МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ВС ИЗ МИКРО-ЭВМ
(Вычислительные системы)
1983 год Выпуск 96

УДК 681.3:512.8

МАТРИЦЫ КАК АБСТРАКТНЫЙ ТИП ДАННЫХ

С.С. Гончаров

Понятие матрицы в математике и ее приложениях играет важную роль. Матрицы служат удобным средством для представления различных абстрактных объектов в виде хорошо заданных, поддающихся счету систем, с хорошо организованными отношениями. Такими примерами являются представление групп матричными группами, автоморфизмов и гомоморфизмов векторных пространств их матрицами и ряд других. Важную роль матричные задания играют в программировании. Наиболее типичным примером является организация данных в виде таблиц. В связи с этим представляется важным уметь правильно работать с матрицами, точно реализовать такие данных и методы работы с ними на машинах.

В работе на примере матриц рассмотрены два подхода к представлению типов данных: аксиоматический и теоретико-модельный. В основу теоретико-модельного подхода положено понятие конструктивной модели А.И.Мальцева, впервые примененное к исследованию абстрактных типов данных Д.Бергстрой и Д.Тукером. При рассмотрении аксиоматического подхода изучается возможность применения для описания абстрактных типов данных более мощных языков, чем язык первого порядка.

§I. Абстрактные структуры данных и структуры матричных данных

Под абстрактной структурой данных часто понимают многоосновную модель [4]. Однако если наша цель - представлять данные эффективно, то от модели нужно потребовать дополнительно ограничения на эффективность задания данных и операций над ними. Для введения такого понятия эффективности мы воспользуемся подходом А.И.Маль -

нева [I,2], который был уже использован ранее для представления абстрактных типов данных Тукером и Бергстрой [7].

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A_1,\dots,A_n;\ F_1^{\varepsilon_1},\dots,F_k^{\varepsilon_k};\ P_1^{\delta_1},\dots,P_l^{\delta_l},\ c_1^{s_1},\dots,c_m^{s_m}\rangle$ – многоосновная структура, где $A_1,\dots,A_n$ – n типов основных множеств $F_1,\dots,F_k$ – основные операции, $P_1,\dots,P_l$ – предикаты и $c_1,\dots,c_m$ – выделенные элементы (константы), а индекс $\varepsilon_p = ((i_1^p,l_1^p),\dots,(i_{k_p}^p,l_{k_p}^p),i_p)$ означает, что операция F_p отображает $A_{i_1^p}^{l_1^p} \times\dots\times A_{i_{k_p}^p}^{l_{k_p}^p}$ в A_{i_p}, а $\delta_q = ((i_1^q\ l_1^q),\dots,(i_{k_q}^q,l_{k_q}^q))$,

что $P_q \subseteq A_{i_1^q}^{l_1^q} \times\dots\times A_{i_{k_q}^q}^{l_{k_q}^q}$ и c_i^s лежит в A_s.

Используя хорошо известный способ сведения многоосновной структуры к одноосновной, определим $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ – дизъюнктное объединение основных множеств структуры $\mathfrak{A}$ и добавим одноместные предикаты, выделяющие в этом объединении соответствующие части A_i, $1 \le i \le n$, а операции заменяем их графиками. Таким образом, мы уже получаем одноосновную структуру $\mathfrak{A}^0$, построенную по $\mathfrak{A}$.

Нумерацией структуры $\mathfrak{A}$ назовем нумерацию ν дизъюнктного объединения $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ такую, что все дизъюнктные части A_i, $1 \le i \le n$, имеют рекурсивные множества номеров.

Структура $\mathfrak{A}$ с нумерацией ν называется конструктивной [I,3] (позитивной), если множества номеров наборов элементов из P_j, $1 \le j \le l$, графиков F_i, $1 \le i \le k$, номера элементов c_i, $1 \le i \le m$, и нумерационная эквивалентность η_ν рекурсивны (рекурсивно-перечислимы), а структуру $\mathfrak{A}$, имеющую нумерацию ν такую, что $(\mathfrak{A},\nu)$ – конструктивная (позитивная) структура, назовем конструктивизируемой (перечислимой). Если мы в условии конструктивности (позитивности) отбросим ограничение на нумерационную эквивалентность, то получим слабую конструктивность (слабую перечислимость).

