МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ
(Вычислительные системы)
1982 год Выпуск 93

УДК 517.518.86

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА L-СПЛАЙНОВ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В.В. Вершинин

Классическое экстремальное свойство интерполяционных (кубических) сплайнов означает, что сплайн $S(x)$, заданный на отрезке $[a,b]$ с сеткой $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$, такой что $S(x_i) = z_i$, доставляет минимум функционалу $J(f)=\int_a^b (f''(x))^2 dx$ среди всех функций $f(x) \in W_2^2[a,b]$, таких что $f(x_i)=z_i$. Имеются аналоги этого свойства для сглаживающих сплайнов и сплайнов в выпуклом множестве [1]. Более того, эти свойства послужили основой для абстрактного определения сплайнов [1].

В настоящей работе изучаются экстремальные свойства L-сплайнов нескольких переменных.

Пространство L-сплайнов m переменных дефекта $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$; $\mu_j \geq 1$, $j=1,\ldots,m$, заданных на параллелепипеде $\Omega=[a_1, b_1]\times \ldots \times [a_m, b_m]$ с сеткой $\Delta=\Delta_1\times\ldots\times\Delta_m$, Δ_j: $a_j = x_0^j < x_1^j < \ldots < x_{N_j}^j = b_j$, определяется как тензорное произведение m пространств L_j-сплайнов одной переменной дефекта μ_j [2], $L_j = c_{q_j}^j(x^j)D^{q_j} + \ldots + c_0^j(x^j)D^0$, $q_j \geq \mu_j$, $j = 1,\ldots,m$. В работе [3] был введен класс функций B, состоящий из таких $\varphi(x) \in W_2^q(\Omega)$, что $D^{p_j}(\varphi(x))$ $(p_j = 0,\ldots,\mu_j-1)$ в гиперплоскостях $x^j = x_{i_j}^j$ являются L-сплайнами от $m-1$ переменных, и на этом классе для функционала

$$J^I(f) = \sum_{j=1}^m \|L_j f(x)\|_{L_2(\Omega)}^2$$

были доказаны экстремальные свойства интерполяционных и сглаживающих L-сплайнов [3,4].

Мы будем изучать экстремальные свойства интерполяционных и сглаживающих L-сплайнов на всем $W_2^q(\Omega)$, но при этом рассматривается более сложный функционал, который является обобщением функционала, предложенного в [5] для полиномиальных сплайнов. Для обоих функционалов рассмотрим также экстремальное свойство L-сплайнов в выпуклом множестве.

Обозначим через α набор из m чисел $(\ldots,q_1,\ldots,\nu_k,\ldots)$, в котором на j-м месте может стоять либо q_j, либо некоторое число ν_j, $0 \le \nu_j \le \mu_j - 1$, причем всегда есть числа двух видов. Пусть x_α есть такая переменная, что $x_\alpha^1 \in [a_1, b_1]$, если в α на 1-м месте стоит q_1, $x_\alpha^k \in \Delta_k$, если в α на k-м стоит ν_k. Точки x_α заполняют параллелепипеды $\Omega_\alpha \subset \Omega$. Пусть $L = L_1 \ldots L_m$, а L_α есть произведение операторов, в котором на j-м месте стоит L_j, если в α на этом месте q_j, и D^{ν_j}, если в α на этом месте ν_j. Определим функционал $J^{\Pi}(f)$:

$$J^{\Pi}(f) = \|L(f)\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{\alpha,\Omega_\alpha} \rho_{\alpha,\Omega_\alpha} \|L_\alpha f(x_\alpha)\|^2_{L_2(\Omega_\alpha)},$$

где $\rho_{\alpha,\Omega_\alpha} \ge 0$ и количество величин $\rho_{\alpha,\Omega_\alpha} \ne 0$ достаточно для того, чтобы из соотношений $L(f) = 0$, $L_\alpha f(x_\alpha) = 0$, $x_\alpha \in \Omega_\alpha$, следовало $f \equiv 0$.

