-5k)/(2\cdot 6!)$, если $r=1$, и $K_3 = 5(1-k)(r+k)/(2\cdot 6!)$, если $r > 1$.

В частности, при $k=0$ имеем

$$\frac{1}{r+1}\left[rM_i + \frac{\delta^{2r}f_i}{h^{2r}}\right] = f_i^{(2r)} + K_3 h^4 f_i^{(2r+4)} + O(h^6), \qquad (3.9)$$

где $K_3 = 1/360$, если $r = 1$, и $K_3 = r/288$, если $r > 1$. Легко видеть, что при $r=1$ формулы (3.9) и (3.6) совпадают.

Используя (3.2) и (3.4), получаем для аппроксимации $f_i^{(2r+2k+1)}$ формулу

$$\frac{1}{r+1}\left[(r+k+2)\frac{\mu\delta^{2k}M_i}{2h^{2k+1}} - (k+1)\frac{\mu\,\delta^{2(k+r)}f_i}{2h^{2k+2r+1}}\right] = f_i^{(2r+2k+1)} +$$

$$+ K_4 h^4 f_i^{(2r+2k+5)} + O(h^6),\ k=0,1,\dots , \qquad (3.10)$$

где

$$K_4 = \begin{cases} -\dfrac{5k^2+21k+24}{2\cdot 6!}, & \text{если} \quad r=1, \\[2ex] -\dfrac{5r^2(k+1)+r(5k^2+20k+21)+5k^2+15k+16}{2\cdot 6!(r+1)}, & \text{если} \quad r>1. \end{cases}$$

Выше при построении формул использовались только значения функции $f(x)$ в узлах сетки Δ. Можно также привлекать и узловые значения производных. Такие формулы строятся путем линейной комбинации (3.I) с (3.3) или (3.2) с (3.4). Приведем несколько примеров. Имеем

$$\frac{1}{2-k}\left[\frac{\delta^{2k}M_i}{h^{2k}} + (1-k)\frac{\delta^2 f_i^{(2r+2k-2)}}{h^2}\right] = f_i^{(2r+2k)} +$$

$$+ K_5 h^4 f_i^{(2r+2k+4)} + O(h^6),\ k=0,1,\dots;\ k\neq 2, \quad (3.11)$$

где $K_5 = [5k^2-15k+10-2(2-r)_+]/[2(2-k)6!]$;

$$\frac{1}{2-k}\left[3\frac{\mu\delta^{2k}M_i}{2h^{2k+1}} - (k+1)\frac{\mu\delta^2 f_i^{(2r+2k-2)}}{2h^3}\right] = f_i^{(2r+2k+1)} +$$

$$+ K_7 h^4 f_i^{(2r+2k+5)} + O(h^6),\ k=0,1,\dots;\ k\neq 2, \qquad (3.12)$$

где $K_7 = [5k^2-3k-14-2(2-r)_+]/[4(2-k)5!]$.

Из (3.II) при $k=0$ получаем

$$\frac{1}{2}\left[M_i + \frac{f_{i+1}^{(2r-2)} - 2f_i^{(2r-2)} + f_{i-1}^{(2r-2)}}{h^2}\right] = f_i^{(2r)} + K_5 h^4 f_i^{(2r+4)} + O(h^6),$$

где $K_5 = 1/360$, если $r=1$, и $K_5 = 1/288$, если $r>1$. Эта формула при $r=1$ совпадает с (3.9).

ЗАМЕЧАНИЕ. Частные случаи ($r=1,2$; $k=0$) полученных в этом параграфе формул можно найти в работах [I–3].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение леммы легко доказывается по индукции. Действительно, при $k = 1$, разлагая левую часть (3.I) в точке x_i по формуле Тейлора, получаем

$$\frac{\delta^2 f_i^{(l)}}{h^2} = f_i^{(l+2)} + \frac{2h^2}{4!} f_i^{(l+4)} + \frac{2h^4}{6!} f_i^{(l+6)} + \frac{h^6}{8!}\left(f^{(l+8)}(\theta) + f^{(l+8)}(\nu)\right),$$

где $x_{i-1} \le \theta \le x_i$, $x_i \le \nu \le x_{i+1}$. По теореме о среднем для непрерывной функции [I], имеем

$$f^{(l+8)}(\theta) + f^{(l+8)}(\nu) = 2f^{(l+8)}(\xi), \quad x_{i-1} \le \xi \le x_{i+1},$$

что доказывает (3.I) для $k=1$. Так как $\delta^{2k} f_i^{(l)} = \delta^2 \delta^{2(k-1)} f_i^{(l)}$, то,предполагая (3.I) верным для $k=m-1$ и применяя формулу Тейлора и теорему о среднем,убеждаемся в справедливости (3.I) для $k=m$.

