ОДНОРОДНЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ИЗ МИКРО-ЭВМ
(Вычислительные системы)
1983 год Выпуск 97

УДК 681.3.323

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМЫХ МАРКИРОВАНИЙ ДЛЯ АНАЛИЗА СВОЙСТВ СЕТЕЙ ПЕТРИ

Т.Н.Есикова

Сеть Петри это абстрактная модель, отображающая поведение систем в терминах "условия-события". Эта модель применяется для описания сложных систем разной природы (вычислительные процессы, программы, технологические процессы, экономические и биологические системы и т.п.) [1-5,8] и позволяет исследовать работоспособность имитируемой системы, рациональность ее функционирования, а также возможность достижения в процессе развития определенных состояний. При этом на первый план выдвигаются задачи анализа таких свойств сети Петри, как живость, ограниченность, детерминированность, достижимость маркирований и т.д.

Можно выделить два подхода к решению указанных проблем. Первый состоит в исследовании отдельных свойств по структуре сети, в то время, как второй основывается на анализе динамики функционирования.

В настоящее время в рамках первого подхода предложены алгоритм анализа на правильность сетей только для класса сетей свободного выбора [4], алгоритм упрощения исходной сети [5], а также разработано соответствующее програмное обеспечение [6,7].Однако если сеть Петри, полученная в результате редукции исходной,не является сетью свободного выбора, то структурный анализ ее свойств проводить нельзя.

Несмотря на большую вычислительную сложность, второй подход представляет интерес по следующим причинам. Во-первых, он позволяет выявить все основные свойства сети. Во-вторых, он правомерен для любого класса сетей Петри. В-третьих, он предоставляет широкие возможности для диагностики (выявления неограниченных позиций, неживых переходов и т.п.). Все это вместе взятое обусловливает необходимость разработки алгоритмов и программ построения множества достижимых маркирований обобщенной сети Петри.

В статье предлагается алгоритм ключевого перебора, разрабатываемый в рамках второго подхода. В основе алгоритма лежит перебор в определенном порядке последовательностей срабатываний и построение порождаемых ими маркирований.

I. Граф достижимых маркирований и его свойства

Наиболее широким классом сетей Петри являются обобщенные сети. Обобщенная сеть Петри C – это пятерка $C = \langle \Pi, \Sigma, \bullet, F, B \rangle$, где $\Pi = \{p_i\}$ – множество элементов, называемых позициями, $\Sigma = \{t_j\}$ – множество элементов, называемых переходами, $\bullet \subseteq (\Pi \times \Sigma) \cup (\Sigma \times \Pi)$ – отношения между элементами разных типов, $F = \{F(t,p)\}$ – матрица следования, $B = \{B(t,p)\}$ – матрица предшествования.

Отметим, что ${}^{\bullet}t_j$ обозначает множество входных позиций к переходу t_j, $t_j^{\bullet}$ – множество выходных позиций к переходу t_j. Аналогично $p_i^{\bullet}$ – множество выходных переходов к позиции p_i, ${}^{\bullet}p_i$ – множество входных переходов к позиции p_i. Множество строк в матрицах F и B соответствует множеству переходов Σ, множество столбцов – множеству позиций Π, причем:

$$F(t_j,p_i) = \begin{cases} n, & \text{если } p_i \in {}^{\bullet}t_j, \\ 0, & \text{если } p_i \notin {}^{\bullet}t_j; \end{cases}$$

$$B(t_j,p_i) = \begin{cases} n, & \text{если } p_i \in t_j^{\bullet}, \\ 0, & \text{если } p_i \notin t_j^{\bullet}, \end{cases}$$

где n – целое положительное число.

Графическое представление сети Петри (рис.I) является наиболее наглядным. Граф сети Петри это двудольный ориентированный граф. Два типа элементов соответствуют двум типам вершин (позиции изображаются кружочками, переходы – прямоугольниками). Отношения между ними (элементами) представляются дугами. Кратность дуг определяется соответствующими элементами матрицы F или B.

Маркированием $M = (M(p_1), \dots, M(p_l))$ обобщенной сети Петри называется функция $M: \Pi \to N$, где $N = \{0, I, 2, \dots\}$,

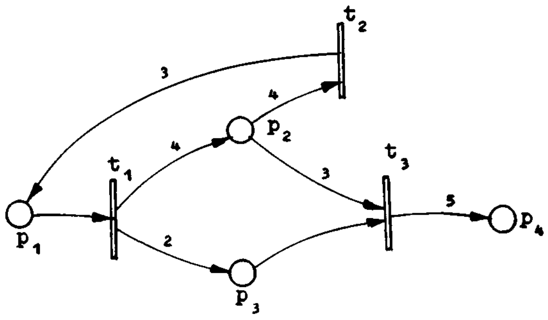

Рис. I

$M(p_i)$ - количество меток (маркеров), сопоставляемое позиции p_i. Если для сети Петри C задано некоторое исходное маркирование M_0, то сеть C называется маркированной, а M_0 - ее начальным маркированием. Например, на рис. I изображена маркированная сеть Петри с начальным маркированием $M_0 = (p_1)$. В дальнейшем все определения будем иллюстрировать на примере данной сети.

