

УДК 519.248:62

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ АНАЛИЗА МЕМОДУЛЬНЫХ
ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В ОПЕРАЦИОННОЙ СИСТЕМЕ МИНИМАКС

В.Д.Корнеев

Операционная система (ОС) вычислительного комплекса из мини-ЭВМ представляет собой совокупность программных модулей (блоков), реализующих интерфейс между программами пользователей и ресурсами системы. Модули распределены по двум уровням принятия решений. Физически они рассредоточены по элементарным машинам (ЭМ) системы [1-3]. Модули первого уровня называются диспетчерами элементарных машин. В каждой ЭМ находится свой диспетчер. Модули второго уровня называются старшими диспетчерами подсистем. В каждой подсистеме имеется один старший диспетчер, который физически находится в какой-либо выделенной ЭМ подсистемы.

Диспетчеры ЭМ обеспечивают выполнение отдельных ветвей параллельной (п-) программы и групповые взаимодействия между ветвями, старший диспетчер ответствен за решение п-программы в целом, а также за выполнение индивидуальных взаимодействий между ветвями [3].

Каждый пользовательский процесс имеет доступ к памяти всей системы, однако "механизм" доступа к памяти других ЭМ отличается от "механизма" доступа к памяти своей машины, т.е. оперативная память всей системы по отношению к пользовательским процессам трактуется как двухуровневая. Первый уровень - память своей ЭМ, второй - память других ЭМ. При этом доступ к памяти других ЭМ может осуществляться только посредством операторов системных взаимодействий.

В связи с централизующей ролью старшего диспетчера представляют интерес размеры временных задержек для процессов, выполняющих с помощью операторов Индивидуальных Системных Взаимодействий

(ИСВ) доступ к памяти второго уровня. Для получения оценок этих задержек в работе предлагается стохастическая модель взаимодействия между старшим диспетчером подсистемы и диспетчерами ЭМ.

Схема взаимодействий между ветвями п-программы, диспетчерами и старшим диспетчером представляется следующим образом. При обработке оператора ИСВ управление и необходимая информация передается диспетчеру, находящемуся в этой же ЭМ. Этот диспетчер, получив управление, устанавливает признак запроса к старшему диспетчеру. Старший диспетчер по каналам межмашинной связи последовательно проверяет наличие признаков запроса от диспетчеров ЭМ. Обнаружив запрос от какого-либо диспетчера, он прокладывает канал связи к соответствующей ЭМ и принимает от диспетчера необходимую информацию (паспорт запроса на взаимодействие с другой ветвью). Ветвь, вызвавшая взаимодействие блоков ОС, ставится в очередь ждущих ветвей. Старший диспетчер проверяет только те диспетчеры ЭМ, у которых нет ждущих ветвей. После однократной проверки признаков запроса от диспетчеров и приема запросов старший диспетчер проверяет условие синхронизации для каждого запроса. Условием синхронизации является истинность определенной логической функции над заданными семафорами. Если для запроса такое условие выполняется, то старший диспетчер коммутирует канал связи между запрашивающей и запрашиваемой ветвями, после чего они реализуют взаимодействие, заданное оператором ИСВ, а также изменение состояния семафоров. Список запросов на взаимодействие проверяется старшим диспетчером многократно, так как ниже стоящие по списку (в очереди) запросы могут делать условия синхронизации истинными для выше стоящих запросов. Проверки осуществляются до тех пор, пока в списке останутся только такие запросы, для которых условия синхронизации не выполняются. После взаимодействия ветви продолжают свою работу.

Однократный опрос диспетчеров и обслуживание запросов, для которых выполнено условие синхронизации, будем называть циклом обслуживания подсистемы. Поскольку п-программа имеет начальный момент запуска и конечное время решения, то (в предположении отсутствия тупиковых ситуаций при взаимодействии ветвей) за время выполнения п-программы старший диспетчер осуществит конечное число циклов обслуживания.

Сущность рассматриваемой задачи связывается с ответами на вопросы: 1) каково среднее время задержек для процессов, выполняющих с помощью операторов ИСВ доступ к памяти второго уровня;

2) какова зависимость между количеством ветвей п-программы и величиной указанных задержек.

Время задержек, связанное с невыполнением условий синхронизации для пользовательских процессов, не учитывается, так как оно является сущностью параллельного алгоритма, а не действий ОС.

В §2 определяются состояния системы в дискретные моменты времени на некотором произвольном цикле обслуживания. Для вычисления состояний системы выводятся рекуррентные формулы. В §3 определяется зависимость между количеством ветвей в п-программе и величиной задержек. При нахождении указанных задержек используются рекуррентные формулы, выведенные в §2. В §4 приведен численный анализ полученных в статье результатов для системы МИНИМАКС.

Полученные результаты могут быть использованы для анализа любых иерархических систем, если схемы взаимодействий между блоками смежных уровней аналогичны схеме взаимодействий между старшим диспетчером подсистемы и диспетчерами ЭМ.

§2. Вычисление состояний системы в дискретные моменты времени

Множество ветвей п-программы в каждый фиксированный момент времени делится на три подмножества: m_0 , m_3 , $m_{\text{ж}}$, где m_0 – множество ветвей, в которых нет обращений к операторам ИСВ; m_3 – множество ветвей, от которых поступили запросы к диспетчерам ЭМ в связи с выполнением операторов ИСВ; $m_{\text{ж}}$ – множество ветвей, поставленных в очередь на обслуживание к старшему диспетчеру (независимо от того, выполняются или не выполняются условия синхронизации, указанные в запросах). Предполагается, что в памяти каждой ЭМ подсистемы находится только одна ветвь п-программы; ожидание условия синхронизации и ожидание обслуживания запросов означают, что решение всей ветви приостановлено.

Цикл обслуживания подсистемы разделим на два этапа: 1) этап опроса диспетчеров ЭМ и приема запросов; 2) этап обслуживания запросов, для которых выполнено условие синхронизации.

Исходя из описанной выше схемы взаимодействий между ветвями, диспетчерами и старшим диспетчером, на первом этапе цикла обслуживания ветви из множества m_3 удаляются и добавляются к множеству $m_{\text{ж}}$. Причем эти удаления и добавления осуществляются по одной ветви в каждый дискретный момент времени.

На втором этапе ветви из множества $m_{\text{ж}}$, для которых выполняются условия синхронизации, удаляются старшим диспетчером и добавляются к множеству m_0 , как и в предыдущем случае, по одной ветви в каждый дискретный момент времени.

Естественно предположить, что операторы системных взаимодействий встречаются в каждой ветви случайным образом. Для наших целей достаточно фиксировать количество ветвей из m_0 , перешедших в ветви множества m_3 , в дискретные моменты времени, совпадающие с моментами перехода ветвей из m_3 в ветви $m_{\text{ж}}$ и из $m_{\text{ж}}$ в m_0 . Поэтому в каждый фиксированный момент времени j на i -м цикле обслуживания состояние системы можно характеризовать тройкой: $E_j^{(i)} = \{ m_0^{(i)}(j), m_3^{(i)}(j), m_{\text{ж}}^{(i)}(j) \}$.

Для описания рассматриваемого процесса достаточно знать состояние системы в дискретные моменты времени, т.е. иметь стохастическую последовательность для любого цикла обслуживания: $E_0^{(i)} \rightarrow E_1^{(i)} \rightarrow E_2^{(i)} \rightarrow \dots \rightarrow E_j^{(i)} \rightarrow \dots$.

Будем предполагать, что переходы ветвей из m_0 и m_3 представляют собой независимые случайные события, т.е. переход ветви из m_0 в m_3 не зависит от предыдущих переходов как в этой же ветви, так и в других ветвях. Предполагаем, также, что вероятность перехода каждой ветви из множества m_0 в множество m_3 на любом фиксированном временном интервале θ равна $P_{\Pi}(\theta)$, а вероятность перехода ветви из множества $m_{\text{ж}}$ в множество m_0 равна $P_{\text{В}}(\theta)$.

Считается также, что при взаимодействии ветвей нет тупиковых ситуаций. Продолжительность первого этапа 1-го цикла обслуживания обозначим через $T_1^{(i)}$, второго этапа - через $T_2^{(i)}$.

