МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ВС ИЗ МИНИ-ЭВМ
(Вычислительные системы)

1983 год Выпуск 96

УДК 519.876

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ГАРМОНИЧНЫХ СИСТЕМ

Ю.Г.Косарев

Одно из основных последствий научно-технической революции - все ускоряющееся моральное старение массовых продуктов человеческой деятельности: информации, машин, методов исследования, технологических процессов и т.д. и т.п.

Особенно сильно это проявляется в наиболее быстро развивающихся областях. Так, смена поколений ЭВМ, происходящая примерно каждые 10 лет (а нередко и замена одной ЭВМ другой в рамках одного поколения) ведет к капитальным переделкам математического обеспечения, стоимость которого все время растет и начинает превышать стоимость оборудования. Быстрое старение (и обесценивание) математического обеспечения - сейчас одна из основных причин, тормозящих НТР.

Аналогичные явления наблюдаются практически во всех областях массовой деятельности современного человека. Непрерывный рост продукции, повышение ее качества, замена одной модели другой, более совершенной, обычно сопровождаются ломкой установившейся технологии, реконструкцией промышленных предприятий, длительными отладками новой технологии и т.п.

В условиях такого нарастающего динамизма особую актуальность приобретают усилия, направленные на предотвращение или, по крайней мере, на замедление процессов обесценивания огромного овеществленного труда, связанного с несбалансированным физическим или моральным старением элементов создаваемых систем. Стремление уменьшить указанную несбалансированность означает в идеале достижение полной взаимосогласованности (например, равнопрочности, равнонадежности в процессах физического старения) и ее сохранение в течение всего срока функционирования. Под полной взаимосогласован -

ностью понимается такое состояние, когда достигнута взаимосогласованность как внутри каждого уровня иерархии между элементами одного и того же объекта, характеризуемая тем, что значение целевой функции любого из элементов не может быть улучшено без ухудшения значения целевой функции какого-либо другого элемента (оптимум по Парето), так и между соседними уровнями иерархии, характеризуемая выбором того из допустимых вариантов значений целевых функций элементов данного объекта, которому соответствует наилучшее значение целевой функции этого объекта.

Один из возможных путей создания подобных систем - их композиция по определенным правилам из изначальных функциональных элементов - атомов, наделенных способностью к адаптации - видоизменению своих функциональных свойств в пределах, необходимых для устранения возникающих в системе несбалансированностей.

Здесь принимается, что функциональные, или F-свойства атомов определяют не только функцию, для выполнения которой предназначен данный атом, но и способ ее реализации (процесс функционирования), а также способ измерения эффективности - количественных характеристик качества функционирования. Ресурсные или R-свойства атомов характеризуют как способ изменения эффективности, так и тип ее функциональной зависимости (R-функции) от управляющих воздействий - количества определенных видов ресурсов (A-ресурсов), отводимых данному атому.

Правила композиции определяют способность образовывать на одной и той же совокупности атомов два класса структур: функциональные (F-структуры) для выполнения более сложных функций и ресурсные (R-структуры) для создания единой системы управления характеристиками F-структур. F-структура получается путем объединения атомов в функциональные блоки (F-блоки), которые, в свою очередь, объединяются в F-блоки более высокого уровня и так до образования единого F-блока - F-системы. R-структура образуется путем объединения атомов в ресурсные блоки (R-блоки), иерархическое объединение которых образует единый R-блок - R-систему. При этом предполагается, что имеется конечное число типов схем (R-схем) объединения в R-блоки атомов и R-блоков более низкого уровня; что с каждым R-блоком связана R-функция, получающаяся из R-функций образующих его атомов (R-блоков) с учетом типа R-схемы; и что множество допустимых R-структур и типов R-схем для каждого R-блока определяется F-структурой.

Можно видеть, что объединение F- и R-структур на уровне F- и R-систем и образует искомую систему (FR-систему), в которой заложены возможности для управления взаимосогласованностью всех ее элементов.

Реализацию этих возможностей естественно начать с построения простейшей из начальной математической модели FR-систем. В качестве таковой выбрана модель двухуровневой FR-системы, у которой предполагаются известными и фиксированными F- и R-структуры, включая и тип R-схемы.

Для построения такой модели необходимо: установить вид функциональных зависимостей, отражающих взаимосогласованность элементов (атомов или R-блоков) друг с другом, а также с R-блоком, элементами которого они являются; найти простейший класс R-функций, обладающих требуемыми свойствами, и для каждого типа R-схем задать функциональную зависимость между видом R-функций R-блока и видом R-функций его элементов.

Искомая модель должна служить основой для построения многоуровневых FR-систем путем рекуррентного ее использования для расширения класса моделей путем усложнения вида функций, а также для создания моделей FR-систем с более глубокими уровнями рассмотрения, например, оптимизации типов R-схем при заданной R-структуре, R-структуры при заданной F-структуре, F-структуры при заданном наборе атомов, набора атомов при заданных составе и количестве строительных ресурсов (G-ресурсов) и т.п.

§I. Необходимые и желаемые свойства модели

1.1. Цель данной работы состоит в построении математической модели системы, у которой все ее свойства к свойству всех ее элементов (структурные и субстанциональные)*), находятся в полном взаимном согласии (гармонии) как с выполняемыми системой функциями и условиями ее функционирования, так и друг с другом. И более того, эта гармония должна сохраняться при изменениях условий функционирования. Иначе говоря, должны существовать средства защиты системы от "узких мест", связанных с выходом системы (или любого из ее элементов) на те или иные предельно допустимые состояния.

---

*) Свойства, присущие объектам независимо от факта их объединения с другими объектами (но которые, вообще говоря, могут быть выражены через структурные и субстанциональные свойства объектов, являющихся их элементами).

Под условиями функционирования здесь понимаются характеристики обменных процессов, определяющие взаимодействия системы как с ее надсистемой (внешние условия), так и с ее элементами (внутренние условия).

Под внешними условиями будем понимать А-ресурсы, представляемые данному объекту системой (элементом которой он является), трактуя термин "ресурс", с одной стороны, в расширенном смысле, как любую характеристику обменного процесса между объектом и системой, влияющую на значение эффективности объекта, а с другой стороны - в суженом (по сравнению с традиционным) смысле, так как не будем относить к А-ресурсам то, что в рассматриваемых условиях остается неизменным (и, следовательно, не влияет на значение эффективности). Внутренние условия функционирования данного объекта (при заданном наборе его элементов) определяются выбранной R-схемой и распределением А-ресурсов между элементами. Естественно, что эффективность функционирования объекта тем выше, чем лучшие условия ему "обеспечиваются" системой (элементом которой он является), и чем лучшие условия он "обеспечивает" сам для своих элементов (выступая в роли системы).

Таким образом, мы приходим к следующей задаче: при фиксированных внешних условиях (количестве и видах А-ресурсов) и заданном наборе элементов требуется найти наилучший вариант реализации внутренних условий данного объекта и для этих наилучших внутренних условий найти значение эффективности функционирования данного объекта как функцию значений эффективностей его элементов. Формальная постановка и решение этой задачи, собственно, и составляет ядро искомой математической модели.

I.2. Охарактеризуем свойства объектов, которые должны быть отражены в их математической модели.

I.2.I. Иерархичность. Объект представляет собой систему, элементы (объекты более глубокого уровня) которой, в свою очередь, состоят из элементов и т.д. до атомов, находящихся на самых глубоких уровнях.

I.2.2. Целенаправленность, измеримость и интерпретируемость. Будем далее рассматривать только целенаправленные системы и исходить из того, что система в целом и каждый из ее элементов выполняют вполне определенные функции и что существуют меры для количественной оценки как качества выполнения этих функций (эффективности), так и условий функционирования, обеспечивающих возможность установления количественных отношений: между эффективностью и условиями функционирования (как для системы, так и для ее элементов) и между эффективностями функционирования системы и ее элементов.