Под функционированием сети Петри понимается изменение ее состояний (маркирований), обусловленное срабатыванием возбужденного перехода. Переход t называется в о з б у ж д е н н ы м при маркировании M_i, если во всех входных позициях к данному переходу имеется необходимое количество меток (маркеров):

$$\forall p \in {}^{\bullet}t: \quad M_i(p) \geq F(t,p). \tag{1}$$

С р а б а т ы в а н и е возбужденного перехода t осуществляется посредством изъятия необходимого количества меток (маркеров) из входных позиций и наполнения выходных позиций соответствующим количеством меток (маркеров), таким образом, маркирование M_i изменяется на M_j, что обозначается $M_i[t\rangle M_j$, причем

$$M_j(p) = \begin{cases} M_i(p)-F(t,p) & \text{для} \quad \forall p \in {}^{\bullet}t, \\ M_i(p)+B(t,p) & \text{для} \quad \forall p \in t^{\bullet}, \\ M_i(p) - \text{в остальных случаях.} & \end{cases} \tag{2}$$

Например, $M_0[t_1\rangle M_1$, где $M_0 = (p_1)$, $M_1 = (4p_2, 2p_3)$.

При одном и том же маркировании M_i может быть возбуждено несколько переходов, т.е.

$$\vec{T}(M_i) = \{t \in \Sigma : \forall p \in {}^{\bullet}t \quad M_i(p) \geq F(t,p)\}. \tag{3}$$

Множество $\vec{T}(M_i)$ называется м н о ж е с т в о м в о з б у ж д е н н ы х п е р е х о д о в маркирования M_i. Очевидно, что для сети Петри на рис. I $\vec{T}(M_0) = \{t_1\}$. Если не существует ни одного возбужденного перехода при маркировании M_i, то говорят, что маркирование M_i **мертвое** ($|\vec{T}(M_i)| = 0$). Для функционирования сети Петри необходимо наличие хотя бы одного возбужденного перехода при заданном начальном маркировании M_0. Под **последовательностью срабатываний** $\sigma_i = \{t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_r}\}$, $t_{i_r} \in \Sigma$, понимают такую последовательность переходов, что срабатывание каждого предыдущего перехода ($t_{i_{k-1}}$) порождает такое маркирование, при котором следующий переход t_{i_k} является возбужденным. Так как порядок срабатывания возбужденных переходов не определен и возможны все варианты, то существуют разные последовательности срабатываний $\Sigma^*(M_0)$.

Говорят, что маркирование M' **достижимо** из маркирования M_0, если существует последовательность срабатываний σ_i, посредством реализации которой маркирование сети переходит из M_0 в M': $M_0 [\sigma_i\rangle M'$.

Маркирование M_j называется **предшествующим** для достижимого маркирования M_i, если существует переход $t \in \Sigma$, в результате срабатывания которого маркирование сети M_j порождает маркирование M_i, что записывается следующим образом: $M_j \langle t] M_i$, причем

$$M_j(p) = \begin{cases} M_i(p) - B(t,p), \text{ если } p \in t^{\bullet}, \\ M_i(p) + F(t,p), \text{ если } p \in {}^{\bullet}t, \\ M_i(p) \text{ - в остальных случаях.} \end{cases} \qquad (4)$$

Например, $M' = (p_2, p_3, 5p_4)$ - достижимое мертвое маркирование, причем $\sigma = \{t_1, t_3\}$, а $M'' = (4p_2, 2p_3)$ - предшествующее ему маркирование. Множество переходов, срабатывание каждого из которых порождает достижимое маркирование M_i, будем обозначать через $\overleftarrow{T}(M_i)$.

ЛЕММА 1. *Для любого достижимого маркирования M_i конечной сети Петри $C = \langle \Pi, \Sigma, {}^{\bullet}, F, B \rangle$ и перехода срабатывания $t \in \overleftarrow{T}(M_i)$ можно однозначно определить предшествующее маркирование M_j, породившее данное, и наоборот, по любому предшествующему маркированию M_j и переходу $t \in \vec{T}(M_i)$ можно определить достижимое маркирование M_i.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3) и (4) следует, что если существуют два вектора маркирования M' и M'' такие, что срабатывание одного и того же перехода t приводит к одному и тому же вектору маркирования M, то эти векторы совпадают $M' = M''$. С другой стороны, можно показать и обратное. Если два вектора маркирования различны, $M' \neq M''$, то после срабатывания одного и того же перехода t $(t \in \vec{T}(M') \cap (\vec{T}(M''))$, они порождают разные маркирования.

Множество маркирований $\overset{\Delta}{M}(M_0)$, каждый элемент которого является достижимым маркированием из заданного начального маркирования M_0, называется м н о ж е с т в о м д о с т и ж и м ы х м а р к и р о в а н и й: $\overset{\Delta}{M}(M_0) = \{M: \exists\sigma \quad M_0[\sigma\rangle M\}$. Маркирование M_{i_1} называется ц и к л и ч е с к и м, если для последовательности срабатываний $\sigma_i = \{t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_f}, \ldots, t_{i_1}\}$ и порождаемой ею последовательности маркирований $\mu_i = \{M_{i_1}, M_{i_2}, \ldots, M_{i_f}, \ldots, M_{i_1}\}$ существует f такое, что $t_{i_f} = t_{i_1}$ & $M_{i_f} \leq M_{i_1}$. Причем через $\Delta M_{i,f}$ будем обозначать следующую величину: $\Delta M_{i,f} = M_{i_1} - M_{i_f}$.