Найдем вначале состояние системы на первом цикле обслуживания. Пусть исходное состояние системы характеризуется тройкой: $E_0^{(1)} = \{ m_0^{(1)}(\emptyset), m_3^{(1)}(\emptyset), m_{\text{ж}}^{(1)}(\emptyset) \}$. Ветви пронумеруем от I до L, где L - количество ветвей (ЭМ) в подсистеме. Обозначим через t_{α} ($\alpha = 1, \dots, L$) время, потраченное старшим диспетчером на опрос α -й ветви, а через t_{β} ($\beta = 1, \dots, L$) время опроса ветви β плюс время приема запроса от соответствующего диспетчера. Время, потраченное старшим диспетчером на обслуживание ν -го запроса, условие синхронизации для которого выполнено, обозначим через t_{ν} ($\nu = 1, \dots, k$), где k - количество типов запросов.

Вероятность принадлежности первой опрашиваемой ветви множеству m_0 есть $P_0^{(1)}(\emptyset) = m_0^{(1)}(\emptyset) / (m_0^{(1)}(\emptyset) + m_3^{(1)}(\emptyset))$, а вероятность ее принадлежности множеству m_3 есть $P_3^{(1)}(\emptyset) = m_3^{(1)}(\emptyset) / (m_0^{(1)}(\emptyset) + m_3^{(1)}(\emptyset))$.

Обозначим $T_\alpha = \frac{1}{L} \sum_{\alpha=1}^L t_\alpha$, $T_\beta = \frac{1}{L} \sum_{\beta=1}^L t_\beta$, $T_v = \frac{1}{K} \sum_{v=1}^K t_v$. Временной интервал θ выбран так, что $T_\alpha = n_1 \cdot \theta$, $T_\beta = n_2 \cdot \theta$, $T_v = n_3 \cdot \theta$, где n_1 , n_2, n_3 - рациональные числа, превосходящие θ .

Математическое ожидание времени опроса или приема и приема запроса от диспетчера первой ветви равно $\tau_1 \cdot \theta = P_0^{(1)}(\theta) \cdot T_\alpha + P_3^{(1)}(\theta) \cdot T_\beta = P_0^{(1)}(\theta) \cdot n_1 \cdot \theta + P_3^{(1)}(\theta) \cdot n_2 \cdot \theta$. Вероятность перехода ветви из множества m_0 в m_3 на интервале $\tau_1 \cdot \theta$ равна $P_{\Pi}(\tau_1 \cdot \theta) = 1 - (1 - P_{\Pi}(\theta))^{\tau_1}$. Далее в записях типа $P_{\Pi}(A \cdot \theta)$ и $M(A \cdot \theta)$, где $A > 0$ - произвольное число, будем опускать θ за исключением случая, когда $A = 1$.

Матожидание количества ветвей из множества m_0 , которые за время опроса (и приема запроса)^{*} первой ветви перейдут в множество m_3 , равно:

$$M_0^{(1)}(\tau_1) = \sum_{k=1}^{m_0^{(1)}(\theta)} k \cdot C_k^{m_0^{(1)}(\theta)} \cdot P_{\Pi}^k(\tau_1) (1 - P_{\Pi}(\tau_1))^{m_0^{(1)}(\theta) - k}.$$

(Здесь нужно отличать первую опрашиваемую ветвь и ветвь с порядковым номером I .)

Параметры состояния $E_1^{(1)}$ будут иметь следующие значения:

$$m_0^{(1)}(1) = m_0^{(1)}(\theta) - M_0^{(1)}(\tau_1),$$

$$m_3^{(1)}(1) = m_3^{(1)}(\theta) + M_0^{(1)}(\tau_1) - M_3^{(1)}(\theta),$$

$$m_{\Sigma}^{(1)}(1) = L - m_3^{(1)}(1).$$

Здесь $M^{(1)}(\theta)$ есть матожидание перехода предыдущей опрашиваемой ветви из m_3 в m_{Σ} : $M_3^{(1)}(\theta) = 1 \cdot P_3^{(1)}(\theta) + \theta \cdot P_0^{(1)}(\theta) = P_3^{(1)}(\theta)$. Поскольку диспетчеры опрашиваются по списку, необходимо знать, сколько ЭМ принадлежит множествам m_0 и m_3 в оставшемся списке. Соответствующие матожидания обозначим через $\tilde{m}_0^{(1)}(j)$ и $\tilde{m}_3^{(1)}(j)$. Обозначим вероятность $P_1^{(1)}(j) = \tilde{m}_0^{(1)}(j) / m_0^{(1)}(j)$, тогда для $j = \theta, 1, \dots, (m_0^{(1)}(\theta) + m_3^{(1)}(\theta))$

$$\tilde{m}_0^{(1)}(j) = m_0^{(1)}(j) \cdot P_1^{(1)}(j-1) - M_0^{(1)}(j-1),$$

$$\tilde{m}_3^{(1)}(j) = \tilde{m}_3^{(1)}(j-1) + (m_0^{(1)}(j-1) - m_0^{(1)}(j)) \cdot P_1^{(1)}(j-1) - M_3^{(1)}(j-1),$$

^{*}) Далее вместо "время опроса (и приема запроса)" будем употреблять "время опроса", если нет оговорок.

где $M_0^{(1)}(j-1) = 1 \cdot P_0^{(1)}(j-1) + \emptyset \cdot P_3^{(1)}(j-1) = P_0^{(1)}(j-1)$.

Найдем аналогичные вероятности и матожидания при опросе второй ветви:

$$P_0^{(1)}(1) = \frac{m_0^{(1)}(1)}{m_0^{(1)}(1) + m_3^{(1)}(1)}, \quad P_3^{(1)}(1) = \frac{m_3^{(1)}(1)}{m_0^{(1)}(1) + m_3^{(1)}(1)},$$

$$\tau_2 \cdot \theta = P_0^{(1)}(1) \cdot n_1 \theta + P_3^{(1)}(1) \cdot n_2 \theta.$$

В общем случае вероятность перехода какой-либо ветви из m_0 в m_3 при опросе i -й ветви равна: $(1 - P_{\Pi}(\sum_{m=1}^{i-1} \tau_m)) \cdot P_{\Pi}(\tau_i)$, где первый сомножитель есть вероятность того, что рассматриваемая ветвь не перейдет из m_0 в m_3 на интервале от начала запуска этой ветви либо от начала перехода ветви из $m_{\text{ж}}$ в m_0 и до интервала τ_i ;

$$P_{\Pi}(\sum_{m=1}^{i-1} \tau_m) = 1 - \prod_{m=1}^{i-1} (1 - P_{\Pi}(\theta))^{\tau_m}. \text{ Отсюда}$$

$$M_0^{(1)}(\tau_2) = \sum_{k=1}^{m_0^{(1)}(1)} k \cdot C_{m_0^{(1)}(1)}^k [(1 - P_{\Pi}(\tau_1)) P_{\Pi}(\tau_2)]^k \times \\ \times [1 - (1 - P_{\Pi}(\tau_1)) \cdot P_{\Pi}(\tau_2)]^{m_0^{(1)}(1) - k}$$

и для произвольного τ_i :

$$M_0^{(1)}(\tau_i) = \sum_{k=1}^{m_0^{(1)}(i-1)} k \cdot C_{m_0^{(1)}(i-1)}^k \left[(1 - P_{\Pi}(\sum_{m=1}^{i-1} \tau_m)) \cdot P_{\Pi}(\tau_i) \right]^k \times \\ \times \left[1 - (1 - P_{\Pi}(\sum_{m=1}^{i-1} \tau_m)) \cdot P_{\Pi}(\tau_i) \right]^{m_0^{(1)}(i-1) - k}. \quad (1)$$

Матожидание перехода опрашиваемой ветви из m_3 в $m_{\text{ж}}$: $M_3^{(1)}(1) = 1 \cdot P_3^{(1)}(1) + \emptyset \cdot P_0^{(1)}(1) = P_3^{(1)}(1)$.

Параметры состояния $\Pi_2^{(1)}$ будут следующими:

$$m_0^{(1)}(2) = m_0^{(1)}(1) - M_0^{(1)}(\tau_2),$$

$$\begin{aligned} m_3^{(1)}(2) &= m_3^{(1)}(1) + M_0^{(1)}(\tau_2) - M_3^{(1)}(1), \\ m_{\bar{ж}}^{(1)}(2) &= L - m_0^{(1)}(2) - m_3^{(1)}(2). \end{aligned}$$

В первом цикле обслуживания старшему диспетчеру нужно опросить $m_0^{(1)}(\emptyset) + m_3^{(1)}(\emptyset) = Q_1$ ветвей, т.е. $T_1^{(1)} = \sum_{n=1}^{Q_1} \tau_n \theta$.

