

УДК 517.927

РАСЧЕТ ХАРАКТЕРИСТИК МНОГОСЛОЙНОЙ ПЛЕНОЧНОЙ ЕМКОСТНОЙ СТРУКТУРЫ

С.И.Фадеев

Рассматриваемую модель многослойной пленочной емкостной структуры можно представить в виде однородной среды, состоящей из ячеек, плоское сечение которой дано на рис.1 [1]. Здесь горизонтальные прямые изображают диэлектрические пленки с металлизированной поверхностью на одной стороне. Вертикальные отрезки-распорки жестко скреплены с пленками. Каждая из пленок имеет потенциал, знак которого указывает на характер их взаимного притяжения: в слое, ограниченном пленками с потенциалами одного знака, электростатическое поле не оказывает никакого воздействия. Так как зазоры между пленками весьма малы, то мы будем пренебрегать влиянием электростатического поля соседних ячеек на рассматриваемую. Эти обстоятельства позволяют свести проблему к описанию свойств пружины, изображенной на рис.2. Пружина состоит из недеформируемых распорок, скрепляющих ячейки. Нам достаточно найти форму равновесия одной из пленок, ограничивающих ячейку, на которую, помимо электростатического притяжения, действует известная сосредоточенная сила P_c , обусловленная внешней нагрузкой, см. рис.3.

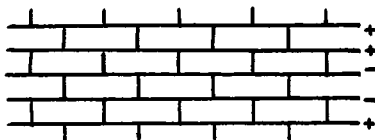


Рис. 1

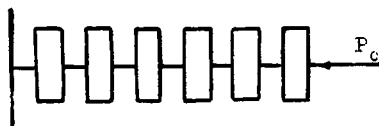


Рис. 2

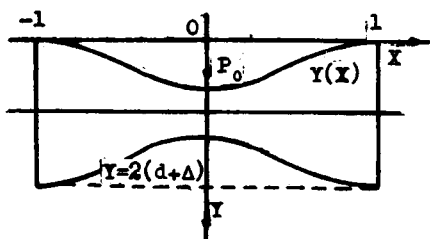


Рис. 3

Приведем формулировку краевой задачи, в известном приближении описывающую статическое равновесие пленки (гибкий электрод) [2]. В силу симметрии можно считать, что гибкий электрод притягивается к неподвижному электроду, расположенному посредине ячейки, при нулевом потенциале. Потенциал гибкого электрода пусть равен U_0 . Имеем:

$$\left. \begin{aligned} DY^{IV}(X) &= \frac{\epsilon_0 U_0^2}{2[d + \Delta/\epsilon - Y(X)]^2} + P_0 \delta(X-0), \\ Y(-1) &= Y'(-1) = Y(1) = Y'(1) = 0, \quad X \in (-1, 1). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь D — жесткость пленки, ϵ_0 — электрическая постоянная для пустоты, ϵ — электрическая постоянная для диэлектрика, который слоем толщиной Δ покрывает пленку, $(d + \Delta - Y)$ — зазор между электродами в точке X ; геометрические размеры d и 1 приведены на рис. 3. Малость зазора дает возможность использовать простую формулу зависимости силы электростатического притяжения от расстояния между обкладками плоского конденсатора.

Из определения δ -функции и симметрии следует, что

$$D[Y'''(+0) - Y'''(-0)] = P_0 = 2DY'''(+0).$$

Поэтому формулировку задачи (I) можно записать иначе:

$$\left. \begin{aligned} DY^{IV}(X) &= \frac{\epsilon_0 U_0^2}{2[d + \Delta/\epsilon - Y(X)]^2}, \quad X \in [0, 1], \\ Y'(0) &= Y(1) = Y'(1) = 0, \quad Y'''(0) = P_0/2D. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Далее, введем в рассмотрение безразмерные величины x и y : $X = 1x$, $Y = (d + \Delta/\epsilon)y$. Тогда краевая задача относительно $y(x)$ будет иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} y^{IV}(x) &= \frac{\sigma}{[1-y(x)]^2}, \quad x \in [0,1], \\ y'(0) &= y(1) = y'(1) = 0 \quad y'''(0) = p_0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 U_0^2 l^4}{2D(d + \Delta/\epsilon)^3}, \quad p_0 = \frac{P_0 l^3}{2D(d + \Delta/\epsilon)}. \quad (4)$$