Предполагается, что все характеристики рассматриваемых систем, отражаемые в модели, обладают свойствами, которые традиционно связывают с понятием "физическая величина". Это означает, что к какой бы области (экономики, информатики и т.п.) эти величины не относились, они должны иметь ясную общенаучную интерпретацию и быть количественно измеримыми, т.е. каждому значению любой из этих величин ставится в соответствие число или, как принято говорить в теории измерений (см., например [I]), эти величины измеримы в сильных шкалах, и для каждой из этих величин должно существовать определяющее выражение вида

$$u = c \prod_{j=1}^{m} u_j^{d_j} ; \; u, c, u_j, d_j \in R \; ,$$

где $u_1, \ldots, u_m$ - основные величины, через которые могут быть выражены все остальные путем подбора соответствующих значений показателей степени $d_1, \ldots, d_m$ и константы c, величина которой зависит от выбора системы единиц. Набор $(d_1, \ldots, d_m)$ и определяет размерность величины u относительно выбранного набора основных величин. Далее термин "физическая величина" понимается в указанном расширенном смысле.

Для целей данной работы ограничение рассмотрения только физическими величинами принципиально, так как позволяет использовать развитые для физических величин теоретические разработки и формальный аппарат. Это в первую очередь касается теории измерений, которая позволяет ограничить класс функциональных зависимостей только физически осмысленными видами, и теории размерностей, на основе которой можно в заметном числе случаев определять значения показателей степени, в которых входят в данные уравнения физические величины [2]. И наоборот, отказ от обязательности физической природы рассматриваемых величин увеличивает субъективизм в выборе соответствующих функциональных зависимостей, которые в этом случае обычно находят по выборкам экспериментальных данных методами математической статистики, основываясь на интуитивных предположениях о представительности данной выборки, а также (как правило) о выполнимости данного закона распределения, т.е. при таком подходе нельзя быть уверенным ни в правильности выбора вида функции, ни в правильности определения значений констант в этих функциях. Поэтому в данном вопросе мы придерживаемся прямо противоположных взглядов с теми из авторов, которые при рассмотрении аналогичных величин, например производственных функций (см., например, [3]), возражают против ограничения рассмотрения только физическими величинами, и солидарны с П.Г.Кузнецовым [4], который считает, что предметом научного рассмотрения могут быть лишь те величины, которые имеют физическую (в широком смысле) интерпретацию.

I.2.3. Оптимальность. Будем считать, что система находится в оптимальном состоянии тогда (и только тогда), когда одновременно достигается наибольшее значение эффективности системы и взаимосогласованность состояний всех элементов системы, проявляющаяся в том, что увеличение значения эффективности любого из элементов обязательно ведет к ее уменьшению хотя бы у одного другого элементов системы (оптимум по Парето).

I.2.4. Устойчивость. Система должна обладать как локальной устойчивостью, когда небольшие изменения характеристик системы приводят лишь к небольшим изменениям оптимальных значений эффективности системы, так и глобальной устойчивостью, когда при любых изменениях характеристик системы в пределах допустимой области их задания сохраняется возможность достижения системой оптимального (в смысле п. I.2.3) состояния.

I.2.5. Иерархическая преемственность. Нас будут интересовать системы, все подсистемы которых обладают теми же выделенными атрибутами, что и система в целом. Это проявляется в требовании преемственности видов функциональной зависимости эффективности от условий функционирования при переходе от системы к любой ее подсистеме. Включение этого свойства связано с желанием отразить то, что рассматриваемые системы представляют собой не просто механическое (внешнее - эклектическое) объединение разнородных элементов, а некоторое внутреннее единство, в котором достигается взаимосогласованность всех частей (подсистем, элементов) между собой и между частью и целым. Именно такие свойства вырабатываются у различного рода систем в процессе их длительной адаптации к внешним условиям [5].

I.2.6. Простота реализации. Указанные выше свойства измеримости, оптимальности, устойчивости и иерархической преемственности должны быть практически осуществимыми. И более того, из всех вариантов реализации системы, обладающих указанными выше свойствами, предпочтение (при прочих равных условиях) должно быть отдано самым простым (по структуре, набору необходимых свойств, сложности нахождения оптимального состояния и т.п.).

I.3. Одним из главных принципов, положенных в основу создания рассматриваемых систем, является предположение о генетической обусловленности их основных свойств. Суть его состоит в следующем. Оптимальность и устойчивость (см. п.I.2) в самом широком понимании этих терминов (проявляющаяся в отсутствии "узких мест", в некритичности к изменениям условий функционирования и т.п.) может быть достигнута для данной системы лишь при условии, что в нее заранее, при ее создании (так сказать, генетически), были заложены некоторые специальные свойства. Суть данной работы как раз и заключается в выявлении для широкого класса систем указанных специальных свойств, необходимых и достаточных для достижения в этих системах полной взаимосогласованности, и отражении этих свойств в математической модели.

Для систем, не обладающих указанными специальными свойствами, может идти речь лишь о нахождении оптимума в некотором ограниченном смысле, как вынужденного компромисса, более или менее устраивающего сегодняшние практические нужды. При этом нередко для нахождения такого компромиссного решения приходится преодолевать большие вычислительные трудности, связанные не с существом проблемы, а с искусственно создаваемыми препятствиями, возникающими из-за ограниченности постановки проблемы.

§2. Схемы использования ресурсов

Наиболее существенным свойством рассматриваемых систем является то, что они получают извне определенное количество ресурсов и распределяют их между своими элементами. При этом важно не только то, в каком отношении распределяются эти ресурсы, но и прежде всего какова структура (R-схема) взаимодействия этих элементов при использовании ими ресурсов, поскольку выбор этой структуры может обусловить и выбор варианта распределения ресурсов.*)

---

*) Здесь и далее под ресурсами понимаются A-ресурсы.

2.I. Из общих соображений можно выделить два основных фактора, определяющих характер взаимодействия элементов системы при использование ими ресурсов:

I) способ работы этих элементов во времени: последователь - ный, когда в каждый момент времени работает и использует ресурсы только один из элементов, и параллельный, когда работают (и пользуются ресурсами) одновременно все элементы;

2) допустимость маневра ресурсами,т.е. возможность поочередного использования ресурсов, освобождающихся после окончания работы с ними данного элемента, остальными элементами системы.

Вполне понятно, что возможность совмещения работы элементов во времени определяется прежде всего функциональными свойствами этих элементов (точнее,теми функциональными связями между элементами, которые определяют допустимые последовательности их работы во времени).

Возможность же маневра тем или иным ресурсом зависит в первую очередь от свойств этого ресурса. Действительно, в случаях, когда ресурсом служит количество какой-либо утилизируемой при ее использовании субстанции (материал, сырье), возможность маневра, естественно, исключается. В других случаях, когда ресурсом служит количество какой-либо неутилизируемой субстанции, например оборудования (станки, аппаратура, каналы связи,процессоры и памяти ЭВМ и т.п.), его повторное использование (иногда сразу, а иногда после некоторых дополнительных усилий на транспортировку, переналадку, дозаправку, профилактику и т.п.) может оказаться и возможным и целесообразным в зависимости от свойств как ресурса, так и от функциональных свойств элементов, определяющих размеры этих усилий.

2.I.2. Рассмотрим теперь возможные типы R-схем. В первую очередь нас будут интересовать множества базовых R-схем, с помощью суперпозиций которых могут быть выражены все другие R-схемы[ж]. Множества базовых R-схем могут отличаться друг от друга видом R_m (числом видов m и свойствами R) ресурсов, местностью n (числом элементов, совместно использующих эти ресурсы) и, наконец, типом h (характером взаимодействия этих элементов).