Параметры состояния $E_{Q_1}^{(1)}$ будут иметь значения:

$$\begin{aligned} m_0^{(1)}(Q_1) &= m_0^{(1)}(Q_1-1) - M_0^{(1)}(\tau_{Q_1}), \\ m_3^{(1)}(Q_1) &= m_3^{(1)}(Q_1-1) + M_0^{(1)}(\tau_{Q_1}) - M_3^{(1)}(Q_1-1), \\ m_{\bar{ж}}^{(1)}(Q_1) &= L - m_0^{(1)}(Q_1) - m_3^{(1)}(Q_1). \end{aligned}$$

Обозначим $S^{(1)} = T_1^{(1)} + T_2^{(1)}$.

На i -м цикле во время второго этапа обслуживания запросов среди ветвей множества m_0 нужно различать ветви, запущенные на разных циклах обслуживания, в том числе ветви, принадлежащие m_0 в исходный момент (будем обозначать их $\bar{m}_0$).

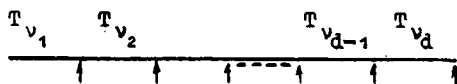
Матожидание количества ветвей и множество ветвей, перешедших из $\bar{m}_{\bar{ж}}$ в m_0 на $T_2^{(i)}$ ($i=1, \dots, n$), будем обозначать через M_{C_i} соответственно $\tilde{M}_{C_i}$. Характерной особенностью ветвей из множеств $\tilde{M}_{C_i}$ ($i=1, \dots, n$) являются разные моменты времени перехода из $\bar{m}_{\bar{ж}}$ в $M_{C_i} \subset m_0$ для каждой ветви, т.е. ветви имеют разное время перезапуска.

Состояние системы в конце первого цикла обслуживания (совпадающего с началом второго цикла обслуживания). Количество ветвей, перешедших из $\bar{m}_{\bar{ж}}$ в m_0 на интервале $T_2^{(1)}$, равно:

$$M_{C_1} = \sum_{k=1}^{m_{\bar{ж}}^{(1)}(Q_1)} k \cdot \sigma_k^{(1)}(Q_1) P_B^k (1-P_B)^{m_{\bar{ж}}^{(1)}(Q_1)-k}.$$

Отсюда $T_2^{(1)} = M_{C_1} \cdot T_v$.

Теперь нам необходимо найти матожидание количества ветвей из $\tilde{M}_{C_1}$, которые к началу второго цикла обслуживания перейдут в m_3 . На рис. I представлен интервал $T_2^{(1)}$, где стрелками указаны моменты переходов ветвей из $\bar{m}_{\bar{ж}}$ в $M_{C_1} \subset m_0$, d - количество таких вет-



$$\text{вей и } T_{v_1} = T_{v_2} = \dots = T_{v_d} = T_v = \frac{1}{K} \sum_{v=1}^K t_v = \theta \cdot n_3.$$

Вероятность перехода первой ветви из $\tilde{M}_{C_1}$ в m_3 на $T_2^{(1)}$

Рис. I

равна $P_{\Pi}(T_2^{(1)} - T_v)$, где $T_2^{(1)} - T_v$ есть интервал от момента перехода первой ветви из m_k в $\tilde{M}_{C_1}$ и до конца интервала $T_2^{(1)}$; обозначим эту вероятность через $P_1 = P_{\Pi}(T_2^{(1)} - T_v)$. Для второй ветви $P_2 = P_{\Pi}(T_2^{(1)} - 2 \cdot T_v)$ и т.д., для предпоследней ветви $P_{d-1} = P_{\Pi}(T_2^{(1)} - (d-1) \cdot T_v)$. Последняя ветвь при вычислении рассматриваемого матожидания не учитывается, так как момент ее перехода из m_k в m_0 совпадает с концом интервала $T_2^{(1)}$.

Пусть $d = M_{C_1}$. Матожидания количества ветвей из $\tilde{M}_{C_1}$, которые к концу интервала $T_2^{(1)}$ перейдут в m_3 , представляется в виде стандартной формулы $M_{\Pi C_1}^{(2)}(\theta) = \sum_{k=1}^{d-1} x_k f(x_k)$, где случайные величины x_k принимают значения $1, 2, \dots, d-1$. Обозначим $D = \{1, 2, \dots, d-1\}$. Вероятности $f(x_k)$ находятся по формулам:

$$f(x_1) = \sum_{i_1=1}^{d-1} P_{i_1} \prod_{\substack{i_2 \in D \\ i_2 \neq i_1}} (1 - P_{i_2}),$$

$$f(x_2) = \sum_{i_1=1}^{d-2} P_{i_1} \left(\sum_{i_2=i_1+1}^{d-1} P_{i_2} \prod_{\substack{i_3 \in D \\ i_3 \neq i_1, i_2}} (1 - P_{i_3}) \right),$$

$$f(x_j) = \sum_{i_1=1}^{d-j} P_{i_1} \left(\sum_{i_2=i_1+1}^{d-j-1} P_{i_2} \left(\sum_{i_3=i_2+1}^{d-j-2} P_{i_3} \dots \right. \right.$$

$$\left. \dots \left(\sum_{i_j=i_{j-1}+1}^{d-1} P_{i_j} \prod_{i_{j+1} \in D} (1 - P_{i_{j+1}}) \right) \dots \right).$$

Отсюда

$$M_{\Pi C_1}^{(2)}(\theta) = \sum_{i_1=1}^{d-1} P_{i_1} \prod_{\substack{i_2 \in D \\ i_2 \neq i_1}} (1 - P_{i_2}) +$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \sum_{i_1=1}^{d-2} P_{i_1} \left(\sum_{i_2=i_1+1}^{d-1} P_{i_2} \prod_{\substack{i_3 \in D \\ i_3 \neq i_1, i_2}} (1-P_{i_3}) \right) + \\
& + j \sum_{i_1=1}^{d-j} P_{i_1} \left(\sum_{i_2=i_1+1}^{d-j-1} P_{i_2} \left(\sum_{i_3=i_2+1}^{d-j-2} P_{i_3} \dots \right. \right. \\
& \left. \left. \dots \left(\sum_{i_j=1}^{d-1} P_{i_j} \prod_{i_{j+1} \in D} (1-P_{i_{j+1}}) \right) \dots \right) + (d-1) \prod_{i_1 \in D} P_{i_1} \right). \quad (2)
\end{aligned}$$

Вероятности

$$P_1 = P_{\Pi}((d-1) \cdot n_3 \cdot \theta) = 1 - (1 - P_{\Pi}(\theta))^{(d-1)n_3},$$

$$P_2 = P_{\Pi}((d-2) \cdot n_3 \cdot \theta) = 1 - (1 - P_{\Pi}(\theta))^{(d-2)n_3}, \dots,$$

$$P_j = P_{\Pi}((d-j) \cdot n_3 \cdot \theta) = 1 - (1 - P_{\Pi}(\theta))^{(d-j)n_3}, \dots,$$

$$P_{d-1} = P_{\Pi}(n_3 \cdot \theta) = 1 - (1 - P_{\Pi}(\theta))^{n_3}.$$

Матожидание $M_{\Pi C_1}^{(2)}(\theta)$ можно интерпретировать как $M_{\Pi C_1}^{(1)}(T_2^{(1)})$ - матожидание количества ветвей из $\tilde{M}_{C_1}$, которые к концу первого цикла обслуживания, т.е. к концу интервала $T_2^{(1)}$, перейдут в m_3 .

Для определения требуемого состояния системы нужно найти еще матожидание количества ветвей из $\tilde{m}_0$, которые останутся в этом множестве на интервале $T_2^{(1)}$, и матожидание количества ветвей из $\tilde{M}_{C_1}$, которые останутся в этом множестве к концу того же интервала.