Обозначим через $\gamma(\alpha)$ последовательность, получающуюся из α заменой всех ν_j на 0, через $x^{\gamma(\alpha)}$ - непрерывную часть переменной x_α, через $c_k(x)$ - произведение $c^1_{k_1}(x^1)\ldots c^m_{k_m}(x^m)$, а через $c_k^\alpha(x)$ - произведение, в котором нет сомножителя $c^j_{k_j}(x^j)$, если в α на j-м месте стоит ν_j. Через 1_α обозначим мультииндекс, в котором на j-м месте стоит 1, если в α на j-м месте стоит q_j, и 0, если в α на j-м месте стоит ν_j, а через μ_α обозначим набор, в котором на j-м месте стоит μ_j, если в α на j-м месте стоит q_j, и ν_j, если в α на j-м месте стоит ν_j.

Пусть $F_{\nu_j, i_j}(x^j)$ есть фундаментальный L_j-сплайн:

$$D^{p_j} F_{\nu_j, i_j}(x^j_{i_k}) = \begin{cases} 1, \text{ если } p_j = \nu_j \text{ и } i_j = i_k, \\ 0 - \text{в противном случае,} \end{cases}$$

удовлетворяющий естественным или периодическим граничным услови - ям [2,3]. Пусть $\hat{\Omega}_j = [a_1,b_1]\times\ldots\times[a_{j-1},b_{j-1}] \times [a_{j+1}, b_{j+1}] \times \ldots$ $\ldots \times [a_m,b_m]$, $\hat{x}^j = (x^1,\ldots,x^{j-1},x^{j+1},\ldots, x^m)$.

Введем следующие агрегаты:

$$(D_i^\nu)^I = \sum_{j=1}^{m} \int_{\hat{\Omega}_j} [\sum_{n_j=q_j-\mu_j}^{q_j-1-\nu_j} D^{n_j}\{c^j_{\nu_j+1+n_j} L_j S(x)\}]_{x^j_{i_j}} \times$$

$$\times F_{\nu_1,i_1}(x^1)\cdot\ldots\cdot\hat{F}_{\nu_j,i_j}(x^j)\cdot\ldots\cdot F_{\nu_m,i_m}(x^m)d\hat{x}^j, \qquad (1)$$

$$(D_i^\nu)^{II} = [\sum_{n=q-\mu}^{q-1-\nu} (-1)^{|n+1|} D^n\{c_{\nu+1+n}(x)\ LS(x)\}]_{x_i} +$$

$$+\sum_{\alpha=\alpha(\nu),\Omega_\alpha} \rho_{\alpha,\Omega_\alpha}[\sum_{n=\alpha-\mu_\alpha}^{\alpha-1_\alpha-\nu}(-1)^{|n+1_\alpha|}D^n\{c^\alpha_{\nu+1+n}(x)L_\alpha S(x_\alpha)\}]_{x_i^{\gamma(\alpha)}}. \qquad (2)$$

Здесь $\alpha=\alpha(\nu)$ обозначает, что суммирование ведется по всем α, в которых на j-м месте могут стоять либо q_j, либо ν_j, причем ν_j взяты из мультииндекса ν который имеется в левой части равенства. Символ $[\ ]_{x_i}$ обозначает, как обычно, разрыв в точке x_i.

ЛЕММА. Предположим, что для любого j по переменной x^j выполнено одно из двух условий:

1) $f(x) \in W_2^q(\Omega)$, $S(x)$ есть L-сплайн, удовлетворяющий естественным граничным условиям;

2) функция $f(x)$ и сплайн $S(x)$ удовлетворяют периодическим граничным условиям.

Тогда

$$(Lf,LS)_{L_2(\Omega)} + \sum_{\alpha,\Omega_\alpha} \rho_{\alpha,\Omega_\alpha}(L_\alpha f(x_\alpha),L_\alpha S(x_\alpha))_{L_2(\Omega_\alpha)} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\mu-1} \sum_{i=0}^{N} D^\nu f(x_i)\cdot(D_i^\nu)^{II}.$$