Под абстрактной структурой мы будем понимать слабо перечислимую структуру. Однако для ряда приложений важным оказывается уметь распознавать равенство объектов νn и νm, и поэтому наиболее важным классом таких абстрактных структур являются конструктивные структуры.

Нужно отметить, что все структуры данных, рассматриваемые в реальных ситуациях, слабо конструктивны либо слабо перечислимы. Более того, алгоритмы, осуществляющие разрешимость или перечислимость указанных свойств, имеют простую природу. Однако наиболее удобными для рассмотрения и изучения являются те данные, которые организованы в конструктивную структуру с достаточно простыми разрешающими алгоритмами, например, полиномиальными. К сожалению, такое представление допускают не все данные. Например, множество всех алгоритмов не допускает такого представления. Поэтому возникают следующие проблемы.

ПРОБЛЕМА I. Какие данные допускают организацию в виде конструктивных структур.

ПРОБЛЕМА 2. Дать характеризацию перечислимых (позитивных) структур, являющихся конструктивными (конструктивизируемыми).

ПРОБЛЕМА 3. Найти алгебраические условия, при которых слабо конструктивные (слабо перечислимые) структуры являются конструктивными.

При организации данных существенную роль играет нахождение универсальных представлений данных, т.е. таких, из которых все остальные могут быть получены каким-либо каноническим способом. При этом все свойства таких данных могут быть исследованы уже на основе таких представлений. В связи с этим возникает задача нахождения таких универсальных представлений.

ПРОБЛЕМА 4. Какие данные допускают универсальные представления, а также какие канонические операции перехода от универсальных представлений к другим представлениям допустимы.

Рассмотрим теперь организацию данных типа матрицы. Определим универсальную структуру матричных данных из объектов множества A с индексами из множества I. Пусть $K(I)$ - множество конечных подмножеств множества I. Определим алгебру основными множествами $\langle M, S, A^*, I^*, K(I)\rangle$, где $P^* = P \cup \{\perp\}$ и $\perp$ - новый символ, который трактуем как неопределенное значение, объекты из M будут в точности матричными данными, а S - массивы, заиндексованные элементами из I с элементами из A. Под массивом мы будем понимать конечное семейство элементов из A, заиндексованное элементами из некоторого подмножества K множества I, а под матрицей двойное семейство $(a_{ij})_{i \in K_1, j \in K_2}$ элементов из A, заиндексованное конечными подмножествами K_1 и K_2 множества I. Таким образом, основные множества заданы. Осталось определить на них основные операции. Определим выделенные константы: $\bot_M$ - матрица с пустым множеством индексов, $\bot_S$ - строка с пустым множеством индексов, а $\bot_{K(I)}$ - пустое множество индексов. Значения же $\bot_A$ и $\bot_I$ - это дополнительные неопределенные значения. Часто в дальнейшем при этих константах мы будем опускать индексы. Нам нужно уметь по матрице и массиву определять множества индексов. Поэтому определим операции: [ИНДЕКСЫ]: $S^* \to K(I)$, $[\text{ИНДЕКСЫ}]_1 : M^* \to K(I)$ и $[\text{ИНДЕКСЫ}]_2 : M^* \to K(I)$, положив $[\text{ИНДЕКСЫ}]\,((a_i)_{i \in K}) \rightleftharpoons K$, $[\text{ИНДЕКСЫ}]_1\,((a_{ij})_{i \in K_1,\, j \in K_2}) \rightleftharpoons K_1$, $[\text{ИНДЕКСЫ}]_2\,((a_{ij})_{i \in K_1,\, j \in K_2}) \rightleftharpoons K_2$, $[\text{ИНДЕКСЫ}]_i\,(\bot) = [\text{ИНДЕКСЫ}](\bot) = \bot$ для $1 \le i \le 2$.

Теперь определим еще операции добавления и выбрасывания строк и столбцов в матрицах и элементов в массивах. Пусть [ЗАМЕНА] : $S \times I \times A \to S$, где $[\text{ЗАМЕНА}]\,((a_i)_{i \in K}, i, a) \rightleftharpoons (a'_i)_{i \in K'}$, где $K' \rightleftharpoons K \cup \{i\}$ и $a'_j = a_j$ для $j \in K \setminus \{i\}$ и $a'_i = a$, если $i \notin K$, и $K' = K$ и $a'_j = a_j$ для $j \in K \setminus \{i\}$ и $a'_i = a$, если $i \in K$ и [УДАЛЕНИЕ]: $S \times I \to S$, где

$$[\text{УДАЛЕНИЕ}]\,((a_i)_{i \in K}, i) \rightleftharpoons \begin{cases} (a_i)_{i \in K}, & \text{если } i \notin K, \\ (a_i)_{i \in K \setminus \{i\}}, & \text{если } i \in K, \end{cases}$$