Б а з о в о й п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь ю с р а б а т ы в а н и й $\sigma_i^б$ называется конечная последовательность номеров переходов длины l, удовлетворяющая следующим требованиям:

1) $\sigma_i^б \in \Sigma^*(M_0)$,

2) последнее маркирование M_{i_1} последовательности $\mu_i^б$, порожденной $\sigma_i^б$, либо совпадает с начальным, либо мертвое, либо циклическое,

3) последовательность $\mu_i^б$ может иметь только одно циклическое маркирование.

Множество маркирований, порождаемых базовыми последовательностями срабатываний, будем называть б а з о в ы м м н о ж е с т в о м м а р к и р о в а н и й $M^б(M_0)$. Базовое множество маркирований $M^б(M_0)$ рассматриваемой сети Петри состоит из следующих элементов: (p_1), $(4p_2, 2p_3)$, $(3p_1, 2p_3)$, $(2p_1, 4p_2, 6p_3)$, $(p_2, p_3, 5p_4)$, где $M = (2p_1, 4p_2, 6p_3)$ – циклическое, а $M = (p_2, p_3, 5p_4)$ – мертвое маркирования, и $\sigma_1^б = \{t_1, t_2, t_1\}$, $\sigma_2^б = \{t_1, t_3\}$, соответствующие им базовые последовательности срабатываний.

ЛЕММА 2. Д л я о г р а н и ч е н н о й с е т и П е т р и б а з о в о е м н о ж е с т в о м а р к и р о в а н и й р а в н о м н о ж е с т в у д о с т и ж и м ы х м а р к и р о в а н и й.

ЛЕММА 3. Если для любого циклического маркирования M_i сети Петри $C = \langle П, \Sigma, {}^\bullet F, B \rangle$ выполняется условие

$$\vec{T}(M_i) = \vec{T}(M_i + n\Delta M_{f,i}), \qquad (5)$$

где n - целое положительное число, $f < i$, тогда для каждого маркирования $\widetilde{M} \in \overset{\Delta}{M}(M_0)$ в базовом множестве маркирований $M^б(M_0)$ существует маркирование $M^б$, такое, что $M^б \leq \widetilde{M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВа лемм 2 и 3 прямо вытекают из определения базового множества маркирований.

Изменение состояний сети Петри наиболее наглядно можно проиллюстрировать на графе достижимых маркирований $H(M_0) = \langle \overset{\Delta}{M}(M_0), \Sigma, \varphi \rangle$, $\varphi : \Sigma \to E$, $E \subset \overset{\Delta}{M} \times \overset{\Delta}{M}$ (рис.2), в котором вершины соответствуют достижимым из M_0 маркированиям, а дуги - переходам, причем M_i и M_j связаны дугой t, если имеют место (I) и (2). Каждая последовательность срабатываний σ_i интерпретируется последовательностью дуг одного из путей графа $H(M_0)$. В свою очередь, последовательность вершин на этом же пути $\mu_i = \beta(\sigma_i)$ называется последовательностью маркирований μ_i, порожденной σ_i, причем $\beta: \overset{\Delta}{M}(M_0) \to \Sigma^*(M_0)$, где $\overset{\Delta}{M}(M_0) = \{\mu_i\}$.

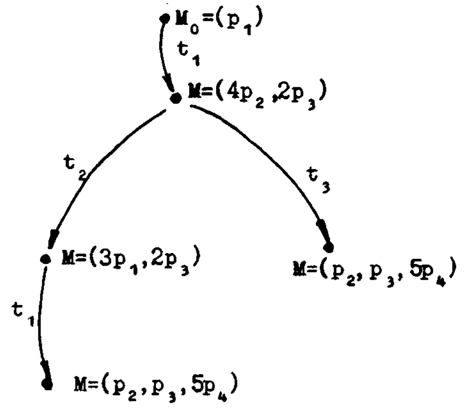

Рис. 2

Очевидно, что свойства сетей Петри могут быть легко интерпретированы применительно к путям и вершинам графа $H(M_0)$, и наоборот. Вершины графа $H(M_0)$ с нулевой полустепенью выхода соответствуют мертвым достижимым маркированиям сети Петри.

Последовательность срабатываний σ_i, порождающая мертвое маркирование M_j, называется финальной последовательностью срабатываний. На графе достижимых маркирований ей соответствует незамкнутый путь, исходящий из вершины M_0. Если все непустые последовательности срабатываний $\sigma_i \in \Sigma^*(M_0)$ такие, что либо они финальные и порождают единственное конечное (мертвое) маркирование, либо приводят к начальному маркированию M_0, то сеть д е т е р м и н и р о в а н а. Другими словами, либо все пути графа $H(M_0)$ сходятся в одной вершине с нулевой полустепенью исхода, либо граф сильносвязный.