Если предположить дополнительно, что $f(x) \in B$, то

$$\sum_{j=1}^{m} (L_j f, L_j S)_{L_2(\Omega)} = \sum_{\nu=0}^{\mu-1} \sum_{i=0}^{N} D^{\nu} f(x_i) \cdot (D_i^{\nu})^{I}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того чтобы несколько уменьшить громоздкость выражений, будем доказывать лемму для случая $m = 2$. Общий случай аналогичен. Мы будем применять следующее тождество [2,с.188]:

$$L_j u(x) \cdot v(x) = \frac{\partial}{\partial x^j} P^j[u(x), v(x)] + u(x) \cdot L_j^* v(x),$$

где L_j^* есть формально сопряженный к L_j оператор, а билинейная форма P^j определяется равенством:

$$P^j[u, v] = \sum_{p=0}^{q_j-1} \sum_{n=0}^{q_j-p-1} (-1)^n u^{(q_j-p-n-1)}(x) \cdot \{c^j_{q-p}(x^j) v(x)\}^{(n)} =$$

$$= \sum_{p=0}^{q_j-1} u^{(q_j-p-1)}(x) \cdot \sum_{n=0}^{p} (-1)^n \{c^j_{q_j-p+n}(x^j) \cdot v(x)\}^{(n)},$$

где $u^{(k)}$ обозначает k-ю производную $u(x)$ по x^j.

Докажем сначала первое равенство из формулировки леммы. Для двух переменных имеем:

$$\int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} L_1 L_2 f(x^1, x^2)\, L_1 L_2 S(x^1, x^2) dx^1\, dx^2 +$$

$$+ \sum_{\nu_2=0}^{\mu_2-1} \sum_{t=0}^{N_2} \rho_{\nu_2, t} \int_{a_1}^{b_1} L_1 D^{0,\nu_2} f(x^1, x^2_t)\, L_1 D^{0,\nu_2} S(x^1, x^2_t)\, dx^1 +$$

$$+ \sum_{\nu_1=0}^{\mu_1-1} \sum_{r=0}^{N_1} \rho_{\nu_1, r} \int_{a_2}^{b_2} L_2 D^{\nu_1, 0} f(x^1_r, x^2)\, L_2 D^{\nu_1, 0} S(x^1_r, x^2)\, dx^2 =$$

$$= \int_{a_2}^{b_2} \sum_{r=0}^{N_1-1} \int_{x^1_r}^{x^1_{r+1}} \Big(\frac{\partial}{\partial x^1} P^1[L_2 f(x^1, x^2), L_1 L_2 S(x^1, x^2)] +$$

$$+ L_2 f(x^1, x^2) \cdot L_1^* L_1 L_2 S(x^1, x^2)\Big)\, dx^1\, dx^2 +$$

$$+\sum_{\nu_2,t}\rho_{\nu_2,t}\sum_{r=0}^{N_1-1}\int_{x^1_r}^{x^1_{r+1}}\Big(\frac{\partial}{\partial x^1}P^1[D^{0,\nu_2}f(x^1,x^2_t),L_1D^{0,\nu_2}S(x^1,x^2_t)]+$$

$$+D^{0,\nu_2}f(x^1,x^2_t)\,L_1^*L_1D^{0,\nu_2}S(x^1,x^2_t)\Big)\,dx^2+$$

$$+\sum_{\nu_1,r}\rho_{\nu_1,r}\sum_{t=0}^{N_2-1}\int_{x^2_t}^{x^2_{t+1}}\Big(\frac{\partial}{\partial x^2}P^2[D^{\nu_1,0}f(x^1_r,x^2),L_2D^{\nu_1,0}S(x^1_r,x^2)]+$$

$$+D^{\nu_1,0}f(x^1_r,x^2)\,L_2^*L_2D^{\nu_1,0}S(x^1_r,x^2)\Big)\,dx^2\,.$$

По определению L-сплайна $L_j^*L_jS(x)\equiv 0$ на отрезке $[x^j_{i_j},x^j_{i_j+1}]$. Имеем также

$$\sum_{r=0}^{N_1-1}\int_{x^1_r}^{x^1_{r+1}}\Big(\frac{\partial}{\partial x^1}P^1[L_2f(x^1,x^2),L_1L_2S(x^1,x^2)]\Big)\,dx^1=$$

$$=\sum_{r=0}^{N_1-1}\Big(\sum_{p=0}^{q_1-1}D^{q_1-p-1,0}L_2f(x^1,x^2)\cdot\sum_{n=0}^{p}(-1)^nD^{n,0}\{c^1_{q_1-p+n}(x^1)\times$$