Для численного исследования нам потребуется интегральное представление задачи (3). С этой целью найдем выражение функции Грина $G(x; \theta)$:

$$\begin{aligned} G^{IV}(x) &= \delta(x-\theta), \quad x, \theta \in [0,1], \\ G'(0) &= G'''(0) = G(1) = G'(1) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$G(x, \theta) = \begin{cases} (1-\theta)^2(1+2\theta-3x^2)/12, & x \leq \theta, \\ (1-x)^2(1+2x-3\theta^2)/12, & x > \theta. \end{cases}$$

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что эквивалентное задаче (3) интегральное представление записывается следующим образом:

$$y(x) = \sigma \int_0^1 G(x, \theta) \frac{d\theta}{[1-y(\theta)]^2} + p_0 G(x, 0), \quad (5)$$

или

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{\sigma}{12} \left\{ (1-x)^2 \int_0^x (1+2x-3\theta^2) \frac{d\theta}{[1-y(\theta)]^2} + \right. \\ &\quad \left. + \int_x^1 (1-\theta)^2(1+2\theta-3x^2) \frac{d\theta}{[1-y(\theta)]^2} \right\} + \frac{p_0}{12} (1-x)^2(1+2x). \end{aligned}$$

Наконец, подстановка в (5) выражения

$$y(x) = z(x) + p_0 G(x, 0) \quad (6)$$

приводит к интегральному уравнению типа Гаммерштейна относительно функции $z(x)$ [3]:

$$z(x) = \sigma \int_0^1 G(x, \theta) f[\theta, z(\theta)] d\theta, \quad (7)$$

$$f[\theta, z(\theta)] = 1/[1 - z(\theta) - p_0 G(\theta, 0)]^2.$$

Заметим, что $y(x) < y(0)$, $0 \leq y(0) < 1$, при $x > 0$. Так как $G(0, 0) = 1/12$, то имеют место условия: $1 - z(0) - p_0/12 > 0$, $p_0 < 12$.

Из физического смысла задачи следует ожидать, что решение (7), где $p_0 < 12$, существует не при всех σ [2]. Действительно, для достаточно большой разности потенциалов U_0 электростатические силы притяжения не могут быть уравновешены упругими силами, и в этом случае гибкий электрод будет притянут к неподвижному электроду за конечное время. Поэтому требуется "обратить" задачу, причислив к входным параметрам задачи $z_0 = z(0)$, а σ считать неизвестным. Исключив σ из (7) при помощи равенства

$$z(0) = \sigma \int_0^1 G(0, \theta) f[\theta, z(\theta)] d\theta, \quad (8)$$

получим следующее функциональное уравнение:

$$z(x) = z_0 \frac{\int_0^1 G(x, \theta) f[\theta, z(\theta)] d\theta}{\int_0^1 G(0, \theta) f[\theta, z(\theta)] d\theta}. \quad (9)$$

Оказывается, что "обращенная" задача имеет единственное решение при изменении z_0 от 0 до $1 - p_0/12$, которое может быть найдено методом простой итерации с начальным распределением $z^0(x) = z_0$. Значение σ , соответствующее заданному z_0 , находится из (8). Далее, зависимость σ от z_0 (или y_0 , $y_0 = y(0)$) однозначна и характеризуется следующим свойством: при σ , меньших некоторого значения σ_* , существует два решения задачи с различными $z(0)$, отвечающими одному и тому же σ , причем $\sigma = 0$, если $z(0) = 0$ и $z(0) = 1 - p_0/12$. При σ , больших σ_* , решения задачи (7) не существует (см. рис. 4).

