

УДК 681.324

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУР ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ
КОМБИНАТОРНО-ГРУППОВЫМИ МЕТОДАМИ

И.Т.Скибенко, Н.М.Селимов

Важной задачей, требующей решения на начальном этапе проектирования вычислительной системы (ВС), является выбор ее оптимальной структуры [1,2]. Один из возможных подходов к решению этой задачи состоит в построении множества возможных вариантов структуры ВС для выбранной топологии внутренних связей и заданного состава функциональных модулей [1] и выборе из этого множества варианта, максимально отвечающего принятым критериям качества. Среди всех возможных вариантов структуры проектируемой ВС значительную часть составляют варианты, подобные друг другу в смысле заданного отношения эквивалентности. Поэтому эффективность предлагаемого подхода к исследованию структур систем в большей степени зависит от возможности строить неэквивалентные варианты структуры. При этом возникает задача определения числа всех неэквивалентных вариантов структуры ВС при заданном на множестве вариантов отношении эквивалентности.

В настоящей работе дана постановка последней задачи и рассмотрено ее решение при помощи теории перечисления Поля [3-5].

1. Постановка задачи. Пусть топология внутренних связей ВС описана графом $G = (V, E)$, вершины $v_i \in V$, $i = 1, \dots, p$, которого соответствуют функциональным модулям ВС, а ребра $e_j \in E$, $j = 1, \dots, d$, - связям между ними. Пусть $R = \{r_1, r_2, \dots, r_q\}$ - множество модулей (состав технических средств), из которых проектируется ВС. Тогда отображение $f: V \rightarrow R$ определяет некоторый вариант $\alpha = (G, f)$ структуры ВС с конкретным составом $R_f = \{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_p)\}$, $R_f \subseteq R$, и топологией G . Мощность множества S всех вариантов структуры ВС равна $|S| = |R|^{|V|} = q^p$. Пусть отно -

шение эквивалентности на множестве S задано группой $\Gamma(G)$ графа G . Тогда группа $\Gamma(G)$ разбивает множество вариантов S на классы эквивалентности, число которых совпадает с числом неэквивалентных вариантов структуры. Требуется найти число всех неэквивалентных вариантов структуры ВС и число неэквивалентных вариантов с определенным составом R_2 .

Для перечисления неэквивалентных вариантов структуры ВС необходимо определить комбинаторно-групповые свойства топологии G , а именно найти ее группу $\Gamma(G)$ автоморфизмов и соответствующий группе цикловой индекс $Z(\Gamma(G))$.

2. Комбинаторно-групповое описание структур ВС. В практике проектирования ВС различают следующие типы топологии внутренних связей [1,2]: симметричная, радиальная, древовидная, магистральная, матричная, кольцевая, радиально-кольцевая и итеративная. Конкретная топология выбирается на основе анализа перечисленных типов и учета различных факторов.

Рассмотрим каждый из указанных выше видов топологии и найдем для них группу $\Gamma(G_p)$ и формулу (или процедуру), по которой вычисляется цикловой индекс $Z(\Gamma(G_p))$ (для простоты далее будем писать $Z(G_p)$).

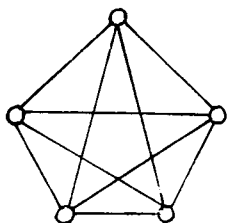


Рис.1

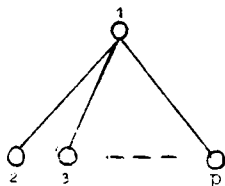


Рис.2

Симметричная топология внутренних связей (рис. 1) обеспечивает соединение каждого модуля с каждым другим модулем. Группой симметричной топологии G_p является симметрическая группа S_p степени

p , т.е. $\Gamma(G_p) = S_p$. Цикловой индекс симметрической группы вычисляется по формуле [3]:

$$Z(S_p) = \frac{1}{p!} \sum_{(j)} \frac{p!}{\prod_k k^{j_k} j_k!} \cdot \prod_{k=1}^p t_k^{j_k}, \quad (1)$$

где сумма берется по всем разбиениям (j) числа p таким, что $j_1 + 2j_2 + \dots + pj_p = p$.