Соотношение (3.2) для $k=0$ получается путем использования формулы Тейлора. Для $k>0$ оно вытекает из (3.I) после применения к нему оператора $\mu/(2h)$. Лемма доказана.

В дальнейшем будем предполагать, что $f(x)$ достаточно гладкая функция. Это нужно для того, чтобы получить необходимое число членов в асимптотическом выражении (2.4) для $S_i^{(2r)}$. Нетрудно заметить, что, в силу свойства (I.4), в (2.4) будут присутствовать только производные четного порядка. Обозначим $M_i = S_i^{(2r)}$. Используя (2.4) и лемму 2, находим:

$$\frac{\delta^{2k} M_i}{h^{2k}} = f_i^{(2r+2k)} + \frac{(k-1)h^2}{12} f_i^{(2r+2k+2)} +$$

$$+ K_1 h^4 f_i^{(2r+2k+4)} + O(h^6), \ k = 0,1,\ldots, \tag{3.3}$$

$$\frac{\mu\delta^{2k} M_i}{2h^{2k+1}} = f_i^{(2r+2k+1)} + \frac{(k+1)h^2}{12} f_i^{(2r+2k+3)} +$$

$$+ K_2 h^4 f_i^{(2r+2k+5)} + O(h^6), \quad k = 0,1,\ldots, \tag{3.4}$$

где $K_1 = [5k^2-11k+6-2(2-r)_+]/(2\cdot 6!)$, $K_2=[5k^2+9k-2-2(2-r)_+]/(2\cdot 6!)$.

Очевидно, при $k=0$ разложение (3.3) эквивалентно (2.4). Из (3.4) при $k=0$ получаем

$$\frac{M_{i+1}-M_{i-1}}{2h}=f_i^{(2r+1)}+\frac{h^2}{12}f_i^{(2r+3)}+K_2h^4f_i^{(2r+5)}+O(h^6),$$

где $K_2=-2/6!$, если $r=1$, и $K_2=-1/6!$, если $r>1$.

Из (3.3), (3.4) видно, что $\delta^{2k}M_i/h^{2k}$, $\mu\delta^{2k}M_i/(2h^{2k+1})$ аппроксимируют соответственно $f_i^{(2r+2k)}$, $f_i^{(2r+2k+1)}$ с точностью $O(h^2)$. Исключением является формула δ^2M_i/h^2, которая, по теореме 2, аппроксимирует $f_i^{(2r+2)}$ с точностью $O(h^{2r+2})$.

Рассмотрим некоторые методы, позволяющие приближать $f_i^{(2r+k)}$ с более высокой точностью. Получим формулы точности $O(h^4)$. Заменяя $f_i^{(2r+2k+2)}$ в формуле (3.3) через $\delta^{2k+2}M_i/h^{2k+2}$, имеем

$$\frac{\delta^{2k}M_i}{h^{2k}}-\frac{(k-1)\delta^{2k+2}M_i}{12h^{2k}}=f_i^{(2r+2k)}+$$

$$+K_{11}h^4f_i^{(2r+2k+4)}+O(h^6),\quad k=0,1,\ldots, \tag{3.5}$$

где $K_{11}=[-5k^2-k+6-2(2-r)_+]/(2\cdot 6!)$.