Поясним сказанное на примере структуры, в которой пленки считаются недеформированными, а распорки - пружины с жесткостью G . Уравнение равновесия пленки, аналогичное (1), имеет вид:

$$\frac{\epsilon_0 U_0^2 l}{2(d + \Delta/\epsilon - y)^2} + P_0 = Gy.$$

Чтобы сохранить обозначения, использованные в (3), положим G равным $24D/l^3$. Перейдя к безразмерным величинам, получим: $\sigma = 24(1 - y_0)^2(y_0 - P_0/12)$. Найденная зависимость качественно совпадает с изображенной на рис. 4. В частности, максимальное значение σ , равное $96(1 - P_0/12)^3/27$, достигается при $y_0 = 1/3 + P_0/18$. Более того, мы нашли приближенное решение задачи (5) с погрешностью, убывающей при $y_0 \rightarrow 0$.

Остановимся на "технологии" численного решения функционального уравнения (9). Пусть $x_1, \dots, x_N$, $i = 1, 2, \dots, N$, - точки разбиения отрезка $[0, 1]$, $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_N = 1$. Обозначим через Z вектор размерности N с элементами $Z_1, Z_2, \dots, Z_N$, являющимися приближенными значениями $z(x)$ в точках $x_1, x_2, \dots, x_N$ соответственно. Система нелинейных уравнений, определяющая Z , образуется при замене $f[x, z(x)]$ интерполяционным кубическим сплайном $\bar{z}(x)$ дефекта 1 с нулевыми граничными условиями интерполяции [4]:

$$\bar{z}(x) = \sum_{i=1}^N f(x_i, Z_i) \Phi_i(x),$$

где $\Phi_i(x)$ - фундаментальный кубический сплайн. По определению

$$\Phi_i(x_k) = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases}, \quad \Phi_i(x_1) = \Phi_i(x_N) = 0.$$

Здесь учтено, что $f'_x[x, z(x)] = 0$ при $x=0$ и $x=1$. Из интегрального уравнения (7), в котором $x=x_i$, следует:

$$Z_i = \sigma \int_0^1 G(x_i, \theta) s(\theta) d\theta = \sigma \sum_{k=1}^N A_{i,k} f_k(Z),$$

где

$$A_{i,k} = \int_0^1 G(x_i, \theta) \Phi_k(\theta) d\theta, \quad f_k(Z) = f(x_k, Z_k).$$

Коэффициенты $A_{i,k}$ вычисляются точно, если известно явное представление сплайна $\Phi_k(x)$ [4]: $x = x_i + h_i t$, $h_i = x_{i+1} - x_i$, $0 \leq t \leq 1$,

$$s(x) \equiv \Phi_k(x) = s_i(1-t) + s_{i+1}t - h_i^2[(t^3 - 3t^2 + 2t)M_i + (t - t^3)M_{i+1}], \text{ где}$$

$s_i = s(x_i)$, а коэффициенты M_i удовлетворяют системе N линейных алгебраических уравнений:

$$i=1, \quad 2h_1M_1 + h_1M_2 = (s_2 - s_1)/h_1,$$

$$i=2, 3, \dots, N-1,$$

$$h_{i-1}M_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)M_i + h_iM_{i+1} = (s_{i+1} - s_i)/h_i - (s_i - s_{i-1})/h_{i-1},$$

$$i=N, \quad h_{N-1}M_{N-1} + 2h_NM_N = (s_N - s_{N-1})/h_{N-1}.$$

Эффективным способом решения такой системы является метод прогонки [5]. Имеем:

$$\begin{aligned} A_{i,k} = & \frac{1}{12} \left[(1-x_i)^2 \int_0^1 (1+2x_i-3\theta^2) \Phi_k(\theta) d\theta + \right. \\ & \left. + \int_{x_i}^1 (1-\theta)^2 (1+2\theta-3x_i^2) \Phi_k(\theta) d\theta \right] = \frac{(1-x_i)^2}{12} \sum_{v=1}^{i-1} [(1+2x_i-3x_v^2)P_{v,1} - \\ & - 3(2x_vP_{v,2} + P_{v,3})] + \frac{1}{12} \sum_{v=i}^{N-1} [(1-x_v)^2 (1+2x_v-3x_i^2)P_{v,1} - \\ & - 6(1-x_v)(x_v-x_i^2)P_{v,2} - 3(1-2x_v+x_i^2)P_{v,3} + 2P_{v,4}], \end{aligned}$$