$$\times L_1L_2S(x^1,x^2)\}\Big)\Big|_{x^1=x^1_r}^{x^1=x^1_{r+1}}=$$

$$=\sum_{r=0}^{N_1-1}\Big(\sum_{p=0}^{q_1-\mu_1-1}D^{q_1-p-1,0}L_2f\cdot\sum_{n=0}^{p}(-1)^nD^{n,0}\{c^1_{q_1-p+n}\cdot L_1L_2S\}+$$

$$+\sum_{p=q_1-\mu_1}^{q_1-1}D^{q_1-p-1,0}L_2f\cdot\sum_{n=0}^{q_1-\mu_1-1}(-1)^nD^{n,0}\{c^1_{q_1-p+n}\cdot L_1L_2S\}+$$

$$+\sum_{p=q_1-\mu_1}^{q_1-1}D^{q_1-p-1,0}L_2f\cdot\sum_{n=q_1-\mu_1}^{p}(-1)^nD^{n,0}\{c^1_{q_1-p+n}\cdot L_1L_2S\}\Big)\Big|_{x^1=x^1_r}^{x^1=x^1_{r+1}}\,.$$

Первые две суммы непрерывны в точках x_r^1 а третья, вообще говоря, разрывна, поэтому это выражение равно

$$\Big(\sum_{p=0}^{q_1-\mu_1-1} D^{q_1-p-1,0} L_2 f \cdot \sum_{n=0}^{p} (-1)^n D^{n,0}\{c^1_{q_1-p+n} \cdot L_1 L_2 S\} +$$

$$+\sum_{p=q_1-\mu_1}^{q_1-1} D^{q_1-p-1,0} L_2 f \cdot \sum_{n=0}^{q_1-\mu_1-1} (-1)^n D^{n,0}\{c^1_{q_1-p+n} L_1 L_2 S\}\Big)\Big|_{x^1=a_1}^{x^1=b_1} -$$

$$-\sum_{r=0}^{N_1}\sum_{p=q_1-\mu_1}^{q_1-1} D^{q_1-p-1,0} L_2 f(x_r^1, x^2)\cdot\Big[\sum_{n=q_1-\mu_1}^{p} (-1)^n D^{n,0}\{c^1_{q_1-p+n} L_1 L_2 S\}\Big]_{x_r^1}.$$

Из условий леммы следует, что выражение в круглых скобках равно нулю. Если проделать аналогичные выкладки для L_2, то получим первое равенство леммы. Второе доказывается аналогично.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Утверждение леммы остается справедливым, если функция $f(x)\in W_2^q(\Omega)$, класс B по переменной x^j принадлежит типу I', а сплайн $S(x)$ по переменной x^j произволен. Нужно только несколько изменить $(D_i^\nu)^{\mathrm{I}}$ и $(D_i^\nu)^{\mathrm{II}}$, а именно в формулах (I) и (2) вести суммирование по l_j от 0 до $q_j-1-\nu_j$ и по l от 0 до $q-1-\nu$ и от 0 до $\alpha-1_\alpha-\nu$ (в двух суммах), а также в формуле (1) считать, что фундаментальные сплайны удовлетворяют граничным условиям типа I'.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $f(x)\in W_2^q(\Omega)$ и $S(x)$ есть L-сплайн, такой что $D^\nu S(x_i) = D^\nu f(x_i)$, $0\le\nu\le\mu-1$, $0\le i\le N$. Предположим, что по каждой переменной x^j выполнено одно из трех условий:

I) $S(x)$ удовлетворяет естественным граничным условиям,

2) $f(x)-S(x)$ принадлежит типу I',

3) $f(x)$ и $S(x)$ удовлетворяют периодическим граничным условиям.

Тогда $J^{\mathrm{II}}(f-S) = J^{\mathrm{II}}(f) - J^{\mathrm{II}}(S)$.

Теперь мы можем применить рассуждения, использованные автором в работах [6,7], и получить следующие теоремы.