а для матриц операции: $[\text{ЗАМЕНА}]_1 : M \times I \times S \to M$, $[\text{ЗАМЕНА}]_2 : M \times I \times S \to M$, $[\text{УДАЛЕНИЕ}]_1 : M \times I \to M$, $[\text{УДАЛЕНИЕ}]_2 : M \times I \to M$, где

$$[\text{ЗАМЕНА}]_1\,((a_{ij})_{i \in K_1, j \in K_2}, i_0, (b_j)_{j \in K}) \rightleftharpoons \begin{cases} \bot, & \text{если } K \neq K_2, \\ (a'_{ij})_{i \in K'_1, j \in K_2}, \end{cases}$$

где

$$a'_{ij} \rightleftharpoons \begin{cases} a_{ij}, & \text{если } i \neq i_0, \\ b_j, & \text{если } i = i_0, \end{cases}$$

и $K'_1 \rightleftharpoons K_1 \cup \{i_0\}$.

$$[\text{УДАЛЕНИЕ}]_1\,((a_{ij})_{i \in K_1, j \in K_2} \rightleftharpoons \begin{cases} (a_{ij})_{i \in K_1 \setminus \{i_0\}, j \in K_2}, & \text{если } K_1 \neq \{i_0\}, \\ \bot, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

По массиву и индексу нужно уметь определять элемент с этим индексом, поэтому определим операцию [ВЫБОР]: $S \times I \to A^*$, определенную следующим образом:

$$[\text{ВЫБОР}]((a_i)_{i \in K}, i) \leftrightharpoons \begin{cases} a_i, \text{ если } i \in K, \\ \perp, \text{ если } i \notin K, \end{cases}$$

для матриц нам нужно уметь переходить к строкам и столбцам, для этого определим операции выборки строк и столбцов с заданными индексами: $[\text{ВЫБОР}]_1: M \times I \to S$, где

$$[\text{ВЫБОР}]_1((a_{ij})_{i \in K_1, j \in K_2}, i) \leftrightharpoons \begin{cases} (a_{ij})_{j \in K_2}, & \text{если} \quad i \in K_1, \\ \perp, & \text{если} \quad i \notin K_1, \end{cases}$$

где под $\perp$ мы понимаем строку с неопределенными значениями и пустым множеством индексов, и $[\text{ВЫБОР}]_2: M \times I \to S$, где

$$[\text{ВЫБОР}]_2((a_{ij})_{i \in K_1, j \in K_2}, j) \leftrightharpoons \begin{cases} (a_{ij})_{i \in K_1}, & \text{если} \quad j \in K_2, \\ \perp, & \text{если} \quad j \notin K_2. \end{cases}$$

Определим операции для работы с множествами: [ВЫЧИТ]: $\mathcal{K}(I) \times I \to \mathcal{K}(I)$ и [ДОБ]: $\mathcal{K}(I) \times I \to \mathcal{K}(I)$, положив [ВЫЧ]$(K, i) \leftrightharpoons K \setminus \{i\}$ и [ДОБ]$(K, i) \leftrightharpoons K \cup \{i\}$.

Операции $[\text{ЗАМЕНА}]_2$ и $[\text{УДАЛЕНИЕ}]_2$ определяются аналогично, но по второму аргументу. Нам потребуется также бинарное отношение $\varepsilon \subseteq I \times \mathcal{K}(I)$ такое, что $\varepsilon = \{(x, K) \mid x \in K\}$.

Итак, мы получили многоосновную структуру

$$\mathfrak{M} \leftrightharpoons \langle M, S, I^*, \mathcal{K}(I), A^* ;$$

[ИНДЕКСЫ], $[\text{ИНДЕКСЫ}]_1$, $[\text{ИНДЕКСЫ}]_2$, [ВЫБОР], $[\text{ВЫБОР}]_1$, $[\text{ВЫБОР}]_2$, [ВЫЧИТ], [ДОБ], [ЗАМЕНА], $[\text{ЗАМЕНА}]_1$, $[\text{ЗАМЕНА}]_2$, [УДАЛЕНИЕ], $[\text{УДАЛЕНИЕ}]_1$, $[\text{УДАЛЕНИЕ}]_2$; ε; $\perp_M, \perp_S, \perp_I, \perp_{\mathcal{K}(I)}, \perp_A \rangle$.