В простейшем случае одного вида ресурса и двух элементов каждый из двух указанных ранее факторов (характер работы элемен-

---

[ж] Напомним, что суперпозицией принято называть такое объединение объектов, при котором каждый из объектов сохраняет все интересующие нас свойства, имевшиеся у него до объединения.

тов во времени и допустимость маневра ресурсами) может принимать только два значения, что определяет четыре возможные схемы. Полагая, что при одновременной работе элементы не обмениваются ресурсами, сократим полное множество типов R-схем до трех: S_p, S_0 и S_1 (табл. I). Этим схемам соответствуют взаимоисключающие свойства, т.е. они образуют минимальное базовое множество.

Таблица I

Факторы		
R-схемы	Характер работы элементов во времени	Маневр ресурсами
S_p	параллельный	не допускается
S_0	последовательный	отсутствует
S_1	последовательный	имеет место

2.3. В общем случае n элементов и m видов ресурсов будем предполагать, что все виды ресурсов взаимно независимы, для каждого из этих видов может использоваться своя R-схема (S_p, S_0 или S_1) одна и та же для всех элементов, каждый из элементов использует все виды A-ресурсов, при параллельной работе элементов для всех видов ресурсов допустима только одна R-схема S_p. Такие многоресурсные схемы можно разделить на однородные: S_p^m, S_0^m и S_m^m, у которых для всех m видов ресурсов применяется одна и та же схема

Таблица 2

Факторы		
R-схемы	Характер работы элементов во времени	Маневр ресурсами
S_p^m	параллельный	не допускается
S_0^m	последовательный	отсутствует для всех m видов ресурсов
S_k^m	последовательный	имеет место для k видов ресурсов
S_m^m	последовательный	имеет место для всех m видов ресурсов

S_p S_0 или S_1, и неоднородные S_k^m, у которых для k ($k = 1,\dots,m-1$) видов ресурсов применяется схема S_1, а для m-k остальных S_0 (табл.2). В обобщенной записи: S_p^m и S_s^m ($s=0,1,\dots,m$) или S_h^m ($h = p,0,1,\dots,m$) для всех m+2 типов R-схем. У каждой из последовательных R-схем может быть v_s вариантов распределения $B=(b_1,\dots\dots,b_m)$, $b_j \in \{0,1\}$ видов А-ресурсов по двум схемам (S_0 и S_1):

$$v_s = m!/(m-s)!\cdot s! \ ; \ \sum_{s=0}^{m} v_s = 2^m . \qquad (I)$$

§3. Свойства исходной модели

Для построения математической модели надо прежде всего перечислить используемые при этом математические объекты, определить налагаемые на них ограничения, а также указать их интерпретацию, т.е. связать эти объекты с реальными объектами и тем самым установить, какие ограничения отражают свойства реальных объектов, а какие взяты для облегчения построения модели. Ограничимся пока двухуровневыми системами[*)].

3.I. Создаваемая математическая модель имеет дело прежде всего со следующими типами математических объектов:

[*)] Для краткости далее будем использовать следующие записи:

$(1) \overset{(2)}{\underset{(3)}{\Rightarrow}}$ вместо "из выражения (I) с учетом (2) и (3) следует...";

$(1) \overset{p}{\Rightarrow}$, где p – оператор, например, если $p = \partial/\partial x$, то запись означает: "дифференцируя выражение (I) по x, получаем...";

$\overset{(1)}{=}$ употребляется вместо "с учетом (I) имеем...";

$A \triangleq B$ – "А равно В по определению";

$A \Leftrightarrow B$ – "А равносильно В"

$\square$ – означает конец утверждения, точнее, заменяет фразу "автор не намерен что-либо добавить к сказанному";

R^+ – множество вещественных неотрицательных чисел.

Ссылки на формулы из других параграфов имеют вид: (3.2), что указывает на формулу (2) из §3.

3.I.I. Строка $(X_1,\dots,X_m) \in (R^+)^m$, которая интерпретируется как количество ресурсов каждого из m видов, предоставленных некоторой системе A.

3.I.2. Матрица X_{nm} с n строками и m столбцами

$$X_{nm} = \begin{vmatrix} x_{11},\dots,x_{1m} \\ \dots\dots \\ x_{n1},\dots,x_{nm} \end{vmatrix}, \; x_{ij} \in R^+; \; i = 1,\dots,n; \; j=1,\dots,m, \qquad (1)$$

каждый элемент x_{ij} которой интерпретируется как количество ресурса вида j, предоставленное элементу a_i системы A.

3.I.3. Функции над матрицами вида (I)

$$y_h = \Phi_h(X_{nm}), \; y_h \in R^+; \quad X_{nm} \in K_h^m(X_1,\dots,X_m); \quad h = p,0,1,\dots,m, \qquad (2)$$

которые интерпретируются как эффективности системы A при различных схемах S_h; y_p соответствует параллельной схеме, а y_s - последовательным: однородным y_m, когда все элементы обмениваются всеми m видами ресурсов, и y_0, когда нет обмена ни для одного вида ресурсов; и неоднородным y_k $(k = 1,\dots,m-1)$, когда обмен имеет место только для k видов ресурсов.

Область определения функции (2)

$$K_h^m(X_1,\dots,X_m) \in \{K_p^m, K_s^m\}; \quad K_p^m, K_s^m \subset (R^+)^{mn}, \qquad (3)$$

представляет собой декартово произведение

$$K_s^m(X_1,\dots,X_m) \doteq \left(\prod_{j=1}^{s} K_j^{\varepsilon}(X_j)\right) \times \left(\prod_{j=s+1}^{m} K_j^{\sigma}(X_j)\right); \; s=0,1,\dots,m; \; K_p^m \doteq K_0^m, \qquad (4)$$

где

$$a > b \rightarrow \prod_{j=a}^{b}(\;) = 1; \qquad (5)$$

$$K_j^{\sigma}(X_j) \doteq \{x_{ij} \mid \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le X_j\}, \; K_j^{\sigma} \in R^+, \; j = 1,\dots,m; \qquad (6)$$

$$K_j^{\varepsilon}(X_j) \doteq \{x_{ij} \mid x_{ij} \le X_j; \; i=1,\dots,n\}, \; K_j^{\varepsilon} \in R^+, \; j = 1,\dots,m. \qquad (7)$$

Для однородных R-схем имеем

$$K_p^m \doteq K_0^m \doteq K^{\sigma} \doteq \prod_{j=1}^{m} K_j^{\sigma}; \quad K_m^m \doteq K^{\varepsilon} \doteq \prod_{j=1}^{m} K_j^{\varepsilon}. \qquad (8)$$

3.I.4. Функции над строкой $(X_1,\ldots,X_m)$

$$Y_h = F_h(X_1,\ldots,X_m),\ Y_h \in R^+_-,\ h=p,0,1,\ldots,m, \qquad (9)$$

которые интерпретируются как зависимости эффективности системы A от отведенного ей количества $X_1,\ldots,X_m$ каждого вида ресурсов при н а и л у ч ш е м варианте распределения ресурсов $\|\overset{o}{x}_{ij}\|$ между элементами системы для данной схемы S_h.

3.I.5. Функции над строками матрицы X_{nm}

$$y_i = f_i(x_{i1},\ldots,x_{im}),\ y_i \in R^+_-,\ i=1,\ldots,n, \qquad (10)$$

которые интерпретируются как зависимости эффективностей элементов a_i системы A от количества отведенных им ресурсов.