Позиция p называется k-ограниченной при заданном начальном маркировании M_0, если для каждого маркирования M' достижимого из M_0, максимальное количество меток (маркеров), которое может появиться в данной позиции не превышает k: $M(p) \leq k$. Если для всех позиций выполнено это условие, то говорят, что сеть k - о г р а н и ч е н н а я. При $k = 1$ сеть называют б е з о п а с н о й. Если ограничений на количество меток (маркеров) в некоторой позиции нет ($M(p) = +\infty$), то сеть Петри, включающую такие позиции, называют н е о г р а н и ч е н н о й. (На рис.I изображена неограниченная сеть.)

ЛЕММА 4. Е с л и д л я с е т и П е т р и $C = \langle \Pi, \Sigma, \cdot, F, B \rangle$ с н а ч а л ь н ы м м а р к и р о в а н и е м M_0 с у щ е с т в у ю т п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь с р а б а т ы в а н и й σ_i ($\sigma_i = \{t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_f}, \dots, t_{i_l}\}$) и п о р о ж д а е м а я е ю п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь м а р к и р о в а н и й $\mu_i = \beta(\sigma_i)$ ($\mu_i = \{M_{i_1}, \dots, M_{i_f}, \dots, M_{i_l}\}$) т а к и е, ч т о $t_{i_f} = t_{i_l}$ & $M_{i_f} \leq M_{i_l}$, т о с е т ь н е о г р а н и ч е н н а я.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что подпоследовательность срабатываний $\sigma_i = \{t_{i_f}, t_{i_{f+1}}, \dots, t_{i_{l-1}}\}$ является циклической, т.е. существует ψ такое, что $t_{i_f} = t_{i_l} = t_{i_\psi}$, $\psi > l > f$ & $M_{i_f} \leq M_{i_l} \leq M_{i_\psi}$, и может срабатывать бесконечное число раз. Из (3) вытекает, что количество меток в позициях $p \in {}^\bullet t_{i_f}$ будет неограниченно возрастать.

Лемма 4 определяет достаточное условие неограниченности сетей Петри, использование которого может быть продуктивно в вычислительных алгоритмах. Ибо в отличие от необходимого условия, сформулированного, в частности в [8], сравниваются не все маркирования, порождаемые последовательностью срабатываний, а только маркирования, порождаемые срабатыванием одного и того же перехода.

Сеть Петри называется **ж и в о й**, если все ее переходы являются живыми. Всего выделяют пять уровней живости переходов [8]. В рамках данной работы мы остановимся на трех уровнях живости. Переход t называется **живым уровня 0** при маркировании M_0, если данный переход не возбужден ни при каком маркировании $M \in \overset{\Delta}{M}(M_0)$: $\forall \sigma_i \in \Sigma^*(M_0)\ t \notin \sigma_i$. Переход t называется **живым уровня I**, если он возбужден хотя бы при одном маркировании M', достижимом из M_0. Переход t называется **живым уровня 4**, если для любого маркирования M', достижимого из M_0, существует последовательность срабатываний, в которой он участвует.

ЛЕММА 5. **Если переход является живым уровня I и граф достижимых маркирований $H(M_0)$ сильносвязный, то переход t живой уровня 4** (достаточное условие живости 4-го уровня).

2. Алгоритм ключевого перебора

Существует два подхода к построению множества (графа) достижимых маркирований в зависимости от того, в какой последовательности выбираются маркирования для анализа: по ширине или по глубине графа. Этим двум подходам можно сопоставить соответственно два алгоритма: прямого и ключевого перебора.

Алгоритм прямого перебора основывается на просмотре (переборе) элементов формируемого множества $\widetilde{M}(M_0)$ в порядке, соответствующем расстоянию вершин от M_0, расширяя его на каждом шаге за счет включения всех маркирований, порождаемых рассматриваемым. Этот алгоритм очевиден и прост для понимания и используется для теоретических обоснований [4,8].

В предлагаемом нами алгоритме ключевого перебора формирование множества достижимых маркирований происходит по мере движения в прямом и обратном направлении от вершины M_0 по путям графа $H(M_0)$, обеспечивая одновременно перебор всех последовательностей срабатываний.

При одинаковой сложности алгоритм ключевого перебора по сравнению с алгоритмом прямого перебора имеет следующие преимущества: I) позволяет решить вопрос об ограниченности/неограниченности сети (на основе леммы 4); 2) предоставляет возможность анализа отдельных последовательностей срабатываний; 3) позволяет определить не только живые переходы уровня 0 и I, но и переходы уровня 4 (лемма 5).

Ключевой последовательностью переходов $\sigma^k = \{t_{k_1}, t_{k_2}, \ldots, t_{k_l}\}$ будем называть последовательность срабатываний переходов, которая строится в соответствии со следующим алгоритмом.

Начальная установка: $\overset{\Delta}{M}(M_0) = \emptyset$, $l = |\sigma^k|$ - текущая длина ключевой последовательности σ^k, $l = 0$, $M_l = M_0$, $\tilde{T}(M_l) = \vec{T}(M_0)$. В общем случае $\vec{T}(M_l) = \bar{T}(M_l) \cup \tilde{T}(M_l)$, где $\bar{T}(M_l)$ и $\tilde{T}(M_l)$ это соответственно множества проанализированных и непроанализированных возбужденных переходов, а именно если $t \in \vec{T}(M_l)$ включен в σ^k, то $\bar{T}(M_l) = \bar{T}(M_l) \cup t$, $\tilde{T}(M_l) = \tilde{T}(M_l) \setminus t$.