Если $\nu_1': N \to A$ и $\nu_2': N \to I$ – разрешимые нумерации, то легко определить конструктивизацию структуры $\mathfrak{M}$, положив

$$\nu_i(n) \leftrightharpoons \begin{cases} \perp, \text{ если } & n = 0, \\ \nu_i'(n-1), \text{ если } & n > 0, \ 1 \le i \le 2; \end{cases}$$

$$\nu_3(n) = \{ \nu_2'(i) \mid i \in \gamma(n) \},$$

где γ - гёделевская нумерация конечных подмножеств N [3], и

$$\nu_4(n) \leftrightharpoons \begin{cases} (a_i)_{i\in K}, & \text{если } \delta(l(n)) \text{ и } \delta(r(n)) \text{ - упорядоченные наборы одинаковой длины и все элементы набора } \delta(l(n)) \text{ разные и } K = \{l_i \mid i \le n \;\&\; \& \langle l_1,\dots,l_n\rangle = \delta(l(n)) \text{ и } a_{l_i} \leftrightharpoons \nu_2(f_i+1),\ i \le n, \text{ и } \delta(r(n)) = \langle f_1,\dots,f_n\rangle, \\ \perp & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Аналогично можно определить нумерацию ν_5. Здесь δ - гёделевская нумерация всех конечных упорядоченных наборов из N.

Определим теперь нумерацию ν для $A^* \sqcup I^* \sqcup \mathcal{K}(I) \sqcup S \sqcup M$, положив

$$\nu(n) \leftrightharpoons \begin{cases} \nu_i(l(n)), & \text{если } 1 \le r(n) = i \le 5, \\ \perp_A & \text{- в противном случае.} \end{cases}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. $(\mathfrak{M},\nu)$ - конструктивная многоосновная структура матриц.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В начале докажем разрешимость нумерации ν. Нетрудно понять, что ее разрешимость эквивалентна разрешимости нумераций ν_1, ν_2, ν_3, ν_4, ν_5, а ν_1 и ν_2 - разрешимые нумерации, так как разрешимы ν_1' и ν_2', разрешимость ν_4, ν_5 сводится к проблеме разрешимости для ν_2 и проверки условия $i \in \gamma(n)$, но так как γ - гёделевская нумерация, то это условие также разрешимо. Построим рекурсивную функцию f_I только для одной операции [ИНДЕКСЫ], остальные определяются аналогично. Итак, определяем

$$f_I(n) \leftrightharpoons \begin{cases} \gamma^{-1}(\emptyset), & \text{если } n = 0, \\ \gamma(l(n-1)), & \text{если } n > 0. \end{cases}$$

Простая проверка показывает, что $\nu_3 f_I(n) = [\text{ИНДЕКСЫ}](\nu_4\, n)$. Разрешимость отношения ϵ следует из разрешимости условия $i \in \gamma(n)$.

Если на множествах I и A были какие-то отношения или операции, то их можно прямо добавить к основным операциям данной многоосновной структуры, введя неопределенность операции на аргументах с неопределенным значением. Если $\mathfrak{A} = \langle A; \dots \rangle$ и $J = \langle I; \dots \rangle$ - алгебраические системы, то мы можем, доопределив предикаты и операции в данные на A^*, I^*, добавить их к предикатам и операциям системы $\mathfrak{M}$ и получить новую систему $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}, J)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [3]. Многоосновная структура $\mathfrak{A}$ называется автоустойчивой (рекурсивно устойчивой), если для любых двух конструктивизаций ν и μ существуют автоморфизм $\varphi = (\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ и рекурсивные функции $f = (f_1,\dots,f_n)$ такие, что $\varphi_i \nu(n) = \mu f_i(n)$ для $1 \le i \le n$ и $n \in \nu^{-1}(A_i)$ (φ_i - тождественная функция для $1 \le i \le n$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $\mathfrak{A}$ и J автоустойчивые (рекурсивно устойчивые) системы, то и $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}, J)$ автоустойчива (рекурсивно устойчива).