ТЕОРЕМА I. Среди всех функций из $W_2^q(\Omega)$ таких, что $D^\nu f(x_i)=z_i^\nu$, где z_i^ν – действительные числа, $0\le\nu\le\mu-1$, $0\le i\le N$, интерполяционный L-сплайн, удовлетворяющий естественным граничным условиям, является единственной функцией, доставляющей минимум функционалу J^{Π}.

ТЕОРЕМА 2. На классе $W_2^q(\Omega)$ минимум функционала

$$J^{\Pi}(f) + \sum_{i,\nu} \sigma_i^{\nu}(D^{\nu}f(x_i) - z_i^{\nu})^2, \ \sigma_i^{\nu} > 0 ,$$

достигается на единственной функции - сглаживающем L-сплайне $S(x)$, удовлетворяющем естественным граничным условиям и условиям характеризации: $\sigma_i^{\nu}(D^{\nu}S(x_i) - z_i^{\nu}) = (D_i^{\nu})^{\Pi}$.

ТЕОРЕМА 3. Среди всех функций $f(x)$ из $W_2^q(\Omega)$, таких что $|D^{\nu}f(x_i) - z_i^{\nu}| \le \varepsilon_i^{\nu}$, минимум функционала $J^{\Pi}(f)$ достигается только на L-сплайне, удовлетворяющем естественным граничным условиям и условиям характеризации:

$$(D_i^{\nu})^{\Pi} \ge 0 \quad \text{при} \quad D^{\nu}S(x_i) = z_i^{\nu} - \varepsilon_i^{\nu} ,$$

$$(D_i^{\nu})^{\Pi} \le 0 \quad \text{при} \quad D^{\nu}S(x_i) = z_i^{\nu} + \varepsilon_i^{\nu} ,$$

$$(D_i^{\nu})^{\Pi} = 0 \quad \text{при} \quad |D^{\nu}S(x_i) - z_i^{\nu}| < \varepsilon_i^{\nu} .$$

ТЕОРЕМА 4. Среди всех функций $f(x)$ из класса B, таких что $|D^{\nu}f(x_i) - z_i^{\nu}| \le \varepsilon_i^{\nu}$, минимум функционала $J^{I}(f)$ достигается только на L-сплайне, удовлетворяющем естественным граничным условиям и условиям характеризации:

$$(D_i^{\nu})^{I} \ge 0 \quad \text{при} \quad D^{\nu}S(x_i) = z_i^{\nu} - \varepsilon_i^{\nu},$$

$$(D_i^{\nu})^{I} \le 0 \quad \text{при} \quad D^{\nu}S(x_i) = z_i^{\nu} + \varepsilon_i^{\nu} ,$$

$$(D_i^{\nu})^{I} = 0 \quad \text{при} \quad |D^{\nu}S(x_i) - z_i^{\nu}| < \varepsilon_i^{\nu} .$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Эти теоремы остаются справедливыми и для L-сплайнов, удовлетворяющих по каждой переменной одному из трех типов граничных условий: типа I, естественным и периодическим – на соответствующих классах функций.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для L-сплайнов можно также рассматривать L-сплайн-отображения и доказать аналог теоремы 3 из работы [7].

Литература

1. ЛОРАН П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация.– М.:Мир, 1975. – 496 с.

2. АЛБЕРГ Дж., НИЛЬСОН Э., УОЛШ Дж. Теория сплайнов и ее приложения. – М.:Мир,1972. –316 с.

3. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Интерполирование L-сплайн-функциями многих переменных.-Мат.заметки, 1973,т.14, №1, с.11-20.

4. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Сглаживание L-сплайн-функциями многих переменных. -Мат. заметки, 1974, т.15, № 3, с. 371-379.

5. ИМАМОВ А. О некоторых экстремальных свойствах сплайнов многих переменных. -В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 65). Новосибирск, 1975, с. 68-73.

6. ВЕРШИНИН В.В. О сглаживающих сплайнах и их производных. - Новосибирск, 1980.-20 с. (Препринт/Ин-т математики СО АН СССР).

7. ВЕРШИНИН В.В. О сплайн-отображениях. – В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы,вып.87).Новосибирск,1981, с. 43-52.

Поступила в ред.-изд.отд.
9 июля 1982 года