3.I.6. Функции от функций вида (10)

$$\mathcal{Y}_h = G_h(y_1,\ldots,y_n),\ \mathcal{Y}_h \in R^+_-;\quad h = p,s, \qquad (11)$$

$$\mathcal{Y}_p = \max_i \{y_i\},\quad i = 1,\ldots,n, \qquad (12)$$

$$\mathcal{Y}_s = \sum_{i=1}^{n} y_i;\quad s = 0,1,\ldots,m, \qquad (13)$$

которые интерпретируются как зависимости эффективностей системы A от эффективностей ее элементов $a_1,\ldots,a_n$ при параллельной S_p и последовательных S_s схемах.

3.2. Предположим, что функции (I0) принадлежат к множеству M_m по каждому из аргументов дифференцируемых и строго монотонно убывающих положительных, определенных на области вида (3) функций от m аргументов. Можно видеть, что свойства функций из множества M_m согласуются со свойствами рассматриваемых объектов. Дифференцируемость (а следовательно, и непрерывность) соответствует требованию устойчивости объектов к изменениям количества ресурсов. Строгая монотонность функций по каждому из аргументов вытекает из естественного требования исключить случаи, когда увеличение количества любого из видов ресурсов не изменяет, либо даже ухудшает эффективность функционирования. Убывающий характер зависимости и положительные значения функций выбраны для определенности. Это соответствует случаю, когда эффективность трактуется, например, как время реализации некоторого процесса.

3.3. Можно видеть, что между выражениями (9) и (10),(5), (3) существует вполне определенная связь, а именно:

$$Y_h(X_1,\dots,X_m) = \min_{K_h} G_h(f_1(x_{11},\dots,x_{1m}),\dots,f_n(x_{n1},\dots,x_{nm})),$$

$$h = p,s; \tag{14}$$

$$Y_p(X_1,\dots,X_m) = \min_{K_p} \max_{i=1}^{n}\{f_i(x_{i1},\dots,x_{im})\}; \tag{15}$$

$$Y_s(X_1,\dots,X_m) = \min_{K_s} \sum_{i=1}^{n} f_i(x_{i1},\dots,x_{im}), \quad s = 0,1,\dots,m, \tag{16}$$

где области определения K_h функций f_i устанавливают связь между значениями аргументов $\overset{\circ}{x}_{ij}$ этих функций, соответствующих минимуму, и их предельными значениями X_j – аргументами функций Y_h.

3.4.1. Назовем минимум функции G_h (11) Н-минимумом, при замене в (14) минимума на максимум функции G_h – Н-максимумом, а в тех случаях, когда речь идет либо о минимуме, либо о максимуме – Н-оптимумом. Соответствующие Н-оптимуму значения функций (9) и (10) и их аргументов назовем Н-оптимальными и пометим ноликом сверху: ($\overset{\circ}{Y}_h = Y_h$; $\overset{\circ}{y}_1,\dots,\overset{\circ}{y}_n$ и $\overset{\circ}{X}_{nm} = \|\overset{\circ}{x}_{ij}\|$), а сам факт наличия Н-оптимума – Н-оптимальностью. При интерпретации величин Y_h, y_i с указанными в 3.1 – 3.3 свойствами назовем соответствующие им физические величины эффективности Н-эффективностями.

3.4.2. Укажем некоторые свойства Н-минимума, вытекающие из монотонности функций (11) и строгой монотонности функций (10) по каждому из их аргументов.

ЛЕММА 1. *Если функция от функций вида (11) дифференцируема по каждому из ее аргументов y_i и Н-минимум достигается на совокупности $\{\overset{\circ}{y}_i\}$, то не существует другой совокупности $\{\overset{*}{y}_i\}$ такой, что*

$$\forall i\ (\overset{\circ}{y}_i \geq \overset{*}{y}_i)\ \&\ \exists i\ (\overset{\circ}{y}_i > \overset{*}{y}_i), \tag{17}$$

т.е. имеет место

$$\forall i(\overset{\circ}{y}_i \geq \overset{*}{y}_i \rightarrow \overset{\circ}{y}_i = \overset{*}{y}_i). \tag{18}$$

Заметим, что условия (17) и (18) совпадают с определением минимума по Парето (оптимум такого вида называют также согласованным оптимумом, а процесс его нахождения - векторной оптимизацией [6]), т.е. лемма 1 утверждает, что на одной и той же совокупности $\{\overset{\circ}{y}_i\}$ одновременно достигается как минимум функции (11), так и минимум по Парето.

ЛЕММА 2. Для каждого допустимого Н-оптимального набора $\{\overset{\circ}{x}_{ij}\}$ не существует другого Н-оптимального набора $\{\overset{*}{x}_{ij}\}$ такого, что

$$\forall i(\overset{*}{y}_i(\overset{*}{x}_{i1},\ldots,\overset{*}{x}_{im}) = \overset{\circ}{y}_i(\overset{\circ}{x}_{i1},\ldots,\overset{\circ}{x}_{im})) \& \forall i,j(\overset{*}{x}_{ij} \le \overset{\circ}{x}_{ij}) \& \\ \& \exists l,k(\overset{*}{x}_{lk} < \overset{\circ}{x}_{lk}). \tag{19}$$

ЛЕММА 3. Если каждая функция $\mathcal{Y}_h$ (11) дифференцируема по каждому из аргументов, функции y_i (10) определены на общей для всех них области $\mathcal{K}_h^m$ (12) и Н-минимум достигается на совокупности $\{\overset{\circ}{x}_{ij}\}$, то на этой же совокупности равны нулю частные производные по каждому из аргументов x_{ij} функции от функции $\mathcal{Y}_h$:

$$\partial\mathcal{Y}_h/\partial x_{ij}/_{x_{ij}=\overset{\circ}{x}_{ij}} = 0, \quad i=1,\ldots,n; \quad j=1,\ldots,m; \quad h=p,0,1,\ldots,m. \tag{20}$$

ЛЕММА 4. Для функции $\mathcal{Y}_p$ (12) от функций y_i (10), которые могут в общей для всех них области определения $\mathcal{K}_p^m$ (4) все одновременно принимать равные значения, Н-минимум Y_p функции $\mathcal{Y}_p$ достигается в $\mathcal{K}_p^m$ при равенстве всех y_i и равен

$$Y_p \doteq \overset{\circ}{\mathcal{Y}}_p = \overset{\circ}{y}_1 = \overset{\circ}{y}_2 = \ldots = \overset{\circ}{y}_n. \tag{21}$$

ЛЕММА 5. Если выполняются условия леммы 4, то не существует другой совокупности $\{\overset{*}{y}_i\}$ такой, чтобы для н е е в ы п о л н я л и с ь н е р а в е н с т в а (I7); и н е с у щ е с т в у е т д р у г о г о Н - о п т и м а л ь н о г о н а б о р а $\{\overset{*}{x}_{ij}\}$, д л я к о т о р о г о в ы п о л н я л и с ь б ы у с л о в и я (I9).

ЛЕММА 6. Н - о п т и м у м ы д о с т и г а ю т с я н а г р а н и ц а х о б л а с т е й о п р е д е л е н и я ф у н к ц и й (I0), т.е. д л я Н - о п т и м а л ь н ы х з н а ч е н и й в (6) и (7) и м е ю т м е с т о р а в е н с т в а:

$$K_j^{\sigma}(X_j) \doteq \{\overset{o}{x}_{ij} \mid \sum_{i=1}^{n} \overset{o}{x}_{ij} = X_j\}, \quad j=1,\ldots,m, \tag{22}$$

$$K_j^{\varepsilon}(X_j) \doteq \{\overset{o}{x}_{ij} \mid \overset{o}{x}_{ij} = X_j; \quad i = 1,\ldots,n\}; \quad j = 1,\ldots,m. \tag{23}$$

3.4.3. И н т е р п р е т а ц и я. Функции вида (I0) и (II) определяют Н-эффективности системы А и ее элементов $a_1,\ldots,a_n$, а их общая область определения $K_h^m(X_1,\ldots, X_m)$ соответствует учету ограничений на величины ресурсов при заданной схеме S_h. При достижении Н-оптимума состояние любого из a_i не может быть улучшено без ухудшения состояния как системы в целом, так и какого-либо из ее элементов, а уменьшение общего количества любого из видов ресурсов, отводимого системе (при неувеличении для всех остальных видов) неизбежно влечет за собой ухудшение состояния как системы, так и каждого из ее элементов, т.е. в состоянии Н-оптимальности достигается полная взаимосогласованность всех элементов системы.