Нетрудно показать, что любые автоморфизмы φ и ϕ соответственно систем $\mathfrak{A}$ и J могут быть доопределены до автоморфизма Δ уже системы $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}, J)$, причем он конструктивно определяется по φ и ϕ, а отсюда уже непосредственно следует наше утверждение.

Это предложение обобщает теорему А.И.Мальцева об автоустойчивости структуры обычных матриц [2].

Условие автоустойчивости означает, что существует единственное с точностью до трансформации эффективное задание этой системы. Значит, работа с таким образом организованными данными не зависит от их конкретной эффективной реализации.

§2. Абстрактные типы данных и матрицы

Под абстрактным типом данных мы будем понимать описание данных на каком-либо логическом языке, т.е. теорию структур данных. Такой подход лежит в русле аксиоматического подхода к описанию данных [5,6]. Важность получения таких описаний рассмотрена в работе [6,9]. Отличие рассматриваемого здесь подхода состоит в том, что мы не ограничиваем наш язык лишь тождествами и квазитождествами. Хотя наличие эффективного описания на языке квазитождеств дает возможность построить универсальную перечислимую структуру данных этого типа [I,3,8], которая уже полностью определяет данный тип.

Охарактеризуем теперь теорию данных "матрицы".

Рассмотрим вначале многосортный язык узкого исчисления предикатов первого порядка. Если мы рассмотрим любой набор основных аксиом, которым удовлетворяют основные операции на структуре матриц, то для этой системы аксиом тем не менее не существует универсальной системы, в которую бы любая модель для этой системы аксиом вкладывалась. Это происходит в силу того, что структура всех бесконечных матриц с индексами по всем подмножествам из [I], которая определяется аналогично конечным, в силу локальной теоремы Мальцева будет элементарно эквивалентна нашей, а все счетные промежуточные системы между всеми конечными матрицами и всеми бесконечными матрицами, которых бесконечно много, также удовлетворяют всем аксиомам. Чтобы дать удовлетворительное описание матриц, т.е. определить тип матриц, нужно рассмотреть более мощные языки.

Рассмотрим язык L первого порядка, добавив к нему формулы вида: $(\exists n_i)(\exists x_0 \ldots x_{n_i})\,\varphi_i(x_0,\ldots,x_{n_i},y_0,\ldots,y_m)$ и их обычные логические комбинации, где формула φ_i последовательности $(\varphi_i)_{i<\omega}$ содержит только свободные переменные из $\{x_0,\ldots,x_{n_i}\} \cup \{y_0,\ldots,y_m\}$, $i<\omega$, а функция, выдающая по i гёделевский номер формулы φ_i, принадлежит какому-либо заданному классу функций (например, примитивно рекурсивных, классу Гжегорчика ε_n, $n \geq 0$, полиномиально вычислимых и других), который содержит все функции, требующиеся для определения нашего типа.

С помощью формул такого вида можно записать условие того, что все множества из $\mathcal{K}(I)$ конечны, а именно формулы вида: $(\forall x)(\exists i_0,\ldots,i_n)$ [ВЫЧИТ]...[ВЫЧИТ] $(x,\ i_0),\ i_1,\ldots,i_n) = \bot$. Добавив эти формулы к элементарной теории первого порядка, мы уже получим адекватное описание структуры матричных данных. Это и будет абстрактный тип данных матрицы.

Представляется интересным рассмотреть вопрос о существовании алгоритма для проверки истинности формул из этого расширенного языка, а также тождественно истинные формулы.

Выпишем теперь набор аксиом абстрактного типа данных матриц указанного типа, или типа T_A с индексами типа T_I.

Рассмотрим язык с переменными пяти сортов: $x, x_0,\ldots,x_n,\ldots$ – переменные для элементов типа A; $i, i_0,\ldots,i_n,\ldots,j_0,\ldots,j_n,\ldots$ – переменные для индексов матриц строк и столбцов; $I, I_0, I_1,\ldots$ $\ldots,I_n,\ldots,J,J_0,\ldots,J_n,\ldots$ – переменные для множеств индексов; S, $S_0,\ldots,S_n,\ldots$ – переменные для строк и столбцов; M, $M_0,\ldots,M_n,\ldots$ – переменные для матриц. В качестве сигнатурных символов рассмотрим все операции, предикаты и константы для типа элементов, над которым строятся все матрицы, а также операции:

[ИНДЕКСЫ], [ИНДЕКСЫ]$_1$, [ИНДЕКСЫ]$_2$, [ВЫБОР], [ВЫБОР]$_1$, [ВЫБОР]$_2$, [ДОБ], [ЗАМЕАНА], [ЗАМЕНА]$_1$, [ЗАМЕНА]$_2$, [УДАЛЕНИЕ], [УДАЛЕНИЕ]$_1$, [УДАЛЕНИЕ]$_2$, [ВЫЧИТ];
ε, $\bot_M$, $\bot_S$, $\bot_I$, $\bot_{\mathcal{K}(I)}$, $\bot_A$.