где

$$P_{v,1} = \frac{h_v}{2} \left[s_v + s_{v+1} - \frac{h_v^2}{2} (M_v + M_{v+1}) \right],$$

$$P_{v,2} = \frac{h_v}{6} \left[s_v + 2s_{v+1} - \frac{h_v^2}{10} (M_v + 8M_{v+1}) \right],$$

$$P_{v,3} = \frac{h_v^3}{12} \left[s_v + 3s_{v+1} - \frac{h_v^2}{5} (4M_v + 5M_{v+1}) \right],$$

$$P_{v,4} = \frac{h_v^4}{20} \left[s_v + 4s_{v+1} - 2\frac{h_v}{7}(3M_v + 4M_{v+1}) \right].$$

Пусть $f(Z)$ - вектор размерности s с элементами $f_k(Z)$, A - матрица размерности $N \times N$ с элементами $A_{i,k}$, A_i - i -я вектор-строка матрицы A . При этом система нелинейных уравнений, порожденная интегральным уравнением (7), запишется следующим образом:

$$Z = \sigma Af(Z). \quad (10)$$

"Обратив" задачу (10), получим:

$$Z = \frac{z_0}{(A_i, f(Z))} Af(Z). \quad (11)$$

Приближенное значение σ , соответствующее заданному z_0 , которое мы обозначим через $\tilde{\sigma}$, определится по формуле:

$$\tilde{\sigma} = z_0 / (A_i, f(Z)). \quad (12)$$

Можно утверждать, что функция $\tilde{z}(x)$,

$$\tilde{z}(x) = \sigma \int_0^1 G(x, \theta) S(\theta) d\theta,$$

аппроксимирует $z(x)$ с погрешностью порядка h^4 , где h - максимальный из шагов разбиения отрезка $[0, 1]$.

Пусть U - вектор с элементами $U_1, U_2, \dots, U_N$, $U_1 = z_0$, являющийся приближением Z . Применительно к задаче (II) метод простой итерации состоит в том, что вычисляется вектор V по формуле:

$$V = \frac{z_0}{(A_i, f(U))} Af(U). \quad (13)$$

При этом $V_1 = z_0$. Далее полагаем U равным V и повторяем процесс.

По методу Ньютона [6] решение ищется в виде: $Z = U + \Delta Z$. Будем считать, что норма вектора ΔZ достаточно мала. Обозначим через $f'(U)\Delta Z$ вектор с элементами $f'_U(x_k, U_k)\Delta Z_k$, $k = 1, 2, \dots, N$. После линеаризации правой части (II) будем иметь следующую систему линейных алгебраических уравнений, определяющую ΔZ :

$$\sigma_0 Af'(U)\Delta Z - (A_i, f'(U)\Delta Z)V - \Delta Z = (A_i, f(U))(U - V). \quad (14)$$

Выпишем i -е уравнение системы: $i = 1, 2, \dots, N$,

$$\sum_{k=1}^N (z_0 A_{1,k} - V_1 A_{1,k}) f_U^i(x_k, U_k) \Delta z_k - \Delta z_1 = (U_1 - V_1) \sum_{k=1}^N A_{1,k} f(x_k, U_k).$$

Так как $V_1 = U_1 = z_0$, то $\Delta z_1 = 0$. После нахождения $\Delta z_2, \Delta z_3, \dots, \Delta z_N$ вектор $U + \Delta z$ принимаем за новый вектор U и так далее.

Отметим, что решение задачи (II) эффективно строится методом простой итерации. Как показывает численный эксперимент, количество приближений, необходимое для достижения заданной точности, по методу простой итерации и по методу Ньютона практически одно и то же, но простая итерация требует меньшего объема вычислений.