Радиальная топология внутренних связей (рис. 2) наиболее часто используется при проектировании ВС с централизованным способом управления. Группа радиальной топологии G_P равна сумме тождественной E_1 и симметрической S_{P-1} групп: $\Gamma(G_P) = E_1 + S_{P-1}$. Цикловой индекс суммы $A+B$ групп подстановок A и B равен:

$$Z(A+B) = Z(A) \cdot Z(B). \quad (2)$$

В данном случае имеем:

$$Z(E_1 + S_{P-1}) = Z(E_1) \cdot Z(S_{P-1}) = t_1 \cdot Z(S_{P-1}), \quad (3)$$

где $Z(S_{P-1})$ определяется по формуле (I).

Древовидная топология внутренних связей (рис. 3) является естественным развитием радиальной топологии и используется во многих сложных ВС иерархической структуры. Группы m -уров-

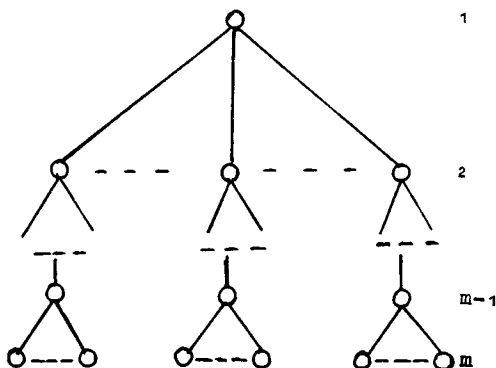


Рис. 3

невой древовидной топологии $T^{(n)}$ можно записать по индукции с помощью операций суммы и композиции:

$$\Gamma(T^{(n)}) = E_1^{(1)} + S_{n_1(2)}[\Gamma(T_1^{(n-1)})] + \dots + S_{n_{1_1}(2)}[\Gamma(T_{1_1}^{(n-1)})],$$

$$\Gamma(T_{1_1}^{(n-1)}) = E_1^{(2)} + S_{n_{1_1}(3)}[\Gamma(T_{1_1 1_1}^{(n-2)})] + \dots + S_{n_{1_1 1_2}(3)}[\Gamma(T_{1_1 1_2}^{(n-2)})],$$

$$\Gamma(T_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}^{(m-k+1)}) = E_1^{(k)} + S_{n_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} 1}}^{(k+1)} [\Gamma(T_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} 1}^{(m-k)})] + \dots \\ \dots + S_{n_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_k}}^{(k+1)} [\Gamma(T_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_k}^{(m-k)})],$$

$$\Gamma(T_{i_1 i_2 \dots i_{m-3}}^{(3)}) = E_1^{(m-2)} + S_{n_{i_1 i_2 \dots i_{m-3} 1}}^{(m-1)} [\Gamma(T_{i_1 i_2 \dots i_{m-3} 1}^{(2)})] + \dots \\ \dots + S_{n_{i_1 i_2 \dots i_{m-3} i_{m-2}}}^{(m-1)} [\Gamma(T_{i_1 i_2 \dots i_{m-3} i_{m-2}}^{(2)})],$$

$$\Gamma(T_{i_1 i_2 \dots i_{m-3} i_{m-2}}^{(2)}) = E_1^{(m-1)} + S_{n_{i_1 i_2 \dots i_{m-3} i_{m-2}}}^{(m)},$$

где $E_1^{(k)}$ - тождественная группа, действующая на одной вершине k -го уровня; $S_{n_{i_1 \dots i_k}}^{(k+1)} [\Gamma(T_{i_1 \dots i_k}^{(m-k)})]$ - композиция симметрической