Мы будем часто опускать индексы у констант типа $\perp$ (неопределенность), когда из контекста ясно, что имеется в виду.

Опишем нужные нам аксиомы.

0. Аксиомы типа элементов матричных данных для элементов, отличных от $\perp_A$, и типа индексов T_I без $\perp_I$.

I. Аксиомы объемности $(\forall_i)(i \in I \Leftrightarrow i \in J) \Leftrightarrow I = J$.

2. Аксиомы ЗАМЕНА для строк:

а) $(\forall i)(i \in$ [ИНДЕКСЫ]$(s) \Rightarrow i \in$ [ИНДЕКСЫ][ЗАМЕНА]$(s, j, x))$;

б) $(\forall i)(i \in$ [ИНДЕКСЫ] [ЗАМЕНА] $(s, j, x) \Rightarrow (i \in$ [ИНДЕКСЫ]$(s) \vee i = j))$;

в) [ИНДЕКСЫ]$(\perp) = \perp$.

3. Аксиомы ВЫБОР для строк:

а) $(\forall i)$ $(i \in$ [ИНДЕКСЫ] $(s) \Rightarrow$ [ЗАМЕНА] $(s, i,$[ВЫБОР]$(s,i)) = s$;

б) $(\forall i)$ $(i \notin$ [ИНДЕКСЫ]$(s) \Rightarrow$ [ВЫБОР]$(s,i) = \perp$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы не будем различать пустой набор, множество и матрицу и соответственно неопределенное значение в таких структурах, так как у них много общих свойств.

4. Аксиомы УДАЛЕНИЕ для строк:

а) $(\forall i)$ $(i \in$ [ИНДЕКСЫ]$(s) \Rightarrow$ [ЗАМЕНА] [УДАЛЕНИЕ] $(s, i,$ [ВЫБОР]$(s, i)) = s)$;

б) $(\forall i)(i \notin$ [ИНДЕКСЫ]$(s) \Rightarrow$ [УДАЛЕНИЕ]$(s, i) = s)$;

в) $(\forall i)(i \neq j \Rightarrow (i \notin$ [ИНДЕКСЫ]$(s))) \Rightarrow$ [УДАЛЕНИЕ]$(s, j) = \perp)$.

5. Аксиома ОБЪЕМНОСТИ для строк:

([ИНДЕКСЫ]$(s_1) =$ [ИНДЕКСЫ](s_2) & $(\forall i)$ [ВЫБОР]$(s_1,i) =$ [ВЫБОР]$(s_2,i)) \Leftrightarrow s_1 = s_2$.

6. Аксиомы констант:

а) $(\forall i)(i \notin \perp_{\mathfrak{I}(I)})$,

б) $(\forall i)$ [ВЫБОР]$(\perp_S, i) = \perp_A$,

в) $(\forall i)$ [ВЫБОР]$_k(\perp_M, i) = \perp_S$, $k \in \{1,2\}$,

г) $(\forall I)(\perp_I \in I)$.

7. Аксиомы ВЫЧИТАНИЕ и ДОБАВЛЕНИЕ:

а) $(\forall j)(j \in$ [ВЫЧИТ]$(I,i) \to j \in I)$;

б) $(\forall j)(j \in I$ & $i \in I$ & $i \neq j \to j \in$ [ВЫЧИТ] $(I,i))$;

в) $(\forall i)(i \in$ [ДОБ]([ВЫЧИТ]$(I,i), i) = I)$;

г) $(\forall i)(i \in$ [ДОБ]$(I,i))$;

д) $(\forall i)(i \in$ [ДОБ]$(I,i))$;

е) $(\forall i)(i \in I \to i \in$ [ДОБ]$(I,j))$;

ж) $(\forall i)(i \in$ [ДОБ]$(I,j) \to (i = j \vee i \in I))$.