Рис. 4-6 содержат в виде графиков результаты вычислений. На рис. 4 приведена зависимость σ от y_0 при различных p_0 (возле каждой кривой проставлено соответствующее значение p_0). Наряду с решением задачи находился параметр c_0 :

$$c_0 = \int_0^1 \frac{1}{1 - y(x)} dx,$$

как функция σ при различных p_0 (рис. 5). При этом емкость ячейки

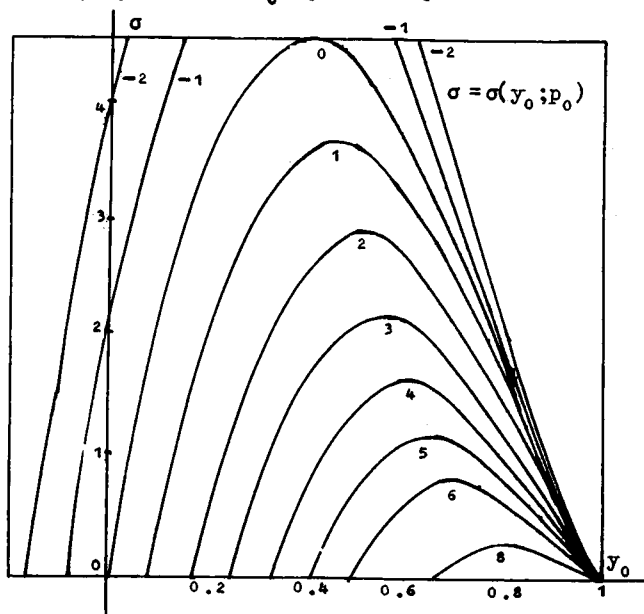


Рис. 4

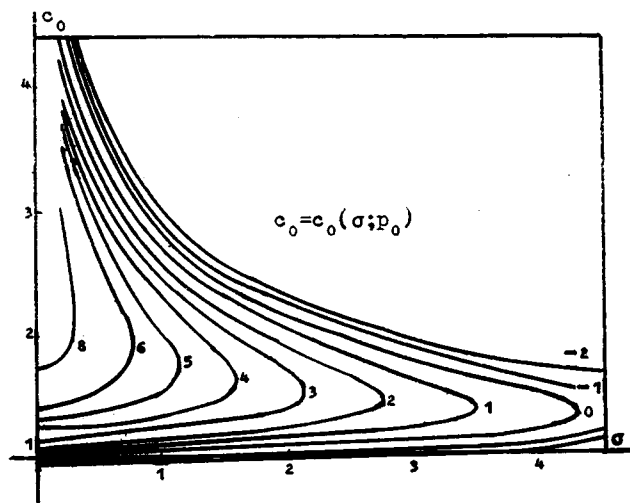


Рис. 5. Зависимость c_0 от σ при различных p_0 .

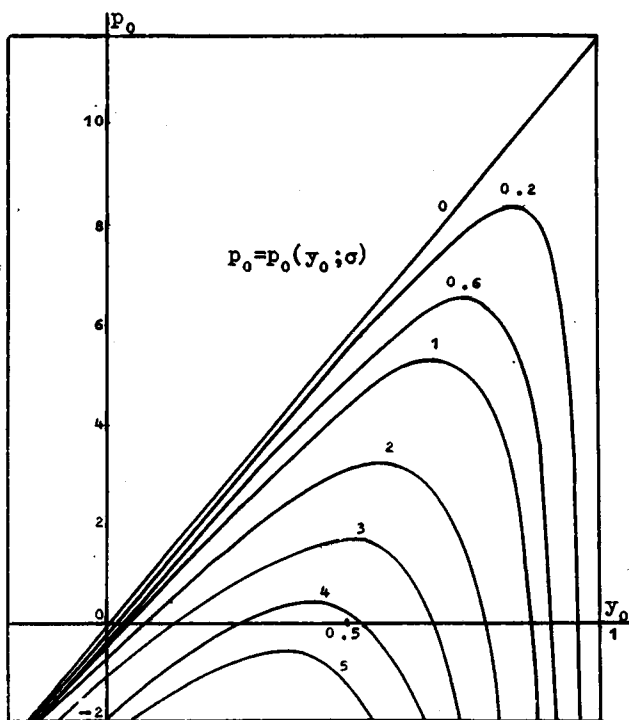


Рис. 6. Зависимость p_0 от y_0 при различных σ .