группы $S_{n_{i_1 \dots i_k}}^{(k+1)}$ относительно группы $\Gamma(T_{i_1 \dots i_k}^{(m-k)})$ поддерева

$T_{i_1 \dots i_k}^{(m-k)}$, содержащего $(m-k)$ уровней; $n_{i_1 \dots i_k}^{(k+1)}$ - число вершин $(k+1)$ -го уровня, которые подчиняются одной и той же вершине k -го уровня и могут переставляться между собой. Например, группа $\Gamma(T^{(3)})$ трехуровневой древовидной топологии имеет вид:

$$\Gamma(T^{(3)}) = E_1^{(1)} + S_{n_1}^{(2)} [E_1^{(2)} + S_{n_1}^{(3)}] + \dots + S_{n_k}^{(2)} [E_1^{(2)} + S_{n_k}^{(3)}].$$

Цикловой индекс $Z(A[B])$ композиции $A[B]$ групп подстановок A и B получается из $Z(A)$ подстановкой в него вместо каждой переменной t_k циклового индекса $Z(B; t_k, t_{2k}, t_{3k}, \dots)$. Эту процедуру часто обозначают так:

$$Z(A[B]) = Z(A)[Z(B)]. \quad (4)$$

Тогда цикловой индекс группы $\Gamma(T^{(n)})$ можно найти, комбинируя формулы (2) и (4). Например, цикловой индекс группы $\Gamma(T^{(3)})$ равен:

$$Z(T^{(3)}) = t_1 \cdot Z(S_{n_1}^{(2)}) [t_1 \cdot Z(S_{n_1}^{(3)})] \dots Z(S_{n_k}^{(2)}) [t_1 \cdot Z(S_{n_k}^{(3)})],$$

где $Z(S_{n_i}^{(i)})$ вычисляется по формуле (I).

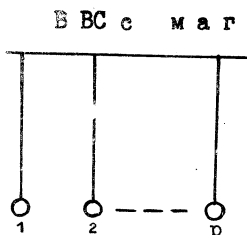


Рис. 4

В ВС с магистральной топологией (рис. 4) все участвующие в обмене модули используют общие средства связи (магистраль). Для магистральной топологии рассмотрим два случая.

1) Магистраль ВС является фиксированным независимым элементом структуры и состав R магистралей не содержит. Тогда магистральная структура по своим комбинаторно-групповым свойствам напоминает симметричную структуру и имеет группу $\Gamma(G_p) = S_p$. Цикловой индекс группы определяется по формуле (I).

2) Магистраль системы не является фиксированным элементом структуры и выбирается из состава R . Тогда магистральная структура по своей топологии совпадает с радиальной структурой и описывается группой $\Gamma(G_p) = E_1 + S_{p-1}$. Цикловой индекс группы $\Gamma(G_p)$ вычисляется по формуле (3).

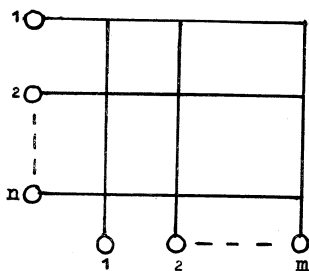


Рис.5

Матричная топология (рис. 5) является развитием магистральной и состоит из нескольких магистралей, которые могут быть совместно использованы многими модулями системы. Рассмотрим случай, когда матрица магистралей задана и состав R магистралей не содержит. В этом случае матричная топология G_p с $p = m+n$ вершинами описывается группой:

$$\Gamma(G_p) = \begin{cases} S_2[S_{p/2}], & m = n, \\ S_m + S_n, & m \neq n. \end{cases}$$

Цикловой индекс композиции $S_2[S_{p/2}]$ находим с помощью процедуры (4):

$$Z(S_2[S_{p/2}]) = \frac{1}{2} [(Z(S_{p/2}))^2 + Z(S_{p/2}; t_2, t_4, \dots, t_p)].$$