Первое матожидание определяется из выражения: $\tilde{m}_0^{(2)}(\theta) = \tilde{m}_0^{(1)}(Q_1) - M_0^{(1)}(T_2^{(1)})$, где $M_0^{(1)}(T_2^{(1)})$ - матожидание количества ветвей из $\tilde{m}_0$, перешедших в m_3 на интервале $T_2^{(1)}$, вычисляется оно по формуле (I); второе - из выражения: $M_{C_1}^{(2)}(\theta) = M_{C_1} - M_{\Pi C_1}^{(2)}(\theta)$.

Теперь мы можем определить параметры состояния системы $E_0^{(2)}$ в начальный момент второго цикла обслуживания:

$$m_0^{(2)}(\theta) = \tilde{m}_0^{(2)}(\theta) + M_{C_1}^{(2)}(\theta),$$

$$m_3^{(2)}(\emptyset) = m_3^{(1)}(Q_1) + M_0^{(1)}(T_2^{(1)}) + M_{\text{ПС}_1}^{(2)}(\emptyset),$$

$$m_{\pi}^{(2)}(\emptyset) = L - m_0^{(2)}(\emptyset) - m_3^{(2)}(\emptyset).$$

Отсюда определяем состояния системы на втором цикле обслуживания в другие моменты времени:

$$P_0^{(2)}(\emptyset) = \frac{\tilde{m}_0^{(2)}(\emptyset)}{\tilde{m}_0^{(2)}(\emptyset) + \tilde{m}_3^{(2)}(\emptyset)}, \quad P_3^{(2)}(\emptyset) = \frac{\tilde{m}_3^{(2)}(\emptyset)}{\tilde{m}_0^{(2)}(\emptyset) + \tilde{m}_3^{(2)}(\emptyset)}$$

и

$$\tau_1 = P_0^{(2)}(\emptyset) n_1 + P_3^{(2)}(\emptyset) n_2,$$

где $\tilde{m}_0^{(2)}(\emptyset) = m_0^{(2)}(\emptyset)$ и $\tilde{m}_3^{(2)}(\emptyset) = m_3^{(2)}(\emptyset)$.

Параметры состояния $E_1^{(2)}$:

$$m_0^{(2)}(1) = \tilde{m}_0^{(2)}(1) + M_{C_1}^{(2)}(\tau_1),$$

$$m_3^{(2)}(1) = m_3^{(2)}(\emptyset) + M_{\text{ПС}_1}^{(2)}(\tau_1) - M_3^{(2)}(\emptyset),$$

$$m_{\pi}^{(2)}(1) = L - m_0^{(2)}(1) - m_3^{(2)}(1),$$

где $\tilde{m}_0^{(2)}(1) = \tilde{m}_0^{(2)}(\emptyset) - M_0^{(2)}(\tau_1)$, и $M_0^{(2)}(\tau_1)$ вычисляется по формуле (I), в которой интервал между началом запуска ветвей из $\tilde{m}_0$ и τ_1 равен $S^{(1)}$. Матожидание количества ветвей из $\tilde{M}_{C_1}$, которые останутся в этом множестве в конце интервала τ_1 на втором цикле обслуживания, будет равно: $M_{C_1}^{(2)}(\tau_1) = M_{C_1} - M_{\text{ПС}_1}^{(2)}(\tau_1)$, где $M_{\text{ПС}_1}^{(2)}(\tau_1)$ — матожидание количества ветвей из $\tilde{M}_{C_1}$, которые к концу интервала τ_1 перейдут из $\tilde{M}_{C_1} \subset m_0$ в m_3 , вычисляется оно по формуле (2), в которую вместо $d-1$ нужно подставить M_{C_1} и $P_1 = P_{\Pi}(T_2^{(1)} - T_v + \tau_1)$, $P_2 = P_{\Pi}(T_2^{(1)} - 2T_v + \tau_1), \dots, P_{M_{C_1}-1} = P_{\Pi}(T_v + \tau_1)$, $P_{M_{C_1}} = P_{\Pi}(\tau_1)$. Наконец, $M_3^{(2)}(\emptyset) = 1P_3^{(2)}(\emptyset) + \emptyset P_0^{(2)}(\emptyset) = P_3^{(2)}(\emptyset)$.

Аналогично находят значения параметров состояния $E_1^{(2)}$, но при вычислении $M_0^{(2)}(\tau_1)$ по формуле (I) в нее для вероятности P_{Π} вместо $\sum_{m=1}^{i-1} \tau_m$ подставляется $S^{(1)} + \sum_{m=1}^{i-1} \tau_m$, т.е.

$$P_{\Pi}(S^{(1)} + \sum_{m=1}^{i-1} \tau_m) = 1 - \prod_{m=1}^{i-1} (1 - P_{\Pi}(\theta))^{\tau_m} \prod_{k=1}^{Q_1} (1 - P_{\Pi}(\theta))^{\tau_k} (1 - P_{\Pi}(\theta))^{M_{C_1} n_3},$$

а при вычислении $M_{\Pi C_1}^{(2)}(\tau_1)$ по формуле (2) вероятности $P_1, P_2, \dots, \dots, P_{M_{C_1}}$ будут иметь следующие задания: $P_1 = P_{\Pi}(T_2^{(1)} - T_v + \sum_{j=1}^1 \tau_j), \dots, \dots, P_{M_{C_1}} = P_{\Pi}(\sum_{j=1}^1 \tau_j)$.

Во втором цикле обслуживания старшему диспетчеру нужно опросить $m_0^{(2)}(\emptyset) + m_3^{(2)}(\emptyset) = Q_2$ ветвей. Параметры состояния $E_{Q_2}^{(2)}$ будут иметь значения:

$$m_0^{(2)}(Q_2) = \bar{m}_0^{(2)}(Q_2) + M_{C_1}^{(2)}(\tau_{Q_2}),$$

$$m_3^{(2)}(Q_2) = m_3^{(2)}(Q_2 - 1) + M_{\Pi C_1}^{(2)}(\tau_{Q_2}) - M_3^{(2)}(Q_2 - 1),$$

$$m_{\Pi}^{(2)}(Q_2) = L - m_0^{(2)}(Q_2) - m_3^{(2)}(Q_2).$$

Состояния системы на i -м цикле обслуживания. Параметры состояния $E_0^{(i)}$ находятся по формулам:

$$m_0^{(i)}(\emptyset) = \bar{m}_0^{(i)}(\emptyset) + M_{C_1}^{(i)}(\emptyset) + M_{C_2}^{(i)}(\emptyset) + \dots + M_{C_{i-1}}^{(i)}(\emptyset),$$

$$m_3^{(i)}(\emptyset) = m_3^{(i-1)}(Q_{i-1}) + M_{\Pi C_1}^{(i)}(\emptyset) + M_{\Pi C_2}^{(i)}(\emptyset) + \dots + M_{\Pi C_{i-1}}^{(i)}(\emptyset),$$

$$m_{\Pi}^{(i)}(\emptyset) = L - m_0^{(i)}(\emptyset) - m_3^{(i)}(\emptyset).$$

В этих выражениях $\bar{m}_0^{(i)}(\emptyset) = \bar{m}_0^{(i-1)}(Q_{i-1}) - M_0^{(i-1)}(T_2^{(i-1)})$, где

$Q_{i-1} = m_0^{(i-1)}(\emptyset) + m_3^{(i-1)}(\emptyset)$, $T_2^{(i-1)} = M_{C_{i-1}} T_v$. Матожидание $M_{C_{i-1}}$

находится по формуле:

$$M_{C_{i-1}} = \frac{m_{\Pi}^{(i-1)}(Q_{i-1})}{\sum_{k=1}^{Q_{i-1}} k \cdot C_{\Pi}^k(Q_{i-1})} \cdot P_B^k (1 - P_B)^{m_{\Pi}^{(i-1)}(Q_{i-1}) - k}; (3)$$

$M_0^{(i-1)}(T_2^{(i-1)})$ вычисляется по формуле (I), в которой интервал от начала запуска ветвей из $\bar{m}_0$ и до $T_2^{(i-1)}$ берется равным

$\sum_{m=1}^{i-1} S^{(m)} + T_1^{(i-1)}$. (Здесь $S^{(i)} = T_1^{(i)} + T_2^{(i)}$.) Слагаемые $M_{C_k}^{(i)}(\emptyset)$ ($k = 1, \dots, i-1$) есть матожидания количества ветвей из $\tilde{M}_{C_k}$ ($k = 1, \dots, i-1$), которые остались в этих множествах к началу i -го цикла обслуживания. Вычисляются они по формулам: $M_{C_k}^{(i)}(\emptyset) = M_{C_k} - M_{PC}^{(i)}(\emptyset)$, $k = 1, 2, \dots, i-2$, где $M_{PC}^{(i)}(\emptyset)$ вычисляется по формуле (2)^k, в которую вместо $d-1$ нужно подставить M_{C_k} , и при $k = 1, \dots, i-2$

$$P_1 = P_{\Pi}(T_2^{(k)} - T_v + \sum_{m=k+1}^{i-1} S^{(m)}),$$

$$P_2 = P_{\Pi}(T_2^{(k)} - 2T_v + \sum_{m=k+1}^{i-1} S^{(m)}),$$

$$P_{M_{C_k}} = P_{\Pi}(\sum_{m=k+1}^{i-1} S^{(m)}),$$

где $S^{(m)} = T_1^{(m)} + T_2^{(m)}$ и $T_1^{(m)} = \sum_{r=1}^{Q_m} \tau_2 = \sum_{r=0}^{Q_m-1} (P_0^{(m)}(r) n_1 \theta + P_3^{(m)}(r) \cdot n_2 \cdot \theta)$.