определяется по формуле:

$$C = \frac{\epsilon_0 l}{d + \Delta/\epsilon} c_0.$$

Другая зависимость: $P_0 = P_0(Y_0; \sigma)$ дана на рис.6 (возле каждой кривой проставлено соответствующее значение σ). Эти результаты полностью описывают основные электромеханические свойства рассматриваемой модели среды [7].

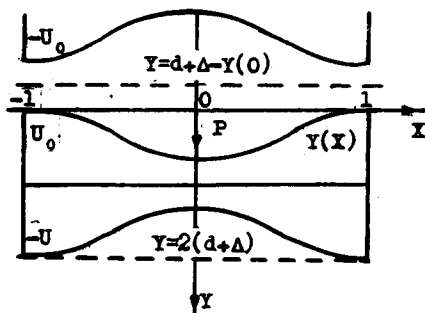


Рис. 7

Пусть знаки потенциалов меняются от пленки к пленке. Задача описания структуры вновь сводится к определению $Y(X)$ - статического равновесия пленки, ограничивающей ячейку (см.рис.7). Однако рас-пределение электростатической нагрузки и величина сосредоточенной силы P будут уже иными. В

данном случае требуется учесть притяжение к соседней пленке с потенциалом $-U_0$, форма которой и $Y(X)$ симметричны относительно линии $Y = Y(0) - d - \Delta$. Уравнение равновесия имеет вид:

$$DU^{IV}(X) = \frac{\epsilon_0 U_0^2}{2} \left\{ \frac{1}{[d + \Delta/\epsilon - Y(X)]^2} - \frac{1}{[d + \Delta/\epsilon - Y(0) + Y(X)]^2} \right\} + P\delta(X-0), Y(-1) = Y'(-1) = Y(1) = Y'(1) = 0. \quad (15)$$

Сосредоточенная сила P является алгебраической суммой двух слагаемых $P = P_0 + P_1$, где P_0 обусловлена внешней нагрузкой, а

$$P_1 = \epsilon_0 U_0^2 \int_0^1 \frac{dX}{[d + \Delta/\epsilon - Y(0) + Y(X)]^2}.$$

Воспользуемся введенными ранее обозначениями и представим задачу (15) в виде интегрального уравнения:

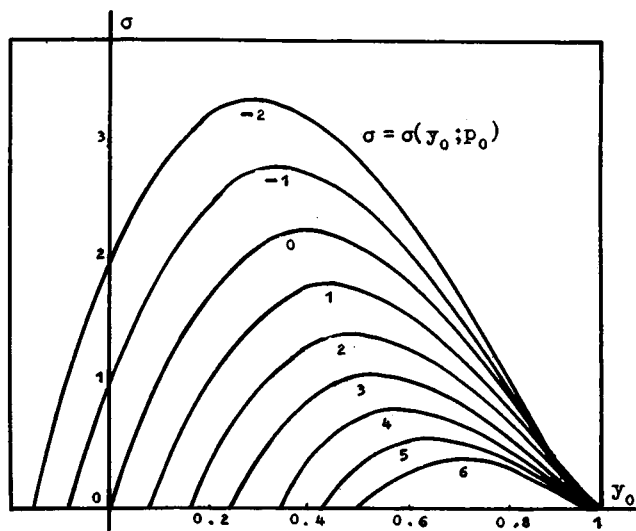


Рис. 8. Зависимость σ от y_0 при различных p_0 .

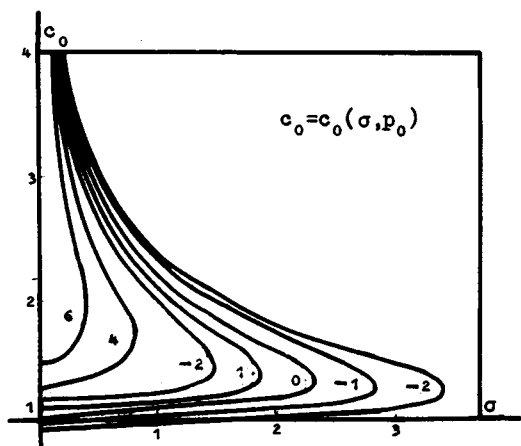


Рис. 9. Зависимость c_0 от σ при различных p_0 .