§4. Н-классы

4.I. Продолжая построение простейшей исходной модели, соответствующей объектам с указанными в п.I.2 свойствами, потребуем, чтобы функции Y_h (3.9)*), получающиеся в результате решения оптимизационных задач (3.I4), принадлежали в согласии со свойством иерархической преемственности (см. п.I.2.5) к тому же множеству M_m функций, к которому принадлежат функции y_i (3.I0), т.е.

$$(y_1,\ldots,y_n \in M_m) \Leftrightarrow (Y_h' \in M_m), \quad h = p,0,1,\ldots,m. \tag{1}$$

---

*) См. сноску на стр.I2.

В силу указанной замкнутости относительно множества M_m решения оптимизационных задач (3.14) будем говорить, что на M_m заданы операции U_h^m, каждая из которых соответствует решению оптимизационной задачи (3.14) с тем же значением индекса h.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Минимальный (т.е. далее несужаемый) инвариантный относительно каждой из операций U_h^m $(h=p,s;\ s=0,1,\dots,m)$ класс K_m ($K_m \subset M_m$) назовем Н-классом, функции из Н-класса – Н-функциями, а сами операции U_h^m над n-ками функций из одного Н-класса – Н-операциями.

Поскольку значение индекса h интерпретируется как тип схемы S_h взаимодействия элементов системы, то и Н-операции U_p^m назовем параллельного, а U_s^m – последовательного типов. Будем также различать однородные Н-операции U_p^m, U_0^m, U_m^m и неоднородные U_k^m ($k=1,\dots,m-1$).

4.2.I. В согласии с п.I.2.6 нас в первую очередь будут интересовать простейшие Н-классы, с Н-функциями которых достаточно удобно оперировать. Есть основания считать, что оперировать с Н-функциями тем проще, чем меньше разнообразие функций в одном классе. В пределе мы получаем множества, состоящие из функций, которые образованы из одной функции F умножением ее на положительные константы. Подобные множества функций, отличающихся друг от друга лишь значениями констант, назовем F-семействами, а функцию F – характеристикой F-семейства.

4.2.2. Примером F-семейств могут служить степенные функции вида:

$$y_k = c_k \prod_{j=1}^{m} x_{kj}^{-q_j},\ c_k, q_j, x_{kj} \in R^+;\quad k = 1,2,\dots, \tag{2}$$

отличающиеся значениями константы c_k при неизменной характеристике $\prod_{j=1}^{m} x_{kj}^{-q_j}$. Поскольку такая характеристика полностью определяется m-кой $Q_m \doteq (q_1,\dots,q_m)$, то такие семейства назовем Q_m – семействами, а сумму

$$d \doteq \sum_{j=1}^{m} q_j + 1 \tag{3}$$

назовем обобщенным показателем Q_m-семейства.

4.2.3. Н-класс, являющий F-семейством, назовем **о д н о р о д н ы м.** Примечение Н-операций к n-кам Н-функций из однородного Н-класса сводится лишь к установлению значения константы у результирующих функций Y_h.

4.3. Введенное в п.4.2.3 понятие имеет смысл, если множество однородных Н-классов непусто, т.е. мы приходим к теореме существования.

4.3.I. ТЕОРЕМА I. М н о ж е с т в о   с т е п е н н ы х   ф у н к ц и й   в и д а   (2)   с   ф и к с и р о в а н н ы м и   з н а ч е н и я м и   п о к а з а т е л е й   с т е п е н и $Q_m = (q_1,\ldots,q_m)$ я в л я е т с я   Н - к л а с с о м.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку функции (2) дифференцируемы и строго монотонны по каждому из аргументов x_{kj}, то нам остается доказать, что они образуют минимальный инвариантный класс относительно каждой из операций U_h^m $(h = p,\sigma)$, т.е. нужно решить оптимизационные задачи (3.I4) для произвольной n-ки функций вида (2).

4.3.I.I. Для Н-операций параллельного типа в согласии с (3.I5)

$$Y_p^m = U_p^m(y_1,\ldots,y_n) \triangleq \min_{K_p^m} \max_{i=1}^{n}\{y_i\} \overset{(3.21)}{=} \min_{K_p^m} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i;\ K_p^m \triangleq \prod_{j=1}^{m} K_j^{\sigma}. \quad (4)$$

Построим функции Лагранжа с коэффициентами μ_i и λ_j:

$$\Phi(y_i,x_{ij},\mu_i,\lambda_j) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n}\mu_i\Big(y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\Big) + \sum_{j=1}^{m}\lambda_j\Big(\sum_{i=1}^{n} x_{ij} - X_j\Big), \quad (5)$$

где вторые члены учитывают ограничение (3.2I), а третьи - (3.22). Дифференцирование по x_{ij} образует $m \cdot n$ уравнений:

$$\lambda_j/q_j\overset{o}{y}_i = (1/n+\mu_i-\mu_i/n)/\overset{o}{x}_{ij}, \quad i = 1,\ldots,n; \quad j = 1,\ldots,m; \quad (6)$$

$$\nu_i \triangleq 1/n+\mu_i-\mu_i/n; \quad \eta_i \triangleq \nu_i/\sum_{i=1}^{n}\nu_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\eta_i = 1; \quad (7)$$

$$(6) \underset{(3.21)}{\overset{(7)}{\Rightarrow}} \lambda_j/q_jY_p = \nu_i/\overset{o}{x}_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\nu_i/\sum_{i=1}^{n}\overset{o}{x}_{ij} \underset{(7)}{\overset{(3.22)}{\Rightarrow}} \overset{o}{x}_{ij}/X_j = \eta_i; \quad (8)$$

$$(8) \overset{(3)}{\Rightarrow} \prod_{j=1}^{m}\Big(\overset{o}{x}{}_{ij}^{-q_j}/X_j^{-q_j}\Big) = \eta_i^{1-d} \underset{(3.21)}{\overset{(2)}{\Rightarrow}} Y_p/\prod_{j=1}^{m} X_j^{-q_j} = c_i/\eta_i^{d-1} =$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i^{\frac{1}{d-1}} \Big/ \sum_{i=1}^{n} n_i \right)^{d-1} ; \qquad (9)$$

$$(9) \overset{(7)}{\Rightarrow} Y_p = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i^{\frac{1}{d-1}} \right)^{d-1} \prod_{j=1}^{m} X_j^{-q_j} \overset{(11)}{=} C_p \prod_{j=1}^{m} X_j^{-q_j} ; \qquad (10)$$

$$C_p \rightleftharpoons \left(\sum_{i=1}^{n} c_i^{\frac{1}{d-1}} \right)^{d-1} . \qquad (11)$$

4.3.I.2. Для Н-операций последовательного типа в согласии с (3.I6)

$$Y_s^m = U_s^m(y_1,\ldots,y_n) \rightleftharpoons \min_{K_s^m} \sum_{i=1}^{n} y_i ;$$

$$\qquad (12)$$

$$K_s^m \rightleftharpoons \prod_{j=1}^{s} \overset{o}{K}{}_j^{s} \times \prod_{j=s+1}^{m} \overset{o}{K}{}_j^{\sigma} , \quad s=0,1,\ldots,m,$$