Из формулы (3.5) при $k=0$ получаем

$$\frac{M_{i+1}+10M_i+M_{i-1}}{12}=f_i^{(2r)}+Kh^4f_i^{(2r+4)}+O(h^6). \tag{3.6}$$

Заменяя $f_i^{(2r+2k+3)}$ в формуле (3.4) через $\mu\delta^{2k+2}M_i/(2h^{2k+3})$, получаем

$$\frac{\mu\delta^{2k}M_i}{2h^{2k+1}}-\frac{(k+1)\mu\delta^{2k+2}M_i}{24h^{2k+1}}=f_i^{(2r+2k+1)}+$$

$$+K_{21}h^4f_i^{(2r+2k+5)}+O(h^6),\quad k=0,1,\ldots, \tag{3.7}$$

где $K_{21}=-[5k^2+21k+22+2(2-r)_+]/(2\cdot 6!)$.

Из (3.7) при $k=0$ получаем

$$R_k = \frac{1}{(2r+1)!} \sum_{j=0}^{2r} C_{j,2r+1}^{(0)} \left[f_{j+k-r}^{(2r+2)} + \alpha h^{2r+2} f_{j+k-r}^{(4r+4)} \right] -$$

$$- \frac{1}{h^{2r+2}} \sum_{j=-1}^{2r+1} C_{j+1,2r+3}^{(2r+2)} f_{j+k-r} .$$

После разложения величин f_{j+k-r} и $f_{j+k-r}^{(2r+s)}$, $s = 2{,}2r+4$, в точке x_k по формуле Тейлора, имеем

$$R_k = \frac{1}{(2r+1)!} \sum_{j=0}^{2r} C_{j,2r+1}^{(0)} \left[\sum_{t=0}^{2r+3} \frac{1}{t!}(j-r)^t h^t f_k^{(2r+t+2)} + \right.$$

$$\left. + \alpha h^{2r+2} \sum_{t=0}^{1} \frac{1}{t!}(j-r)^t h^t f_k^{(4r+t+4)} \right] -$$

$$- \frac{1}{h^{2r+2}} \sum_{j=-1}^{2r+1} C_{j+1,2r+3}^{(2r+2)} \sum_{t=0}^{4r+5} \frac{1}{t!}(j-r)^t h^t f_k^{(t)} + O(h^{2r+4}).$$

Поменяв порядок суммирования, запишем

$$R_k = \frac{1}{(2r+1)!} \left[\sum_{t=0}^{2r+3} \gamma_{t,r}^{(0)} h^t f_k^{(2r+t+2)} + \right.$$

$$\left. + \alpha h^{2r+2} \sum_{t=0}^{1} \gamma_{t,r}^{(0)} h^t f_k^{(4r+t+4)} \right] -$$

$$- \frac{1}{h^{2r+2}} \sum_{t=0}^{4r+5} \gamma_{t,r+1}^{(2r+2)} h^t f_k^{(t)} + O(h^{2r+4}).$$

Собирая коэффициенты при одинаковых по порядку производных и учитывая (I.4), получаем

$$R_k = \sum_{t=0}^{r+1} \left(\frac{1}{(2r+1)!} \gamma_{2t,r}^{(0)} - \gamma_{2r+2t+2,r+1}^{(2r+2)} \right) h^{2t} f_k^{(2r+2t+2)} +$$

$$+ \frac{\alpha}{(2r+1)!} \gamma_{0,r}^{(0)} h^{2r+2} f_k^{(4r+4)} + O(h^{2r+4}) .$$

В силу (I.I2),(I.I3),(I. 5),(I. 6) и из требования, чтобы $R_k = O(h^{2r+4})$, находим $\alpha = B_{2r+2}/(2r+2)!$. Таким образом,вектор $\tilde{\beta}$ с компонентами (2.I0) и $\alpha = B_{2r+2}/(2r+2)!$ удовлетворяет системе (2.2) с погрешностью $O(h^{2r+4})$. Далее, рассуждая так же, как при доказательстве теоремы I, получаем требуемый результат.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Величина $B_{2r+2}/(2r+2)! \to 0$ при $r \to \infty$. Это следует из приведенной в [6] оценки

$$\frac{|B_{2n}|}{(2n)!} < \frac{2}{(2\pi)^{2n}(1-2^{1-2n})}, \quad n = 1,2,\ldots .$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорема 2 справедлива, очевидно, и для $r = 0$.