Для $k = i-1$ $M_{C_{i-1}}^{(i)}(\emptyset)$ вычисляется аналогично, как и $M_{C_k}^{(i)}(\emptyset)$ ($k = 1, \dots, i-2$), а $M_{PC_{i-1}}^{(i)}(\emptyset)$ вычисляется по формуле (2), но только вместо $d-1$ в формуле нужно подставить $M_{C_{i-1}} - 1$, так как на $T_2^{(i-1)}$ последняя обнаруженная ветвь не учитывается.⁻¹

Параметры состояния $E_1^{(i)}$ будут следующие:

$$m_0^{(i)}(1) = \overline{m}_0^{(i)}(1) + M_{C_1}^{(i)}(\tau_1) + M_{C_2}^{(i)}(\tau_1) + \dots + M_{C_{i-1}}^{(i)}(\tau_1),$$

$$m_3^{(i)}(1) = m_3^{(i)}(\emptyset) + M_{PC_1}^{(i)}(\tau_1) + M_{PC_2}^{(i)}(\tau_1) + \dots + M_{PC_{i-1}}^{(i)}(\tau_1),$$

$$m_{\pi}^{(i)}(1) = L - m_0^{(i)}(1) - m_3^{(i)}(1).$$

Параметры состояния $E_j^{(i)}$:

$$m_0^{(i)}(j) = \overline{m}_0^{(i)}(j) + M_{C_1}^{(i)}(\tau_j) + M_{C_2}^{(i)}(\tau_j) + \dots + M_{C_{i-1}}^{(i)}(\tau_j),$$

$$m_3^{(i)}(j) = m_3^{(i)}(j-1) + M_{\Pi_1}^{(i)}(\tau_j) + M_{\Pi_2}^{(i)}(\tau_j) + \dots + M_{\Pi_{i-1}}^{(i)}(\tau_j),$$

$$m_3^{(i)}(j) = L - m_0^{(i)}(j) - m_3^{(i)}(j).$$

И наконец, для состояния в конце i -го цикла обслуживания его параметры будут иметь значения:

$$m_0^{(i+1)}(\emptyset) = m_0^{(i+1)}(\emptyset) + M_{C_1}^{(i+1)}(\emptyset) + M_{C_2}^{(i+1)}(\emptyset) + \dots + M_{C_i}^{(i+1)}(\emptyset),$$

$$m_3^{(i+1)}(\emptyset) = m_3^{(i)}(Q_1) + M_{\Pi_1}^{(i+1)}(\emptyset) + M_{\Pi_2}^{(i+1)}(\emptyset) + \dots + M_{\Pi_i}^{(i+1)}(\emptyset),$$

$$m_{\Sigma}^{(i+1)}(\emptyset) = L - m_0^{(i+1)}(\emptyset) - m_3^{(i+1)}(\emptyset).$$

В этих равенствах матожидания вычисляются по формулам (I)-(3).

Таким образом, состояние системы, начиная с первого цикла и по произвольный i -й цикл, найдены.

§3. Вычисление временных задержек процессов при доступе к памяти второго уровня

При вычислении временных задержек процессов, осуществляющих доступ к памяти второго уровня вначале вычисляется суммарное время задержек всех ветвей на произвольном цикле обслуживания. При этом рассматриваются два случая: в первом учитываются задержки только тех ветвей, которые инициируют взаимодействия, во втором - дополнительно учитываются задержки и тех ветвей, которые приостанавливаются на время доступа к их памяти. После чего находится среднее время задержки каждого процесса при доступе к памяти второго уровня.

Рассмотрим первый случай, когда учитываются задержки ветвей, инициирующих взаимодействия.

Матожидание суммарного времени задержек ветвей, принадлежащих множеству m_3 , на i -м цикле обслуживания. Для определения этой величины нам необходимо найти математические ожидания $\bar{M}^{(i)}(\tau_j \emptyset)$ и $\bar{M}^{(i)}(\tau_2^{(i)})$ суммарного времени задержек на интервалах $\tau_j \emptyset$ и $\tau_2^{(i)}$ соответственно.

Первое из них

$$\bar{M}^{(i)}(\tau_j \emptyset) = m_0^{(i)}(\tau_j \emptyset) \bar{M}_B(\tau_j \emptyset) + M_{\Pi_1}^{(i)}(\tau_j \emptyset) \bar{M}_B(\tau_j \emptyset) +$$

$$+ M_{\Pi_2}^{(i)}(\tau_j \theta) \bar{M}_B(\tau_j \theta) + \dots + M_{\Pi_{i-1}}^{(i)}(\tau_j \theta) \bar{M}_B(\tau_j \theta) + m_3^{(i)}(\tau_{j-1} \theta) \tau_j \theta,$$

где $M_0^{(i)}(\tau_j \theta)$ - матожидание количества ветвей из Π_0 , перешедших на интервале $\tau_j \theta$ в Π_3 ; $\bar{M}_B(\tau_j \theta)$ - матожидание времени задержки одной ветви на интервале $\tau_j \theta$ при условии, что на этом интервале ветвь переходит из множеств $\Pi_0, M_{C_1}, \dots, M_{C_{i-1}}$ (в зависимости от того, какому множеству она принадлежала) в Π_3 . Задержка считается с момента перехода ветви из Π_0 в Π_3 и до конца интервала $\tau_j \theta$. $M_{\Pi_k}^{(i)}(\tau_j \theta)$ ($k = 1, \dots, i-1$) - матожидания количества ветвей, перешедших из соответствующих множеств M_{C_k} ($k=1, \dots, i-1$) в множество Π_3 на интервале $\tau_j \theta$; $M_{\Pi_k}^{(i)}(\tau_j \theta)$ отличается от $M_{\Pi_k}^{(i)}(\tau_j \theta)$ тем, что оно вычисляется только на интервале $\tau_j \theta$, а $M_{\Pi_k}^{(i)}(\tau_j \theta)$ вычисляется на интервале от момента перехода ветви из Π_k в $\tilde{M}_{C_k}$ (момента перезапуска ветви) и до конца интервала $\tau_j \theta$. Матожидание $M_{\Pi_k}^{(i)}(\tau_j \theta)$ ($k = 1, 2, \dots, i-1$) находится аналогично $M_{\Pi_k}^{(i)}(\tau_j \theta)$ по формуле (2) с соответствующими вероятностями перехода ветвей из M_{C_k} ($k=1, 2, \dots, i-1$) в Π_3 . Для первой ветви из M_{C_1} вероятность перехода на интервале $\tau_j \theta$ равна:

$$P_1 = P(\tau_j \theta) (1 - P(T_2^{(k)}) - T_v + \sum_{n=k+1}^{i-1} S^{(n)} + \sum_{r=1}^{j-1} \tau_r);$$

для второй -

$$P_2 = P(\tau_j \theta) (1 - P(T_2^{(k)}) - 2T_v + \sum_{n=k+1}^{i-1} S^{(n)} + \sum_{r=1}^{j-1} \tau_r)$$

и для последней ветви -

$$P_{M_{C_k}} = P_{\Pi}(\tau_j \theta) (1 - P(\sum_{n=k+1}^{i-1} S^{(n)} + \sum_{r=1}^{j-1} \tau_r)).$$

Найдем теперь $\bar{M}_B(\tau_j \theta)$ ($M_0^{(i)}(\tau_j \theta)$ найдены в §2). Матожидание количества интервалов θ от начала интервала $\tau_j \theta$ и до интервала θ , на котором произошел переход ветви из Π_0 в Π_3 (при условии, что на $\tau_j \theta$ переход произошел), равно:

$$M(\tau_j \theta) = \frac{1}{1 - (1 - P(\theta))^{\tau_j}} \sum_{k=1}^{\tau_j-1} k \cdot P_{\Pi}(\theta) (1 - P_{\Pi}(\theta))^k,$$

где $1 - (1 - P_{\Pi}(\theta))^{\tau_j}$ - вероятность перехода на интервале $\tau_j \theta$ рассматриваемой ветви из m_0 в m_3 . Отсюда $\bar{M}_B(\tau_j \theta) = \tau_j \theta - M(\tau_j \theta) \theta$. Здесь интервал θ , на котором произошел переход, считается принадлежащим интервалу задержки процесса.