ШАГ I. Если $l = 0$ & $|\tilde{T}(M_l)| = 0$, то конец алгоритма, если $l = 0$ & $|\tilde{T}(M_l)| \neq 0$, то шаг 2, если $l \neq 0$ & $|\tilde{T}(M_l)| \neq 0$, то шаг 2, если $l \neq 0$ & $|\tilde{T}(M_l)| = 0$, то шаг 4.

ШАГ 2 (прямое движение по направленному пути $H(M_0)$). Выбрать t_j такое, что j min по всем $t \in \tilde{T}(M_l)$, построить порождаемое им маркирование $M_l[t_j\rangle M_{l+1}$, удалить t_j из множества непроанализированных переходов, $\tilde{T}(M_l) = \tilde{T}(M_l) \setminus t_j$, "нарастить" последовательность $\sigma^k = \{t_{k_1}, \ldots, t_{k_l}\}$ на выбранный переход t_j, а именно $\sigma^k = \{t_{k_1}, \ldots, t_{k_l}, t_{k_{l+1}}\}$, где $t_{k_{l+1}} = t_j$, $l = l+1$, перейти на шаг 3.

ШАГ 3. Если M_l - мертвое, или $M_l \in \overset{\Delta}{M}(M_l)$, или для M_l выполняется условие леммы 4, то шаг 4, в противном случае перейти на шаг I.

ШАГ 4 (обратное движение по направленному пути графа $H(M_0)$). Восстановить предшествующее маркирование по последнему элементу последовательности σ^k: $M_l\langle t_{k_l}]M_{l-1}$, уменьшить размерность σ^k на единицу, удалив ее последний элемент $\sigma^k = \{t_{k_1}, \ldots, t_{k_{l-1}}\}$, $l = l-1$, перейти на шаг I.

Таким образом построенную последовательность срабатываний будем называть ключевой, ибо она является в алгоритме ключем для построения предшествующего маркирования, для анализа сети на неограниченность, для построения очередной последовательности срабатываний.

ЛЕММА 6. Если $\sigma^k = \{t_{k_1}, \ldots, t_{k_m}, \ldots, t_{k_l}\}$ - ключевая последовательность, то тогда а) $\sigma^k \in \Sigma^*(M_0)$,

б) если существует последовательность срабатываний $\sigma_i \in \Sigma^*(M_0)$, $\sigma_i = \{t_{i_1}, \dots, \dots, t_{i_n}, \dots, t_{i_m}\}$ такая, что $i_n \le k_n$ для всех $n \in \{0, 1, \dots, l-1\}$, то $\sigma_i = \sigma^l$ $(l < k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

а) Действительно, прямое движение по ключевой последовательности переходов σ^k каждый раз приводит к построению очередной последовательности срабатываний, ибо правила ее построения полностью отвечают принципам построения последовательностей срабатываний. Лемма I гарантирует правомерность и обратного движения по ключевой последовательности.

б) Доказательство второго положения будем проводить методом от противного. Пусть данная последовательность σ_i действительно была построена ранее, однако существует n, такое что $i_n > k_n$. Это возможно в двух случаях: либо при прямом движении по ключевой последовательности σ^k на ранней итерации был выбран переход с неминимальным номером, либо при обратном движении по ключевой последовательность получили маркирование, не совпавшее с предшествующим маркированием. Первое противоречит правилам построения ключевой последовательности (шаг 3), а второе находится в противоречии с утверждением леммы I.

Построение ключевой последовательности является составной частью алгоритма ключевого перебора. Заметим, что для любого маркирования $M_i \in \mu$ по данной ключевой последовательности σ^k можно однозначно определить множества проанализированных $\bar{T}(M_i)$ и непроанализированных $\tilde{T}(M_i)$ возбужденных переходов маркирования M_i.

Алгоритм ключевого перебора работает следующим образом.

Начальная установка: $C = \langle \Pi, \Sigma, *, F, B \rangle$ - сеть Петри, $\Pi = \{p_i\}$, $i = \overline{1,m}$, $\Sigma = \{t_j\}$, $j = \overline{1,n}$; M_0 - начальное маркирование, $\tilde{M}(M_0)$ - формируемое множество маркирований, $|\sigma^k| = 0$, $|\tilde{M}(M_0)| = 0$, $l = 0$, $M_l = M_0$, $|\tilde{\Sigma}(M_0)| = 0$, где $\tilde{\Sigma}(M_0)$ - множество живых переходов уровня I, $\tilde{T}(M_0) = \vec{T}(M_0)$.

ШАГ I. Если $M_l \in \tilde{M}(M_l)$, то перейти на шаг 5. Если $M_l \notin \tilde{M}(M_l)$, то расширить формируемое множество маркирований $\tilde{M}(M_0) = \tilde{M}(M_l) \cup \cup \{M_l\}$.