8. Аксиомы ИНДЕКСЫ строк:

а) [ИНДЕКСЫ] [УДАЛЕНИЕ] (s, i) = [ВЫЧИТ]([ИНДЕКСЫ]$(s),i)$;

б) [ИНДЕКСЫ] [ЗАМЕНА](s, i, x) = [ДОБ] ([ИНДЕКСЫ]$(s),i)$.

9. Аксиомы ЗАМЕНА для матриц:

а) $(\forall i)(i \in$ [ИНДЕКСЫ $]_k(M)$ & [ИНДЕКСЫ $]_l$ (M) = [ИНДЕКСЫ] $(s) \to i \in$ [ИНДЕКСЫ $]_k$ [ЗАМЕНА $]_k(M, j, s)$, где $l,k \in \{1,2\}$ & $l \neq k$;

б) $(\forall i)(i \in$ [ИНДЕКСЫ $]_k$ [ЗАМЕНА $]_k$ (M, j, s) & [ИНДЕКСЫ $]_l(M)$ = [ИНДЕКСЫ]$(s) \to (i=j \vee i \in$ [ИНДЕКСЫ $]_k(M)))$, где $k,l \in \{1, 2\}$ и $k \neq l$;

в) [ИНДЕКСЫ $]_k(\bot_M = \bot_{\mathcal{K}(I)})$, где $k \in \{1,2\}$;

г) [ИНДЕКСЫ $]_k$ $(M) \neq$ [ИНДЕКСЫ]$(s) \to$ [ЗАМЕНА $]_l(M, j, s) = \bot$, где $k, l \in \{1,2\}$ & $k \neq l$;

д) [ИНДЕКСЫ $]_l(M)$ = [ИНДЕКСЫ]$(s) \to$ [ИНДЕКСЫ $]_k$ [ЗАМЕНА $]_l$ (M,i,s) = [ИНДЕКСЫ $]_k(M)$, где $k,l \in \{1,2\}$ и $k \neq l$.

10. Аксиомы ВЫБОР для матриц:

а) $(\forall i)$ $(i \in$ [ИНДЕКСЫ $]_k(M) \to$ [ЗАМЕНА]$(M,i,$ [ВЫБОР $]_k(M,i)) = M)$, где $k \in \{1,2\}$;

б) $(\forall i)$ $(i \notin$ [ИНДЕКСЫ $]_k(M) \to$ [ВЫБОР $]_k$ $(M, i) = \bot)$, где $k \in \{1,2\}$;

в) $(\forall i)(i \notin$ [ИНДЕКСЫ $]_k(M) \to$ [ИНДЕКСЫ][ВЫБОР $]_k$ (M, i) = [ИНДЕКСЫ $]_l(M)$, где $k,l \in \{1,2\}$ & $k \neq l$;

г) $(\forall ij)$[ВЫБОР]([ВЫБОР]$_2$(м, i), j) = [ВЫБОР]([ВЫБОР]$_1$ (м, j), i).

I1. Аксиомы УДАЛЕНИЕ для матриц:

а) $(\forall i)(i \in$ [ИНДЕКСЫ]$_k$(м) $\Rightarrow$ [ЗАМЕНА]$_k$ ([УДАЛЕНИЕ]$_k$(м,i)i, [ВЫБОР]$_k$ (м,i)) = м);

б) $(\forall i)(i \notin$ [ИНДЕКСЫ]$_k$(м) $\Rightarrow$ [УДАЛЕНИЕ]$_k$(м, i) = м);

в) $((\forall i)(i \neq j \Rightarrow i \notin$ [ИНДЕКСЫ]$_k$(м)) $\Rightarrow$ [УДАЛЕНИЕ]$_k$(м, j) = $\perp$), где $k \in \{1,2\}$.