Теперь нам нужно найти матожидание суммарного времени задержек на интервале $T_2^{(1)}$ для ветвей из m_3 . Оно равно:

$$\begin{aligned} \bar{M}^{(1)}(T_2^{(1)}) &= M_0^{(1)}(T_2^{(1)}) \bar{M}_B(T_2^{(1)}) + M_{\Pi S_1}^{(1)}(T_2^{(1)}) \bar{M}_B(T_2^{(1)}) + \\ &+ M_{\Pi S_2}^{(1)}(T_2^{(1)}) \bar{M}_B(T_2^{(1)}) + \dots + M_{\Pi S_{i-1}}^{(1)}(T_2^{(1)}) \bar{M}_B(T_2^{(1)}) + \bar{M}_{B\bar{K}}^{(1)}, \end{aligned}$$

где $\bar{M}_{B\bar{K}}^{(1)}$ - матожидание суммарного времени задержек ветвей, которые на интервале $T_2^{(1)}$ переходят из $m_{\bar{K}}$ в m_0 и на том же интервале из m_0 переходят в m_3 . Величина $M_0^{(1)}(T_2^{(1)})$ определена в разделе 2, а $M_{\Pi S_k}^{(1)}(T_2^{(1)})$ находится аналогично $M_{\Pi S_k}^{(1)}(\tau_j \theta)$. Как и для интервала $\tau_j \theta$,

$$M(T_2^{(1)}) = \frac{1}{1 - (1 - P_{\Pi}(\theta))^{M_{C_1} n_3}} \sum_{k=1}^{M_{C_1} n_3 - 1} k P_{\Pi}(\theta) (1 - P_{\Pi}(\theta))^k,$$

где $M_{C_1} n_3$ - матожидание количества интервалов θ на всем интервале $T_2^{(1)}$ и $1 - (1 - P_{\Pi}(\theta))^{M_{C_1} n_3}$ - вероятность перехода ветви на интервале $T_2^{(1)}$ из m_0 в m_3 . Отсюда $\bar{M}_B(T_2^{(1)}) = T_2^{(1)} - M(T_2^{(1)}) = M_{C_1} n_3 \theta - M(T_2^{(1)})$.

Найдем теперь $\bar{M}_{B\bar{K}}^{(1)}$. Сразу отметим, что моменты перезапуска ветвей (переходов из $m_{\bar{K}}$ в m_0), обслуживаемых на $T_2^{(1)}$, являются разными. С учетом этого матожидание времени задержки одной ветви на интервале от момента перехода ветви из $m_{\bar{K}}$ в m_0 и до конца интервала $T_2^{(1)}$ (при условии, что на этом интервале ветвь переходит из m_0 в m_3) будет равно: $\bar{M}_B(T_2^{(1)}) - j T_{\bar{V}} = (T_2^{(1)} - j T_{\bar{V}}) - M(T_2^{(1)} - j T_{\bar{V}})$, где j - порядковый номер обслуживаемой на $T_2^{(1)}$ ветви и

$$M(T_2^{(i)} - jT_v) = \frac{1}{1 - (1 - P_{\Pi}(\theta))^{(M_{C_1} - j)n_3}} \sum_{k=1}^{(M_{C_1} - j)n_3 - 1} k P_{\Pi}(\theta) (1 - P_{\Pi}(\theta))^{k-1}.$$

То же самое матожидание, но при отсутствии условия перехода из m_0 в m_3 будет равно:

$$(1 - (1 - P_{\Pi}(\theta))^{(M_{C_1} - j)n_3}) \bar{M}_B(T_2^{(i)} - jT_v),$$

где первый сомножитель есть вероятность перехода рассматриваемой ветви на интервале $T_2^{(i)} - jT_v$. Отсюда

$$\bar{M}_{\text{вж}}^{(i)} = \sum_{j=1}^{M_{C_1} - 1} (1 - (1 - P_{\Pi}(\theta))^{(M_{C_1} - j)n_3}) \bar{M}_B(T_2^{(i)} - jT_v).$$

Так как $Q_1 = m_0^{(i)}(\theta) + m^{(i)}(\theta)$ - матожидание количества ветвей на этапе опроса, то математическое ожидание суммарного времени задержек ветвей, принадлежащих множеству m_3 , на i -м цикле обслуживания будет равно:

$$\bar{M}_3^{(i)} = \sum_{j=1}^{Q_1} \bar{M}^{(i)}(\tau_j \theta) + \bar{M}^{(i)}(T_2^{(i)}).$$

Математическое ожидание суммарного времени задержек ветвей, принадлежащих множеству $m_{\text{ж}}$. Это матожидание найдем вначале на интервале $T_1^{(i)}$. Время задержки ветви из множества $m_{\text{ж}}$ на интервале $T_1^{(i)}$ считается: 1) с момента перехода этой ветви из множества m_3 в $m_{\text{ж}}$ и до конца интервала $T_1^{(i)}$ при условии, что для этой ветви выполняется условие синхронизации, либо 2) с момента, когда условие синхронизации делается "истинным" (другой ветвью) и до конца интервала $T_1^{(i)}$.

Задержки на интервале $\tau_1 \theta$: $\hat{M}^{(i)}(\tau_1 \theta) = M_{C_1}^{(i)}(\theta) \tau_1 \theta$, где $M_{C_1}^{(i)}(\theta)$ - матожидание количества ветвей из $m_{\text{ж}}$, находящихся в состоянии задержки (по причине работы операционной системы) до начала интервала $\tau_1 \theta$. Задержки на $\tau_2 \theta$: $\hat{M}^{(i)}(\tau_2 \theta) = M_{C_1}^{(i)}(\tau_1) \tau_2 \theta$, где $M_{C_1}^{(i)}(\tau_1)$ - матожидание количества ветвей из $m_{\text{ж}}$, находящихся в состоянии задержки до начала интервала $\tau_2 \theta$. Наконец, для интер-

вала $\tau_j \theta$: $\hat{M}^{(i)}(\tau_j \theta) = M_{C_1}^{(i)}(\tau_{j-1}) \tau_j \theta$. В этих равенствах

$$M_{C_1}^{(i)}(\tau_r) = \sum_{k=1}^{m_{\mathcal{K}}^{(i)}(\tau_r)} k \cdot C^k(\tau_r) P_B^k (1-P_B)^{m_{\mathcal{K}}^{(i)}(\tau_r)-k} .$$

Отсюда искомая величина задержек ветвей из $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}$ на интервале $T_1^{(i)}$ равна: $\bar{M}_{\mathcal{K}}^{(i)}(T_1^{(i)}) = \sum_{j=1}^{Q_1} \hat{M}^{(i)}(\tau_j \theta)$. Аналогичное значение для ветвей, принадлежащих $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}$ на интервале $T_2^{(i)}$ равно: $\bar{M}_{\mathcal{K}}^{(i)}(T_2^{(i)}) = \sum_{j=0}^{M_{C_1}-1} (M_{C_1}-j) T_{\nu}$, где M_{C_1} - матожидание количества ветвей из $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}$, которые на данном цикле обслуживания перейдут в множество $\mathcal{M}_0$ (M_{C_1} вычисляется по формуле (3)); T_{ν} - матожидание времени обслуживания одной ветви.