отличающихся друг от друга только областями определения K_s^m (3.4) функций y_i, составим функцию Лагранжа с коэффициентами $\lambda_j(X_j)$:

$$\Phi_j(y_i, x_{ij}, X_j, \lambda_j) = \sum_{i=1}^{n} y_i + \lambda_j\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij} - X_j \right),$$

$$j=s+1,\ldots,m; \; s=0,1,\ldots,m. \qquad (13)$$

Приравнивая нулю производные (I3) с учетом (3.4), (I2) и (2), получаем для $n(m+1)+s+1$ неизвестных x_{ij}, y_i, Y_s, λ_j систему из того же числа уравнений:

$$\lambda_j/q_j = \overset{o}{y}{}_i^{(s)} / \overset{o}{x}{}_{ij}^{(s)} , \; i=1,\ldots,n; \; j=s+1,\ldots,m; \; s=0,1,\ldots,m-1; \qquad (14)$$

$$(3.22) \overset{(12)}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{n} \overset{o}{x}{}_{ij}^{(s)} = X_j , \quad j=s+1,\ldots,m; \quad s=0,1,\ldots,m-1; \qquad (15)$$

$$(3.23) \overset{(12)}{\Rightarrow} \overset{o}{x}{}_{ij}^{(s)} = X_j , \; i=1,\ldots,n; \; j=1,\ldots,s; \quad s=1,\ldots,m; \qquad (16)$$

$$(12) \Rightarrow Y_s^m = \sum_{i=1}^{n} \overset{o}{y}{}_i^{(s)} , \quad s=0,1,\ldots,m. \qquad (17)$$

$$(2)\underset{(3,5)}{\overset{(16)}{\Rightarrow}} \overset{o}{y}{}_i^{(s)} = c_i \prod_{j=1}^{s} X_j^{-q_j} \prod_{j=s+1}^{m} \overset{o}{x}{}_{ij}^{-q_j},\ i=1,\dots,n;\ s=0,1,\dots,m; \tag{18}$$

$$d_s \rightleftharpoons \sum_{j=s+1}^{m} q_j \overset{(3)}{=} d - \sum_{j=1}^{s} q_j,\quad s = 0,1,\dots,m; \tag{19}$$

$$(14)\Rightarrow\ \lambda_j/q_j = \overset{o}{y}{}_i^{(s)}/\overset{o}{x}{}_{ij}^{(s)} = \sum_{i=1}^{n} \overset{o}{y}{}_i^{(s)} / \sum_{i=1}^{n} \overset{o}{x}{}_{ij}^{(s)} \underset{(15)}{\overset{(17)}{=}} Y_s/X_j; \tag{20}$$

$$(20)\overset{(19)}{\Rightarrow} Y_s^{d_s-1} \prod_{j=s+1}^{m} X_j^{-q_j} = [\overset{o}{y}{}_i^{(s)}]^{d_s-1} \prod_{j=s+1}^{m} \overset{o}{x}{}_{ij}^{-q_j} \overset{(18)}{=}$$

$$= \prod_{j=1}^{s} X_j^{q_j} [\overset{o}{y}{}_i^{(s)}/c_i^{1/d_s}]^{d_s}; \tag{21}$$

$$(21)\Rightarrow Y_s^{d_s-1} \prod_{j=1}^{m} X_j^{-q_j} = [\overset{o}{y}{}_i^{(s)}/c_i^{1/d_s}]^{d_s} = [\sum_{i=1}^{n} \overset{o}{y}{}_i^{(s)} / \sum_{i=1}^{n} c_i^{1/d_s}]^{d_s} \underset{(17)}{=}$$

$$= [Y_s / \sum_{i=1}^{n} c_i^{1/d_s}]^{d_s}; \tag{22}$$

$$(22)\overset{(17)'}{\Rightarrow} Y_s = (\sum_{i=1}^{n} c_i^{1/d_s})^{d_s} \prod_{j=1}^{m} X_j^{-q_j} \overset{(24)}{=} C_s \prod_{j=1}^{m} X_j^{-q_j},\quad s=0,1,\dots,m; \tag{23}$$

$$C_s \rightleftharpoons (\sum_{i=1}^{n} c_i^{1/d_s})^{d_s},\quad s = 0,1,\dots,m, \tag{24}$$

$\square$.

4.4. Из доказательства теоремы I вытекает важное

СЛЕДСТВИЕ I. Для всех Н-операций Н-оптимальные относительные значения функций и их аргументов

$$\mathfrak{Z}_i^{(h)} \rightleftharpoons \overset{o}{y}{}_i^{(h)}/Y_h;\ \overset{\bullet}{\chi}{}_{ij}^{(h)} \rightleftharpoons \overset{o}{x}{}_{ij}^{(h)}/X_j,$$

$$i=1,\dots,n;\quad j=1,\dots,m;\quad h = p,0,1,\dots,m, \tag{25}$$

для любой n-ки функций из данного Q_m-семейства не зависят от абсолютных значений аргументов $X_1,\dots,X_m$ и функций Y_h и либо равны единице, либо определяются отношением констант исходных и результирующих Н-функций:

$$\varkappa_i^{(h)} \rightleftharpoons c_i/C_h,\ i=1,\dots,n;\ h=p,0,1,\dots,m. \tag{26}$$

Действительно,

$$(\ldots) \overset{(25)}{\Rightarrow} \overset{0}{\vartheta}{}_i^{(\cdot)}=1,\ i=1,\ldots,n; \tag{27}$$

$$([illegible]) \underset{(25),(26)}{\overset{(9)}{\Rightarrow}} \overset{0}{\chi}{}_{ij}^{(p)} = \left[\varkappa_i^{(\cdot)}\right]^{\frac{1}{d-1}},\ i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,m; \tag{28}$$

$$([illegible]) \underset{(25),(26)}{\overset{(24)}{\Rightarrow}} \overset{0}{\vartheta}{}_i^{(s)} = \left[\varkappa_i^{(s)}\right]^{1/d_s},\ i=1,\ldots,n;\ s=0,1,\ldots,m; \tag{29}$$

$$(16) \underset{(25)}{\Rightarrow} \overset{0}{\chi}{}_{ij}^{(s)} = 1,\ i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,s;\ s=1,\ldots,m; \tag{30}$$

$$([illegible]) \underset{(26)}{\overset{(25)}{\Rightarrow}} \overset{0}{\chi}{}_{ij}^{(s)} = \overset{0}{\vartheta}{}_i^{(s)} = \left[\varkappa_i^{(s)}\right]^{1/d_s},\ i=1,\ldots,n;\ j=s+1,\ldots,m;$$

$$s=0,1,\ldots,m-1. \tag{31}$$

Это позволяет проводить процесс Н-оптимизации для однородных Н-классов в два этапа: на первом установить значения коэффициентов c_h ($h=p,s$) результирующей функции Y_h и Н-оптимальные соотношения для относительных величин $\vartheta_i^{(h)}$ и $\chi_{ij}^{(h)}$ при произвольно выбранных абсолютных значениях $X_1,\ldots,X_m$; а на втором учесть их истинные значения.

На уровне интерпретации это означает, что доли, в каких должны делиться ресурсы системы между ее элементами (для достижения Н-оптимума), не зависят от абсолютных величин ресурсов.

§5. О полноте Н-классов

5.I. Задача нахождения всех однородных Н-классов функций из множества M_m (т.е. согласно п. 3.3 обладающих "хорошими" аналитическими свойствами) оказалось весьма трудной. Пока удалось получить доказательство теоремы о полноте (сведя ее к теореме единственности) только для подмножества множества M_m, выделяемого с помощью следующих ограничений.