ШАГ 2. Если $\tilde{T}(M_l) = \emptyset$, то перейти на шаг 4. Если $\tilde{T}(M_l) \ne \ne \emptyset$, то необходимо выбрать t_j, в котором j min по всем

$t \in \tilde{T}(M_l)$; построить маркирование M_{l+1} , порождаемое срабатыванием данного перехода t_j , $M_l[t_j\rangle M_{l+1}$; нарастить ключевую последовательность переходов σ^k на $t_j: \sigma^k = \{t_{k_1}, \ldots, t_{k_l}, t_{k_{l+1}}\}, t_{k_{l+1}} = t_j$, $l = l + 1$, удалить t_j из множества $\tilde{T}(M_l)$, $\tilde{T}(M_l) = \tilde{T}(M_l) \setminus t_j$; расширить множество живых переходов уровня I $\tilde{\Sigma}(M_0) = \tilde{\Sigma}(M_0) \cup t_j$.

ШАГ 3. Если для M_l не выполняется условие леммы 4, то перейти на шаг I, в противном случае перейти на шаг 5.

ШАГ 4. Если $M_l = M_0$ и $|\sigma^k| = 0$, т.е. все возможные последовательности срабатываний и порождаемые ими маркирования построены, тогда перейти на шаг 6. Если $|\sigma^k| \neq 0$, то перейти на шаг 5.

ШАГ 5. По последнему элементу ключевой последовательности σ^k восстановить предшествующее маркирование M_{l-1}: $M_l \langle t_{k_l}] M_{l-1}$; откорректировать ключевую последовательность переходов σ^k, удалив последний ее элемент $l = l-1$, перейти на шаг 2.

ШАГ 6. Конец алгоритма.

Если $\tilde{\Sigma}(M_0) \cap \Sigma = \emptyset$, то исследуемая сеть Петри является живой уровня I. В противном случае сеть неживая. Причем переход t' является живым уровня 0, если $t' \in \Sigma \cap \tilde{\Sigma}(M_0)$, а переход $t'' \in \tilde{\Sigma}(M_0)$ является живым уровня I.

Блок-схема алгоритма ключевого перебора приведена на рис. 3. Доказательство того, что алгоритм дает базовое множество достижимых маркирований и является конечным, приводится в следующей теореме.

ТЕОРЕМА I. *Для конечной сети Петри* $C = \langle \Pi, \Sigma, {}^{\bullet}, F, B \rangle$; а) *построенное по алгоритму ключевого перебора множество маркирований* $\tilde{M}(M_0)$ *равно базовому множеству маркирований* $M^б(M_0)$, б) *если сеть ограничена, то* $\tilde{M}(M_0)$ *равно множеству достижимых маркирований* $\hat{M}(M_0)$, в) *алгоритм ключевого перебора является конечным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

а) На основании леммы I и леммы 6; видно, что построение каждого элемента множества $\tilde{M}(M_0)$ проводилось в полном соответствии с основными свойствами и принципами функционирования сети Петри. Каждое маркирование порождалось достижимым маркированием в результате срабатывания одного из возбужденных переходов. Кроме того,

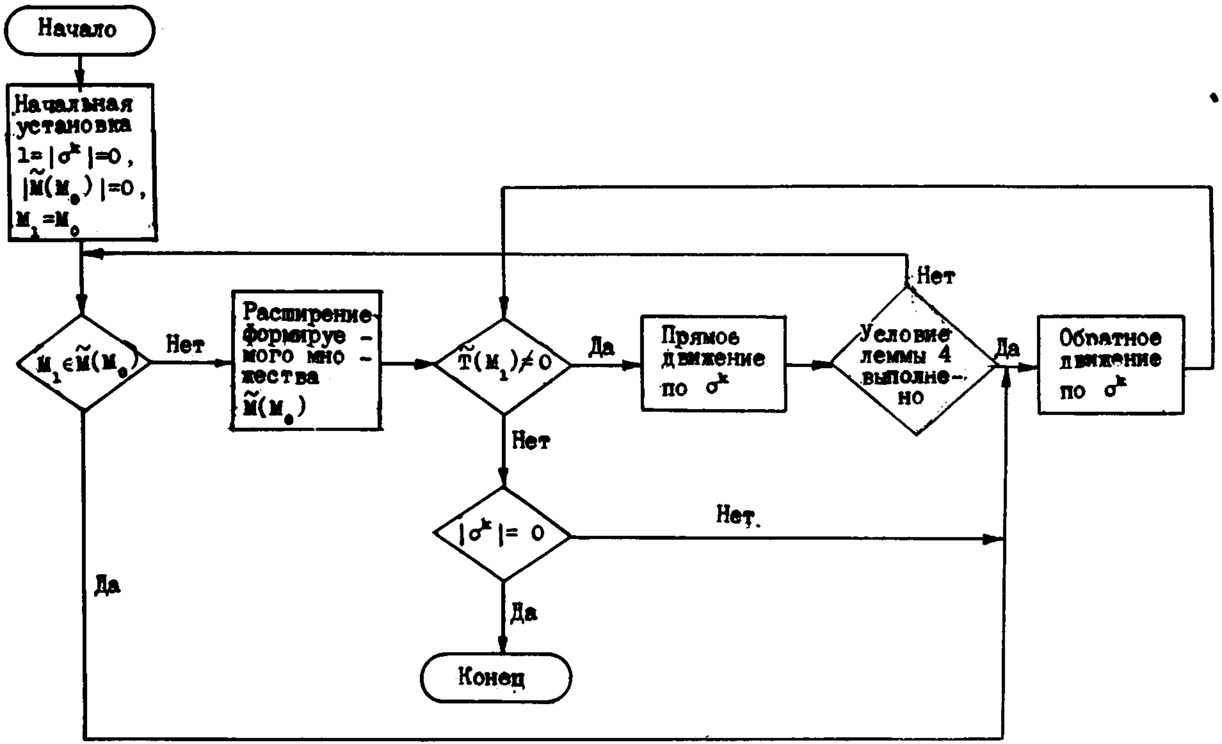

Рис.3. Блок-схема алгоритма ключевого перебора.