$$y(x) = \sigma \int_0^1 G(x, \theta) f[y(\theta)] d\theta + (\sigma p_* + p_0) G(x, 0),$$

где

$$f(y) = \frac{1}{(1-y)^2} - \frac{1}{(1-y_0+y)^2}, \quad p_* = \int_0^1 \frac{d\theta}{[1-y_0+y(\theta)]^2}.$$

Отсюда следует формулировка "обращенной" задачи, аналогичная (II):

$$Z = z_0 \frac{Af(Z) + p_* G}{(A_1, f(Z)) + p_* G_1}. \quad (16)$$

Здесь G - N -мерный вектор с элементами G_1 , равными $G(x_1, 0)$; остальные обозначения прежние.

Численное решение уравнения (I6) может быть найдено теми же способами, что и уравнения (II). В частности, эффективен метод последовательных приближений. Результаты вычислений представлены на рис. 8-10. Сопоставление с предыдущим вариантом показывает, что при чередовании знаков потенциалов от пленки к пленке возрастает

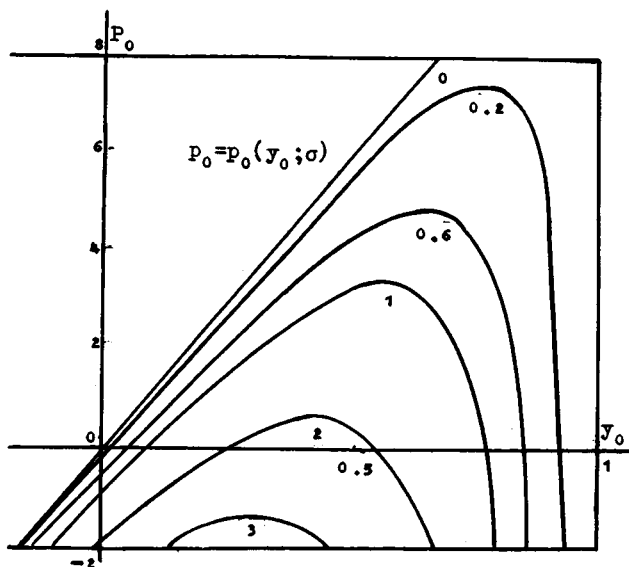


Рис. 10

чувствительность структуры к внешней нагрузке. Наконец, случай комбинации двух вариантов, очевидно, не требует специального исследования.

Все результаты работы детально обсуждались с В.Л.Дятловым, который предложил рассмотренную здесь структуру. Автор, пользуясь случаем, выражает ему благодарность.

Л и т е р а т у р а

1. ДЯТЛОВ В.Л. Пленочная электромеханика - основа создания универсальных пленочных емкостных двигателей с высокой энергоемкостью. - В кн.: Моделирование в пленочной электромеханике (Вычислительные системы, вып. 84). Новосибирск, 1981, с. 3-32.
2. ФАДЕЕВ С.И., ЛУКЬЯНОВА Р.Г., ШВЕДОВА К.В. Расчет статистических параметров механической модели пленочного электростатического реле. - В кн.: Вычислительные системы. Вып. 40. Новосибирск, 1970, с. 3-35.
3. ТРИКОМИ Ф. Интегральные уравнения. -М.: ИЛ, 1960. -299 с.
4. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы-сплайн функций. -М.: Наука, 1980. -352 с.
5. ГОДУНОВ С.К., РЯБЕНЬКИЙ В.С. Разностные схемы. -М.: Наука, 1977. - 440 с.
6. БЕРЕЗИН И.С., ЖИДКОВ Н.П. Методы вычислений, т.2. -М., 1962, -620 с.
7. ДЯТЛОВ В.Л., ПЬЯНКОВ Ю.А., ХОРОМЕНКО А.А. Пленочные многослойные емкостные структуры с изменяемой жесткостью. - Настоящий сборник, с. 62-65.

Поступила в ред.-изд.отд.
29 сентября 1982 года