5.I.I. Н-функции имеют мультипликативную форму представления, т.е.

$$y_k = c_k \prod_{j=1}^{m} f_j(x_{kj}),\quad k=1,2,\ldots \tag{1}$$

5.I.2. Каждая из функций $f_j(x)$ положительна и строго убывает.

5.I.3. Логарифмическая производная $f_j'(x)/f_j(x)$ каждой из функций $f_j(x)$, $j=1\div m$, строго возрастает.

В ограничениях 5.I.2 и 5.I.3 положительность, убывание функций и возрастание логарифмической производной выбраны для определенности. Здесь важно то, что у всех функций $f_j(x)$ эти три свойства одни и те же. В принципе, можно было бы выбрать и другие непротиворечащие друг другу свойства.

Строгое возрастание логарифмической производной у каждой из функций $f_j(x)$ (а с учетом ограничения 5.I.2, следовательно, и строгое возрастание производной $f_j'(x)$) означает, что каждая из $f_j(x)$ - строго выпуклая, дифференцируемая функция, такая что логарифмирование этой функции не нарушает строгой выпуклости.

При этих ограничениях оказывается, что равенство

$$\operatorname*{extr}_{K^\sigma} \sum_{i=1}^{n} c_i \prod_{j=1}^{m} f_j(x_{ij}) = C \prod_{j=1}^{m} f_j(X_j), \tag{2}$$

где так же, как и в §3,

$$K^\sigma \rightleftharpoons \prod_{j=1}^{m} K_j^\sigma, \quad K_j^\sigma \rightleftharpoons \{x_{ij} \mid \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = X_j\}, \quad j = 1,\ldots, m, \tag{3}$$

$$c_i > 0, \quad i = 1,\ldots,n, \quad C > 0,$$

выполняется только тогда, когда каждая из функций $f_j(x)$ является степенной функцией вида $f_j(x) = b_j x^{-q_j}$, где $q_j \in R^+$, а $b_j \in R^+$, $j = 1,\ldots,m$, - произвольные постоянные.

Справедливость этого утверждения основывается на теореме, доказанной С.В.Нагаевым, который обратился к этой задаче по просьбе автора. Доказательство теоремы предполагается опубликовать в одном из очередных выпусков "Вычислительные системы", а ее точная формулировка приводится ниже.

5.2. Дадим предварительно следующее определение. Для любой последовательности $f_1(x),\ldots, f_m(x)$ функций действительного переменного определим семейство функций $n.m$ переменных:

$$\mathfrak{M}(f_1,\ldots,f_m,C,\alpha) \rightleftharpoons \{\varphi(x): x = \{x_{ij}: i = 1\div n,\ j = 1\div m\},$$

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \prod_{j=1}^{m} f_j(x_{ij}),\ (\sum_{i=1}^{n} c_i^{1/\alpha})^\alpha = C,\ c_i > 0,\ \alpha \neq 1\ \}. \tag{4}$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть каждая из функций $f_j(x)$, $j=1,\dots,m$, задана на $(0,\infty)$, положительна, строго убывает и имеет строго возрастающую логарифмическую производную $f_j'(x)/f(x)$. Если любая $\varphi\in\mathcal{M}(f_1, f_2,\dots,f_m,C,\alpha)$ имеет локальный экстремум в точке $\mathring{x}$, лежащей внутри области K^σ (3), и $\varphi(\mathring{x})=C\prod_{j=1}^{m} f_j(\mathring{x}_j)$, то $f_j(x)=b_j x^{\alpha_j}$, где $b_j>0$ - произвольные постоянные, а α_j удовлетворяет условию

$$\sum_{j=1}^{m}\alpha_j = 1-\alpha . \qquad (5)$$

Заметим также, что для одноаргументных Н-функций ограничение 5.I.3 может быть ослаблено. В этом случае достаточно потребовать строгого возрастания самой производной $f'(x)$. Есть основания считать, что требование строгого возрастания логарифмической производной возникает в связи с необходимостью согласования друг с другом функций $f_j(x)$, $j=1,\dots,m$.

Полученные результаты показывают, что из многоаргументных функций с конечным числом аргументов, представляющих собой произведение одноаргументных положительных, строго убывающих функций со строго возрастающими логарифмическими производными, степенные функции являются единственными, которые обладают свойством замкнутости по отношению к Н-операции U_0^m, а следовательно, и ко всему множеству Н-операций $\{U_h^m \mid h=p,0,1,\dots,m\}$, т.е. удовлетворяют определению однородных Н-классов.

Поскольку степенные функции являются частным случаем позиномов, то это позволяет относить полученные результаты к специальному разделу геометрического программирования [7,8], а по виду функциональных уравнений (4.4), (4,I2) - к особому случаю динамического программирования [9].

§6. Н-системы

Обобщим результаты, полученные для двухуровневых R-систем, на R-системы с произвольным конечным числом уровней.

6.I. Рассмотрим R-систему А с R-структурой в виде прадерева Т. Дуги ориентируем от вершин-листьев (атомов), у которых нет входных дуг, к вершине-корню (R-системе) с исходящей дугой к внешней вершине (надсистеме), не принадлежащей T. Вершины (R-блоки) обозначим номерами уровня r ($r = 0, 1, \ldots, R$) и места k_r ($k_r = 1, \ldots, N_r$) на уровне, а дуги - парами вершин. Нулевой уровень закрепим за листьями (атомами - R-блоками нулевого уровня), а R-й за корнем (R-системой). Каждую из остальных вершин (R-блоков) отнесем к уровню, на единицу меньшему, чем у вершины (R-блока, элементом которого является данный R-блок), к которой направлена дуга, исходящая из данной вершины.

6.I.I. Каждой из вершин (кроме листьев) $b^{(r,k_r)}$ ($r=1,\ldots,R$; $k_r = 1,\ldots,N_r$) поставим в соответствие H-операцию $U^{(r,k_r)} \in \{U_h^m | h = p, 0, 1, \ldots, m\}$ над H-функциями $y_i^{(r,k_r)}$ ($i = 1,\ldots,n^{(r,k_r)}$) с результирующей H-функцией $Y^{(r,k_r)}$. H-функции $y_i^{(r,k_r)}$ поставим в соответствие дугам, входящим в данную вершину, а H-функцию $Y^{(r,k_r)}$ - исходящей дуге. Дуге, исходящей из вершины-листа, поставим в соответствие H-функцию $Y^{(0,k)}$ ($k = 1,\ldots,N$) . Все H-функции $y_i^{(r,k_r)}$, $Y^{(r,k_r)}$, $Y^{(0,k)} \in Q_m$, где Q_m - заданное Q_m-семейство. Полученную таким образом изоморфную R-структуре структуру назовем <u>U-структурой</u>.

6.I.2. Пусть у U-структуры заданы все H-операции $U^{(r,k_r)}$ ($r = 1,\ldots,R$; $k_r = 1,\ldots,N_r$) и H-функции нулевого уровня (атомарные) $Y^{(0,k)}$ ($k = 1,\ldots,N$) , для каждой из которых указаны значения коэффициента $c^{(0,k)}$ и область ее определения $V^{(0,k)} \in (R^+)^m$. Тогда, полагая, что все H-функции определены на $(R^+)^m$, рекуррентно применим к ним H-операции и в согласии с формулами (4.II), (4.24), (4.25)-(4.3I) получим по заданным атомарным H-функциям значения коэффициентов $C^{(r,k_r)}$, а также H-оптимальные относительные значения самих H-функций $\overset{o}{\vartheta}{}_i^{(r,k_r)}$ и их аргументов $\overset{o}{x}{}_{ij}^{(r,k_r)}$ ($r = 1,\ldots,R$; $k_r = 1,\ldots,N_r$). Затем, задавая аргументам H-функции $Y^{(R)}$ системы произвольные значения $x_j^{(R)} = b_j$ ($b_j \in R^+$, $j = 1,\ldots,m$), последовательно определим с помощью формул (4.25)-(4.3I) абсолютные H-оптимальные значения всех H-функций $Y^{(r,k_r)}$ ($r = 0,1,\ldots,R$; $k_r = 1,\ldots,N_r$) и их аргументов .