Математическое ожидание суммарного времени задержек ветвей на всем i -м цикле обслуживания будет равно: $\bar{M}_1^{(i)} = \bar{M}_2^{(i)} + \bar{M}_{\mathcal{K}}^{(i)}(T_1^{(i)}) + \bar{M}_{\mathcal{K}}^{(i)}(T_2^{(i)})$.

На этом рассмотрение первого случая завершено.

Перейдем к рассмотрению вопроса о матожидании времени задержек для второго случая, когда учитываются не только задержки запрашивающих ветвей, но и ветвей, которые приостанавливаются на время доступа к их памяти. Для этого найдем вероятности $\bar{P}_0^{(i)}(j)$ ($j = 1, \dots, M_{C_1}$) принадлежности запрашиваемой ветви множеству $\mathcal{M}_0$, так как только для таких ветвей нужно в данном случае учитывать задержки (ветви из $\mathcal{M}_3$ и $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}$ не могут быть задержаны, поскольку они уже находятся в приостановленном состоянии). Здесь j - порядковый номер ветви из списка ветвей, принадлежащих множеству $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}$, для которых на данном цикле обслуживания выполнится условие синхронизации, т.е. ветвь из $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}$ перейдет в $\mathcal{M}_0$; $\bar{P}_0^{(i)}(j) = m_0^{(i)}(Q_1+j-1)/L$, где $m_0^{(i)}(Q_1+j-1)$ - матожидание количества ветвей из $\mathcal{M}_0$ в начальный момент интервала T_{ν_j} (перед началом обслуживания ветви j), т.е.

нам нужно найти все $m_0^{(i)}(Q_1+j-1)$ на интервале $T_2^{(i)}$.

В конце обслуживания ветви j из списка обслуживаемых ветвей на i -м цикле имеем:

$$m_0^{(i)}(Q_1+j) = \bar{m}_0^{(i)}(Q_1+j) + M_{C_1}^{(i)}(\tau_{Q_1+j}) + \dots + M_{C_1}^{(i)}(\tau_{Q_1+j}) + 1 ,$$

где $\bar{m}_0^{(i)}(Q_1+j) = \bar{m}_0^{(i)}(Q_1+j-1) - M_0^{(i)}(T_{V_j})$ - матожидание количества ветвей из $\bar{m}_0$ (стартовавших в начале $T_1^{(1)}$) в конце интервала $\tau_{Q_1+j} = T_{V_j}$; $Q_1 = m_0^{(i)}(\emptyset) + m_3^{(i)}(\emptyset)$; $M_0^{(i)}(T_{V_j})$ - матожидание количества ветвей из m_0 , которые перейдут в m_3 на интервале T_{V_j} ; $M_{C_k}^{(i)}(\tau_{Q_1+j})$ ($k=1, \dots, i-1$) - матожидание количества ветвей из $\tilde{m}_{C_k}$ ($k=1, 2, \dots, i$), которые остались в этих множествах в конце интервала τ_{Q_1+j} . К правой части равенства прибавляется единица, так как обслуженная ветвь из множества m_j переходит в $\tilde{m}_{C_1} \subset m_0$.

Матожидания $M_{C_k}^{(i)}(\tau_{Q_1+j})$ ($k=1, \dots, i-1$) - вычисляются по формулам:

$$M_{C_k}^{(i)}(\tau_{Q_1+j}) = M_{C_k} - M_{PC_k}^{(i)}(\tau_{Q_1+j}), \quad k = 1, 2, \dots, i-1,$$

где $M_{PC_k}^{(i)}(\tau_{Q_1+j})$ - матожидание количества ветвей из $\tilde{m}_{C_k} \subset m_0$, которые к концу интервала τ_{Q_1+j} перейдут в m_3 ; эти матожидания вычисляются по формуле (2), в которую для каждого $k=1, 2, \dots, i-1$ нужно вместо $d-1$ подставить M_{C_k} , а вместо P_i ($i=1, 2, \dots, m_i$) - выражения:

$$P_1 = P_{\Pi}(T_2^{(k)} - T_{V_j} + \sum_{m=k+1}^{i-1} S^{(m)} + T_1^{(i)} + \sum_{r=1}^j \tau_{Q_1+r}),$$

$$P_2 = P_{\Pi}(\sum_{m=k+1}^{i-1} S^{(m)} + T_2^{(k)} - 2T_{V_j} + T_1^{(i)} + \sum_{r=1}^j \tau_{Q_1+r}),$$

...

$$P_{M_{C_k}} = P_{\Pi}(\sum_{m=k+1}^{i-1} S^{(m)} + T_1^{(i)} + \sum_{r=1}^j \tau_{Q_1+r}).$$

Матожидание $M_{C_1}^{(i)}(\tau_{Q_1+j})$ вычисляется по формуле:

$$M_{C_1}^{(i)}(\tau_{Q_1+j}) = j-1 - M_{PC_1}^{(i)}(\tau_{Q_1+j}),$$

где $M_{PC_1}^{(i)}(\tau_{Q_1+j})$ - матожидание количества ветвей, который перейдут из $\tilde{m}_{C_1}$ в m_3 к концу интервала τ_{Q_1+j} ; $M_{PC_1}^{(i)}(\tau_{Q_1+j})$ вычисляется

по формуле (2), в которую вместо $d-1$ нужно подставить $j-1$, а вместо P_i ($i=1, 2, \dots, i-1$) - выражения: $P_1 = P_{\Pi}((j-1)T_{\nu})$, $P_2 = P_{\Pi}((j-2)T_{\nu})$, ..., $P_{j-1} = P_{\Pi}(T_{\nu})$.

Теперь нам остается выписать выражение для $M_0^{(i)}(T_{\nu_j})$:

$$M_0^{(i)}(T_{\nu_j}) = \sum_{k=1}^{\overline{m}_0^{(i)}(\tau_{Q_1+j-1})} k C_{\overline{m}_0^{(i)}(\tau_{Q_1+j-1})}^k \left[(1 - P_{\Pi}(\sum_{m=1}^{i-1} S^{(m)} + T_1^{(i)} + (j-1)T_{\nu})) P_{\Pi}(T_{\nu_j}) \right]^k \times \left[1 - (1 - P_{\Pi}(\sum_{m=1}^{i-1} S^{(m)} + T_1^{(i)} + (j-1)T_{\nu})) \right]^{\overline{m}_0^{(i)}(\tau_{Q_1+j-1}) - k},$$

где $T_{\nu_0} = \emptyset$, $T_{\nu_1} = T_{\nu_2} = \dots = T_{\nu_k} = n_3 \theta$, $P_{\Pi}(T_{\nu_j}) = 1 - (1 - P_{\Pi}(\theta))^{n_3}$,

$$P_{\Pi}(\sum_{m=1}^{i-1} S^{(m)} + T_1^{(i)} + (j-1)T_{\nu}) = 1 - \prod_{m=1}^{i-1} (1 - P_{\Pi}(\theta))^{S^{(m)}} (1 - P_{\Pi}(\theta))^{(j-1)n_3 + T_1^{(i)}}.$$

Таким образом, для любого j ($j = 1, 2, \dots, M_{C_1}$) найдены $m_0^{(i)}(\tau_{Q_1+j})$, а значит, и требуемые вероятности $\overline{P}_0^{(i)}(j)$.