правила построения ключевой последовательности срабатываний обеспечивают формирование базовых последовательностей. Тогда все элементы $\tilde{M}(M_0)$ принадлежат множеству $M^б(M_0)$, ибо это достижимые маркирования, порождаемые базовыми последовательностями переходов.

Можно показать и обратное - каждое маркирование $M^б \in M^б(M_0)$ будет построено в результате реализации алгоритма ключевого перебора $M^б \in \tilde{M}(M_0)$. Пусть $M^б \in M^б(M_0)$, тогда по определению базового множества маркирований существует последовательность срабатываний $\sigma_i^б = \{t_{i_1}^б, t_{i_2}^б, \ldots, t_{i_n}^б\}$, такая что $M_0[\sigma_i^б\rangle M^б$. Правила построения ключевой последовательности, реализованные в алгоритме, обуславливают то, что на некоторой итерации алгоритма, построенная ключевая последовательность σ^k полностью совпадает с $\sigma_i^б$ (лемма 6). Другими словами, для M_0 выбранное на шаге 2 $t_{k_1} = t_j$ совпадает с $t_{i_1}^б$, для M_1 с $t_{i_2}^б$ и т.д.: $M_0[t_{i_1}^б\rangle M_1, M_1[t_{i_2}^б\rangle M_2, \ldots$ $\ldots, M_{n-1}[t_{i_n}^б\rangle M^б$. Следовательно, маркирование $M^б \in \tilde{M}(M_0)$.

б) Так как $\tilde{M}(M_0) = M^б(M_0)$, то для ограниченных сетей по лемме 6 $\tilde{M}(M_0) = \hat{M}(M_0)$.

в) Конечность алгоритма вытекает для ограниченных сетей из ограниченности и конечности самой сети, так как в этом случае множество достижимых маркирований конечно. Для неограниченных сетей Петри характерно наличие бесконечных последовательностей срабатываний, обуславливающих неограниченность множества достижимых маркирований. Однако в алгоритме предусмотрен анализ структуры формируемой ключевой последовательности и соответствующих им маркирований (условия леммы 4). Это позволяет однозначно выявлять неограниченные последовательности и исключать из рассмотрения маркирования, порождаемые бесконечным повторением некоторых подпоследовательностей срабатываний переходов, что и определяет конечность алгоритма ключевого перебора для неограниченных сетей.

Построим базовое множество маркирований $M^б(M_0)$ сети Петри на рис. I, используя алгоритм ключевого перебора. Начальная установка алгоритма в данном случае следующая: $M_0 = (p_1)$, $1 = 0$, $|\tilde{M}(M_0)| = 0$, $|\sigma^k| = 0$, $|\tilde{\Sigma}(M_0)| = 0$, $\bar{T}(M_0) = T(M_0)$.

ШАГ I. Поскольку $M_0 \notin \tilde{M}(M_0)$, то необходимо включить данное маркирование в формируемое множество $\tilde{M}(M_0)$, тогда $\tilde{M}(M_0) = \{(p_1)\}$.

ШАГ 2. Возьмем $t_j = t_1$, так как $\tilde{T}(M_0) = \{t_1\}$. Построим маркирование $M = (4p_2, 2p_3)$, порождаемое срабатыванием перехода t_1 и "нарастим" ключевую последовательность σ^k на $t_{k_1} = t_1$, т.е. $\sigma^k = \{t_1\}$.

ШАГ 3. Достаточное условие неограниченности сети не выполняется, следовательно,необходимо продолжить прямое движение по ключевой последовательности переходов σ^k.

ШАГ I. $\tilde{M}(M_0) = \{(p_1), (4p_2, 2p_3)\}$.

ШАГ 2. Так как $\tilde{T}(M = (4p_2, 2p_3)) = \{t_2, t_3\}$,то по $t_j = t_2$ строим порождаемое им маркирование $M = (3p_1, 2p_3)$, а $\sigma^k = \{t_1, t_2\}$.

ШАГ 3. Достаточное условие неограниченности не выполнено.

ШАГ I. $M(M_0) = \{(p_1), (4p_2, 2p_3), (3p_1, 2p_3)\}$.

ШАГ 2. $t_j = t_1$, ибо $\tilde{T}(M \doteq (3p_1, 2p_3)) = \{t_1\}$, следовательно, $\sigma^k = \{t_1, t_2, t_1\}$ и $(3p_1, 2p_3)[t_1\rangle(2p_1, 4p_2, 6p_3)$.

ШАГ 3. Сеть Петри на рис.I неограниченна,ибо выполняется достаточное условие неограниченности сетей. Начинаем обратное движение по σ^k.

ШАГ 5. Восстановив предшествующее маркирование и откорректировав ключевую последовательность переходов σ^k, получаем $l = 2$, $\sigma^k = \{t_1, t_2\}$, $M = (2p_1, 4p_2, 6p_3) \langle t_1] (3p_1, 2p_3)$.