6.I.3. В тех случаях, когда полученные для атомарных H-функций значения согласуются с их областями определения, т.е. когда

$$\forall k((X_1^{(0,k)}(b_1),\ldots,X_m^{(0,k)}(b_m)) \in V^{(0,k)},\ k=1,\ldots,N), \quad (1)$$

m-ку $(b_1,\ldots,b_m)$ назовем допустимой точкой Н-функции системы, каждую из m-ок $(X_1^{(r,k_r)}(b_1),\ldots,X_m^{(r,k_r)}(b_m))$ $r=0,1,\ldots,R;$ $k_r=1,\ldots,N_r$ - допустимой точкой Н-функции $Y^{(r,k_r)}$, а их совокупность - допустимым состоянием системы.

Множество всех допустимых точек системы образует допустимую область определения $W^{(R)}$ ее Н-функции $Y^{(R)}$. Аналогично множество всех допустимых точек любой Н-функции $Y^{(r,k_r)}$ образует допустимую область ее определения $W^{(r,k_r)}$ $(r=0,1,\ldots,R;\ k_r=1,\ldots,N_r)$.

U-структуру с непустыми допустимыми областями определения у всех ее Н-функций назовем допустимой.

6.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.I. R-систему с изоморфной ей допустимой U-структурой назовем Н-системой, а U-структуру - моделью Н - системы.

Заданную допустимую точку $(X_1^{(R)}=b_1,\ldots,X_m^{(R)}=b_m)$ Н-функции Н-системы назовем рабочей точкой Н-системы, соответствующее ей состояние - рабочим состоянием Н-системы, а точки каждой из Н-функций, образующих этой состояние,- рабочими точками.

ТЕОРЕМА 3. В любом рабочем состоянии Н-системы одновременно и только одновременно достигаются минимальные значения всех Н-функций $Y^{(r,k_r)}$ $(k_r=1,\ldots,N_r;\ r=1,\ldots,R-1)$ и Н-функций $Y^{(R)}$ системы $\{Y^{(r,k_r)} \mid Y^{(r,k_r)}=\min y^{(r,k_r)};\ k_r=1,\ldots,N_r;\ r=1,\ldots,R-1\} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow Y^{(R)}=\min y^{(R)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сводится к рассмотрению свойств коэффициентов $C^{(r,k_r)}$ Н-функций. Применение Н-операции $U^{(r,k_r)}$ как раз и состоит в нахождении минимального значения $C^{(r,k_r)}$, поскольку при фиксированных значениях аргументов $X_1^{(r,k_r)},\ldots,X_m^{(r,k_r)}$ в силу строгой монотонности Н-функций оно и обеспечивает единственное Н-минимальное значение Н-функции $Y^{(r,k_r)}$. Для данной Н-операции минимальное значение $C^{(r,k_r)}$ получается как степенная сумма от коэффициентов $c_i^{(r,k_r)}$ и Н-функций $y_i^{(r,k_r)}$, являющихся исходными для Н-операции $U^{(r,k_r)}$. А степенные суммы обладают свойством, на которое и опирается доказательство: их величина строго монотонно убывает при уменьшении величины каждого из их слагаемых. □

6.3. В согласии с (1) для атомарных Н-функций Н-системы $W^{(0,k)} \subseteq V^{(0,k)}$, $k = 1,\dots,N$. Дополнение $\Delta V^{(0,k)} = V^{(0,k)} \setminus W^{(0,k)}$, $k=1,\dots,N$ назовем резервом области определения атомарной Н-функции $Y^{(0,k)}$.

Такие же резервы областей определения у остальных Н-функций $Y^{(r,k_r)}$ $(r = 1,\dots,R;\ k_r = 1,\dots,N_r)$ можно определить, если рассмотреть подструктуры данной U-структуры, состоящие из Н-операций и Н-функций, которым соответствуют пути на дереве, оканчивающиеся дугой, соответствующей данной Н-функции $Y^{(r,k_r)}$. Тогда, поступая с такой подструктурой как с U-структурой, определим для нее допустимую область определения, которую обозначим $V^{(r,k_r)}$. Тогда искомый резерв области определения будет равен $\Delta V^{(r,k_r)} = V^{(r,k_r)} \setminus W^{(r,k_r)}$, $r = 1,\dots,K-1;\ k_r = 1,\dots,N_r$.

6.4. Итак, нам удалось построить простую модель Н-систем, обладающую следующими свойствами, которые непосредственно вытекают из определений и теоремы 3.

СВОЙСТВО 6.1. Состояние однородной Н-системы полностью определяется: характеристикой Q_m -семейства Q_m, к которому принадлежат все Н-функции системы; U-структурой Н-системы; значениями коэффициентов Н-функций атомов; заданной рабочей точкой системы.

СВОЙСТВО 6.2. В любом допустимом состоянии Н-системы достигается абсолютное наилучшее значение эффективности системы и каждого из ее блоков.

СВОЙСТВО 6.3. У любой R-системы, не являющейся Н-системой, величина эффективности всегда хуже, чем у соответствующей ей Н-системы. Отношение эффективностей таких R- и Н-систем может служить измерителем степени организованности R-системы.

СВОЙСТВО 6.4. Изменение положения рабочей точки любого из блоков Н-системы ведет к изменению положений рабочих точек у всех блоков. При этом все рабочие точки блоков либо остаются внутри допустимых областей, либо все одновременно выходят на их границы, что свидетельствует о полной взаимосогласованности всех блоков Н-системы в целом.

СВОЙСТВО 6.5. Изменение значения коэффициента c у любой H-функции H-системы изменяет границы допустимых областей у всех блоков, т.е. совершенствование H-системы, заключающееся в уменьшении удельных эффективностей любого из R-блоков, возможно лишь при наличии резервов у допустимых областей определения всех H-функций.

Литература

1. KRANTZ D.H., LUCE R.D., SUPPES P., TVERSKY A. Foundations of measurement.-N.Y.-London: Acad.Press, 1971.- 578 p.

2. БРИДЖМЭН П.В. Анализ размерностей. - Л.-М.: Гостехиздат, 1934. - 120 с.

3. ТЕРЕХОВ Л.Л. Производственные функции. -М.: Статистика, 1974. - 128 с.

4. КУЗНЕЦОВ П.Г. Искусственный интеллект и разум человеческой популяции. Приложение к кн.: Е.А.Александров. Основы теории эвристических решений. М., 1975, с. 212-248.

5. МЕЛЬНИКОВ Г.П. Системология и языковые аспекты кибернетики. - М.: Сов.радио, 1978. - 368 с.

6. Математика и кибернетика в экономике. Словарь-справочник, -М.: Экономика, 1975. - 692 с.

7. ЗЕНЕР К. Геометрическое программирование и техническое проектирование. -М.: Мир, 1973. -112 с.

8. БЕКИШЕВ Г.А., КРАТКО М.И. Элементарное введение в геометрическое программирование. -М., Наука, 1980. - 144 с.

9. БЕЛЛМАН Р. Динамическое программирование. -М.: ИЛ. 1960. - 400 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
27 апреля 1983 года