Найдем теперь суммарное время задержек запрашиваемых ветвей (и принадлежащих m_0). При обслуживании ветви j (из m_j) с вероятностью $P_0^{(i)}(j-1)$ запрашиваемая ветвь будет принадлежать множеству m_0 . Время обслуживания ветви j равно T_{ν} , значит, матожидание времени задержки запрашиваемой ветви, принадлежащей m_0 , равно $\overline{P}_0^{(i)}(j)T_{\nu} + (1 - \overline{P}_0^{(i)}(j))\emptyset = \overline{P}_0^{(i)}(j)T_{\nu}$. Отсюда суммарное время задержек запрашиваемых ветвей будет равно:

$$\overline{M}_{m_0}^{(i)} = \sum_{j=1}^{M_{C_1}} \overline{P}_0^{(i)}(j) T_{\nu}.$$

Математическое ожидание суммарного времени задержек ветвей на всем i -м цикле обслуживания в рассматриваемом случае будет равно $\overline{M}_2^{(i)} = \overline{M}_S^{(i)} + \overline{M}_J(T_1^{(i)}) + \overline{M}_J(T_2^{(i)}) + \overline{M}_{m_0}^{(i)}$. Отсюда находим

среднее время задержки каждого процесса, вовлекаемого во взаимодействие при доступе к памяти второго уровня на i -м цикле обслуживания:

$$M_{II}^1 = \frac{\overline{M}_1^{(1)}}{L - m_{\text{ж}}^{(1)}(\tau_{Q_1} + M_{C_1})} - \text{для первого случая,}$$

$$M_{II}^2 = \frac{\overline{M}_2^{(1)}}{L - m_{\text{ж}}^{(1)}(\tau_{Q_1} + M_{C_1})} - \text{для второго случая,}$$

где $m_{\text{ж}}^{(1)}(\tau_{Q_1} + M_{C_1}) = m_{\text{ж}}^{(1+1)}(\emptyset)$ - количество ветвей из $m_{\text{ж}}$, не получивших доступа ко второму уровню памяти на данном цикле обслуживания вследствие условий синхронизации.

§4. Численный анализ задержек процессов в системе МИНИМАКС

В соответствии с полученными в предыдущем разделе соотношениями была разработана специальная программа, позволяющая проводить реальное моделирование взаимодействий процессов рассматриваемого класса. В данном разделе приводятся результаты такого моделирования для процессов, порождаемых в системе МИНИМАКС.

На рис. 2 и 3 представлены графики зависимости среднего времени задержки одного индивидуального системного взаимодействия от интенсивности таких взаимодействий. Указанные зависимости находятся для разного количества

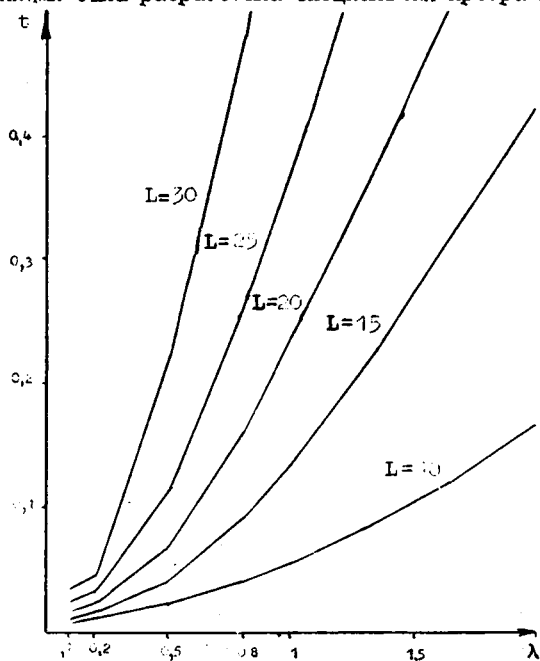


Рис. 2

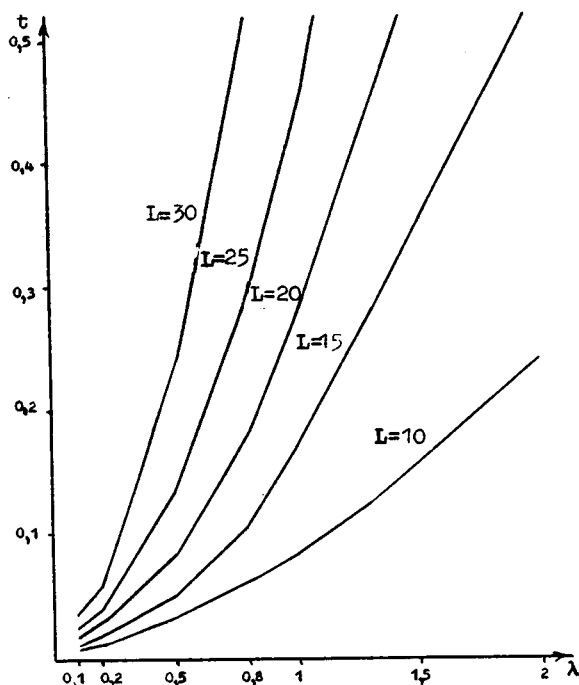


Рис. 3

ЭМ в подсистеме, обслуживаемой одним старшим диспетчером. По горизонтальной оси откладывается интенсивность потока индивидуальных взаимодействий, инициируемых отдельной ветвью, по вертикальной — временные задержки в секундах. Рис. 2 соответствует случаю, когда задержки процесса, находящегося в ЭМ, к памяти которой осуществляется доступ, не учитываются. Этот случай соответствует взаимодействию процессов, поддерживаемых каналами прямого доступа. Рис. 3

соответствует случаю, когда упомянутые задержки учитываются, т.е. процесс, выполняемый в ЭМ, к памяти которой осуществляется доступ, приостанавливается на время доступа.

Например, для подсистемы из тридцати ЭМ и интенсивности индивидуальных взаимодействий, поступающих от каждой ветви — один запрос в секунду, средние задержки каждого взаимодействия (причиной которых является старший диспетчер и диспетчеры ЭМ) будут около одной секунды. Если такая ситуация не удовлетворяет нужным требованиям, то это означает, что одного старшего диспетчера в подсистеме при упомянутых условиях недостаточно.

Приведенные графики представляют собой фрагменты каталога рассматриваемых зависимостей, которые легко могут быть расширены с помощью разработанной программы. Эти зависимости позволяют делать выбор размеров подсистем, обслуживаемых старшими диспетчерами.

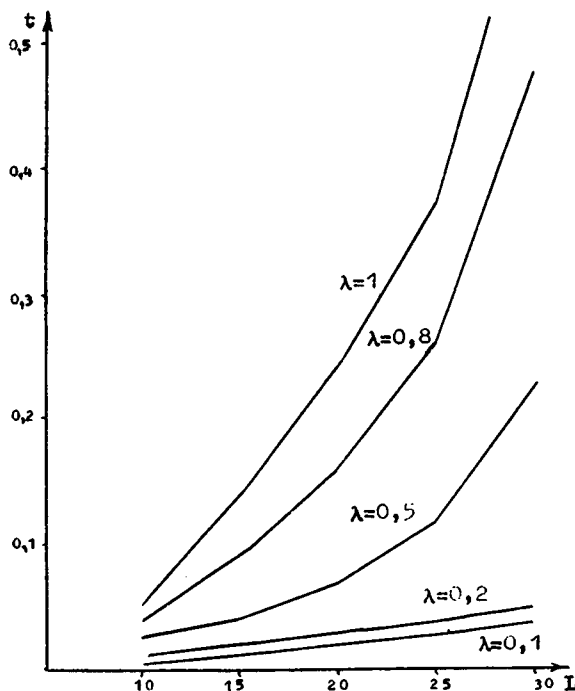


Рис. 4

этом случае даже для подсистем из 20–25 ЭМ средние накладные расходы, связанные с функционированием блоков ОС, не превышают 0,3–0,4 сек на одно системное взаимодействие.

Л и т е р а т у р а

1. МИРЕНКОВ Н.Н. Однородные вычислительные системы. Структурная организация операционных систем. Ч. I и 2. – Новосибирск, 1977. – 48 с., 47 с. (Препринты/Институт математики СО АН СССР: ОВС-1, ОВС-2.)

2. Средства программирования системы МИНИМАКС /Кербель В.Г., Колосова В.И., Корнеев В.Д., Миренков Н.Н., Щербаков Е.В. – В кн.: Вычислительные системы. Вып. 60. Вопросы теории и построения ОС. Новосибирск, 1974, с. 143–152.

3. Программное обеспечение системы МИНИМАКС /Кербель В.Г., Колосова В.И., Корнеев В.Д., Крылов Э.Г., Миренков Н.Н. – Новосибирск, 1979. – 43 с. (Препринт/Институт математики СО АН СССР: ОВС-09.)

На рис.4 представлена зависимость временных задержек одного индивидуального системного взаимодействия от количества ЭМ в подсистеме, обслуживаемой одним старшим диспетчером. Указанная зависимость находится при разных интенсивностях взаимодействий.

Анализ результатов показывает, что для широкого круга задач, распараллельных на основе крупноблочной стратегии, интенсивность взаимодействий между процессами относительно невелика, с $\lambda \leq 1$. В

Поступила в ред.-изд. отд.
20 мая 1983 года