ШАГ 2. $\tilde{T}(M = (3p_1, 2p_3)) = \{t_1\} \setminus \{t_1\}$, следовательно,построены все маркирования,достижимые из $(3p_1, 2p_3)$, ибо $|\tilde{T}(H)| = 0$.

ШАГ 4. Продолжаем обратное движение по ключевой последовательности переходов σ^k, так как $|\sigma^k| \neq 0$.

Выполнив алгоритм до конца получим $\tilde{M}(M_0) = \{(p_1), (4p_2, 2p_3), (3p_1, 2p_3), (2p_1, 4p_2, 6p_3), (p_2, p_3, 5p_4)\}$.

3. Заключение

Программное обеспечение алгоритма ключевого перебора было написано на языке PL/1 с операционной системой OS/ES версии 6.I.В языке было выбрано представление сети Петри в виде двух матриц: следования и предшествования. Ограничения на размерность сети не накладывались. Ввод сети любого класса (обобщенных или ординарных) предусмотрен либо в виде списков, либо в виде цепочек. Исходя из ограниченности оперативных запоминающих устройств, при написании программы было принято решение хранить достижимые маркирования на внешних запоминающих устройствах, а именно на магнитном диске. В оперативной памяти содержатся только представители достижимых маркирований - образы,с которыми и ведется основная работа.Непосредственное сравнение маркирований проводится только при коллизиях (совпадении) образов. Для получения образа была выбрана функция P: $M \to N$ (N - натуральное число), сопоставляющая каждому достижимому маркированию цифровой образ.Построение функции P может основываться на методах, аналогичных используемым. при построении хеш-функций. В данном варианте программы образ маркирования вычисляется суммированием всех элементов маркирования с некоторыми весами при помощи поразрядного сложения по модулю два. Вес каждого ненулевого элемента (позиции) маркирования зависит от его порядкового номера. В оперативной памяти программа занимает около I30 Кб, за вычетом памяти, необходимой для динамического размещения сети Петри и вектора начального маркирования. Рассматриваемый вариант программы рассчитан на хранение 8000 образов. Максимальная размерность ключевой последовательности ограничена 2000 элементами.

Сложность алгоритма ключевого перебора прямо пропорциональна размерности множества достижимых маркирований для ограниченных сетей Петри - $T_a D$, где $D = |\overset{\Delta}{M}(M_0)|$, T_a - время поиска одного маркирования. Для неограниченных сетей Петри сложность возрастает в связи с существованием циклических последовательностей срабатываний $T_a D + k n_ц$, где k - общее число последовательностей сраба-

Таблица

Результаты экспериментальных расчетов

Сеть Петри			Результаты расчетов			
Максимальная кратность дуг	Количество позиций	Количество переходов	Установлена ограниченность (ОГР)/ неограниченность (НЕОГР)	Число маркирований: Всего	Число маркирований: В т.ч. мертвых	Время ЦП с распечаткой всех маркирован. (сек.)
6	6	5	ОГР	27	3	45
7	6	6	НЕОГР	5I	I	49
I	6	5	НЕОГР	20	0	43
I	6	5	ОГР	8	2	4I
I	28	30	ОГР	I40	4I	78
300	28	30	ОГР	27I8	I07	24 мин

тываний, включая циклические, $n_ц$ - средняя размерность циклических подпоследовательностей.

Программа была апробирована на ЭВМ ЕС-1033. Результаты экспериментальных расчетов приведены в таблице. Эффективность работы программы для сетей большой размерности можно повысить за счет реализации ряда модулей на ассемблере, использования более рациональных алгоритмов поиска и сортировки, выбора функции Р, дающей минимальное число коллизий.

Литература

1. PETRI C.A. Communition with Automata.- A supplement to Technical documentary. AF602-3364, Report N 1,1965.- 89 p.

2. БАНДМАН О.Л. Синтез асинхронного управления параллельными процессами. -Кибернетика, 1980, №1, с. 42-47.

3. КОТОВ В.Е. Алгебра сетей Петри. - Кибернетика, 1981, №6, с. 10-18.

4. HACK M. Analysis of production schemata by Petri-nets. - MAC TR-94, Project MAC, MIT, February 1972.- 119 p.
Errata: HACK M. Correction to analysis of production schemata by Petri-nets.- Computation structure. Note 17, Project MAC, MIT, June 1974. - 11 p.

5. BERTHELOT G., ROUCAIROL G. Reduction of Petri-nets.-Lecture Notes in Computer Sciences,1976,N 45,p.202-209.

6. АНИШЕВ П.А. Один способ анализа корректности граф-схем алгоритмов. -Программирование, 1981, №1, с. 20-28.

7. АНИШЕВ П.А. Редукция сетей Петри. -В кн.: Архитектура вычислительных систем с программируемой структурой (Вычислительные системы, вып. 82). Новосибирск, 1980, с.41-54.

8. PETERSON J. Petri net theory and the modeling of systems. - The University of Texas at Austin, Prentice-Hall,INC,Englewood Cliffs,N.J. 07632,1983. - 290 p.

Поступила в ред.-изд.отд.
29 августа 1983 года