Отметим, что частные случаи теорем I и 2 были доказаны для $r=1$ в [I,2],а для $r=2$ в [3].Кроме того,в [8] было показано, что

$$\lim_{h\to 0} \max_i \left| \frac{S^{(2r+1)}(x_i+0) - S^{(2r+1)}(x_i-0)}{h} - f^{(2r+2)}(x_i) \right| = 0 .$$

§3. Аппроксимация производных высокого порядка

Введем разностные операторы μ и δ^{2k}, положив $\mu f(x) = f(x+h) - f(x-h)$,

$$\delta^{2k} f(x) = \begin{cases} f(x), \text{ если } k=0, \\ f(x+h)-2f(x)+f(x-h), \text{ если } k=1, \\ \delta^2\delta^{2(k-1)} f(x), \text{ если } k=2,3,\ldots . \end{cases}$$

ЛЕММА 2. Если $f(x) \in C^{2k+l+6}[a, b]$, то справедливо разложение

$$\frac{\delta^{2k} f_i^{(l)}}{h^{2k}} = f_i^{(2k+l)} + \frac{kh^2}{12} f_i^{(2k+l+2)} + \frac{k(5k-1)h^4}{2\cdot 6!} f_i^{(2k+l+4)} +$$

$$+ C_k h^6 f^{(2k+l+6)}(\xi),$$

$$x_{i-k} \le \xi \le x_{i+k}, \ k=1,2,\ldots;\ l=0,1,\ldots . \quad (3.1)$$

Если $f(x) \in C^{2k+l+7}[a,b]$, то для $k = 0,1,\ldots$ имеет место равенство

$$\frac{\mu\delta^{2k} f_i^{(l)}}{2h^{2k+1}} = f_i^{(2k+l+1)} + \frac{(k+2)h^2}{12} f_i^{(2k+l+3)} +$$

$$+ \frac{(5k^2+19k+12)h^4}{2\cdot 6!} f_i^{(2k+l+5)} + C_k^* h^6 f^{(2k+l+7)}(\eta),$$

$$x_{i-k-1} \le \eta \le x_{i+k+1}, \quad l = 0,1,\ldots . \quad (3.2)$$

Постоянные C_k, C_k^* не зависят от h.

Константы при главных членах погрешности в формулах (3.II), (3.I2) при $r>1$ не зависят от r, поэтому эти формулы предпочтительнее по сравнению с (3.8), (3.I0). Однако практическое использование (3.II), (3.I2) затруднено присутствием в них значений производных. Более полезными являются формулы (3.5) – (3.7), которые, с одной стороны, не требуют знания производных и, с другой стороны, в этих формулах константы при главных членах погрешности не зависят от r при $r>1$.

Отметим, что в отличие от (3.3), (3.4) центрально-разностные формулы (3.I), (3.2), аппроксимирующие соответственно при $l = 0$, $k = k+r$ производные $f_i^{(2r+2k)}$ и $f_i^{(2r+2k+1)}$, имеют в главных членах погрешности константы, растущие с ростом r.

Автор признателен В.Л.Мирошниченко за обсуждение полученных результатов и полезные замечания.

Литература

I. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. -М.: Наука, I980. - 352 с.

2. LUCAS T.R. Error bounds for interpolating cubic splines under various end conditions.- SIAM J.Numer.Anal., 1974,v.11,N 3, p.569-584.

3. КИНДАЛЕВ Б.С. Асимптотические формулы для сплайна пятой степени и их применение. -В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 87). Новосибирск, I98I, с. I8-24.

4. FYFE D.J. Linear dependence relations connecting equal interval N-th degree splines and their derivatives. - J.Inst. Math. Appl.,1971,v.7, p.398-406.

5. ALBASINY E.L.,HOSKINS W.D. Explicit error bounds for periodic splines of odd order on a uniform mesh. - J.Inst.Math.Appl., 1973,v.12, N 3,p.303-318.

6. АБРАМОВИЦ М., СТИГАН И. Справочник по специальным функциям. -М.: Наука, I979. - 832 с.

7. МАРКУС М., МИНК Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. -М.: Наука, I972. - 232 с.

8. АЛБЕРГ Дж., НИЛЬСОН Э., УОЛШ Дж. Теория сплайнов и ее приложения. -М.: Мир, 1972. - 3I6 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
I0 марта I982 года