I2. Аксиома ОБЪЕМНОСТИ для матриц:

[ИНДЕКСЫ]$_1$(м$_1$) = [ИНДЕКСЫ]$_1$(м$_2$) & [ИНДЕКСЫ]$_2$ (м$_1$) = = [ИНДЕКСЫ]$_2$(м$_2$) & $(\forall i)$ ([ВЫБОР]$_1$(м$_1$,i) = [ВЫБОР]$_1$(м$_2$,i)) & $(\forall i)$([ВЫБОР]$_2$(м$_1$, i) = [ВЫБОР]$_2$(м$_2$, i))) $\Leftrightarrow$ м$_1$ = м$_2$;

I3. Аксиомы ИНДЕКСЫ матриц:

а) [ИНДЕКСЫ]$_k$ [УДАЛЕНИЕ]$_k$(м,i) = [ВЫЧИТ] ([ИНДЕКСЫ]$_k$(м), i), где $k \in \{1,2\}$;

б) [ИНДЕКСЫ] (s) = [ИНДЕКСЫ]$_1$(м) $\Rightarrow$ [ИНДЕКСЫ]$_k$ = [ЗАМЕНА]$_k$ (м,i,s) = [ДОБ] ([ИНДЕКСЫ]$_k$(м), i)) , где $k,l \in \{1,2\}$ & $k \neq l$.

I4. Аксиома КОНЕЧНОСТИ:

$(\forall I)(\exists_n)(\exists i_0 \ldots i_n)$ [ВЫЧИТ]...[ВЫЧИТ](...(I,i_0),...,i_n) = 1.

ЗАМЕЧАНИЕ. Функция, выдающая по матрице и индексам i и j элемент с этими индексами термальная в этом языке, а именно это функция [ВЫБОР] ([ВЫБОР]$_1$(м, i), j).

В связи с точным заданием типа матриц, возникают следующие вопросы:

ПРОБЛЕМА 5. Дать хорошее синтаксическое задание рассмотренной логики, изучить для него вопрос о полноте данного описания.

ПРОБЛЕМА 6. Рассмотреть вопросы разрешимости для теорий данного языка и, в частности, для теории матриц.

§3. Матричные структуры матричных данных

Если мы применим нашу конструкцию построения матриц с элементами из A вновь, но уже к M , а затем проитерируем этот процесс, то получим матрицу от матриц $M_n, n \geq 0$. Легко определить теперь структуру с основными множествами $\langle \bigcup_{n\geq 0} M_n, \bigcup_{n\geq 0} S_n, \mathcal{K}(I), I, \bigcup_{n\geq 0} M_n \cup A \rangle$ и определить на них все операции из $\mathfrak{M}_n$, а также еще одноместный предикат A, выделяющий элементы A. Тогда эта структура также будет конструктивной, если первоначальные структуры $\mathfrak{A}$ и J были конструктивными, и автоустойчивой, если они автоустойчивы. Однако чтобы задать этот тип данных, нужно еще добавить аксиому фундированности о том, что в конце концов мы всегда приходим к элементам из первоначального множества A либо к неопределенному значению.

Нетрудно также распространить на матрицы операции с множествами A, определив их покоординатно для матриц с одним и тем же множеством индексов и определив в противном случае в качестве значения неопределенное значение. Нетрудно понять также, что эти производные операции будут рекурсивными на номерах, если матричная структура конструктивна.

В этой работе рассмотрены лишь конструктивные структуры данных и их организация в матричные данные. Представляется интересным рассмотреть матричные данные перечислимых структур данных.

Литература

1. МАЛЬЦЕВ А.И. Конструктивные алгебры, I. -Успехи мат.наук, 1961, т. 16, №3, с. 3-60.

2. МАЛЬЦЕВ А.И. Строго родственные модели и рекурсивно совершенные алгебры. -Докл. АН СССР, 1962, т. 145, № 2, с. 276-279.

3. ЕРШОВ Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. -М.: Наука, 1980. - 416 с.

4. RUS I. Data structures and operating systems. EDITURA ACADEMIEI, Bcuresti,1979.- 364 p.

5. АГАФОНОВ В.Н. Типы и абстракция данных в языках программирования. -В кн.: Данные в языках программирования, М., Мир, 1982, с. 265-327.

6. LISKOV B.H.,ZILLES S.N. Specification Techniques for Data Abstractions.-IEEE Trans.on Software Engineering,1975,v.SE-1,N 1, March,p.7-19.

7. BERGSTRA J.A.,TUCKER J.V. A characterization of computable data types by means of Sinite equational specification method. -Lect.Notes Comp.Sci.,1980,N 85,p.76-90.

8. МАЛЬЦЕВ А.И. Алгебраические системы.-М.: Наука,1970.-392с.

9. PARNAS D.L. A Technique for Software Module Specification with Examples.-Comm.of the ACM,1972,v.15,N 5,p.330-336.

Поступила в ред.-изд. отд.
11 февраля 1983 года