Цикловой индекс суммы $S_m + S_n$ получаем по формуле (2)
 $Z(S_m + S_n) = Z(S_m) \cdot Z(S_n).$

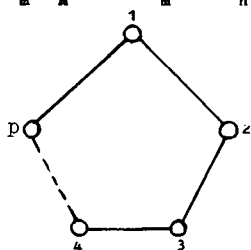


Рис. 6

Кольцевая топология внутренних связей (рис.6) используется при проектировании структур больших ВС, когда необходимо обеспечить достаточно надежную связь при использовании минимального числа соединений. Группой кольцевой топологии G_p является диэдральная группа D_p степени p : $\Gamma(G_p) = D_p$. Цикловой индекс диэдральной группы D_p вычисляется по формуле:

$$Z(D_p) = \frac{1}{2p} \sum_{k|p} \phi(k) t_k^{p/k} + Z_1, \quad (5)$$

$$Z_1 = \begin{cases} \frac{1}{2} t_1 t_2^{(p-2)/2}, & \text{если } p \text{ нечетное,} \\ \frac{1}{4} (t_2^{p/2} + t_1^2 t_2^{(p-2)/2}), & \text{если } p \text{ четное;} \end{cases}$$

$\phi(k)$ - функция Эйлера; k пробегает все делители числа p .

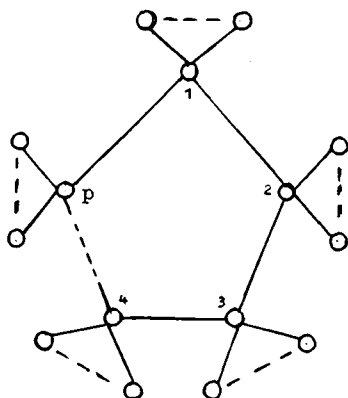


Рис. 7

При радиально-кольцевой топологии ВС центральные управляющие модули радиальных структур соединены в кольцо (рис.7), что обеспечивает ей свойства обеих структур. Группу радиально-кольцевой топологии G_p можно записать в виде следующей суммы композиций: $\Gamma(G_p) = D_{n_1} [E_1 + S_{m_1}] + D_{n_2} [E_1 + S_{m_2}] + \dots + D_{n_k} [E_1 + S_{m_k}]$, где n_1 - число вершин в кольце, которые могут циклически переставляться, а также отражаться друг в друге, сохраняя смежность;

m_i - число вершин, которые подчиняются одной и той же вершине из кольца и могут переставляться между собой. При этом выполняются следующие соотношения:

$$1) \sum_{i=1}^k n_i = n.$$

$$2) \sum_{i=1}^k n_i (1+m_i) = p.$$

3) Все n_i являются делителями числа n .

4) Если все n_i расположить в неубывающем порядке, т.е.

$$n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k, \text{ то частные } \frac{n}{n_1}, \frac{n-n_1}{n_2}, \frac{n-n_1-n_2}{n_3}, \dots, \frac{n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1}}{n_k}$$

являются целыми числами.

5) Если $n_i \geq 3$, то $n_1 = n_2 = \dots = n_k$, причем все вершины из числа n_i располагаются в кольце через $\frac{n}{n_i}$ ребер. Цикловой индекс группы $\Gamma(G_p)$ находим, используя формулы (2) и (4), $Z(G_p) = Z(D_{n_1})[t_1 \cdot Z(S_{m_1})] \cdot \dots \cdot Z(D_{n_k})[t_1 \cdot Z(S_{m_k})]$, где $Z(D_{n_i})$ и $Z(S_{m_i})$ вычисляются по формуле (5) и (I) соответственно.

В частности, при $m_1 = m_2 = \dots = m_k = m$ группа $\Gamma(G_p)$ имеет вид: $\Gamma(G_p) = D_n[E_1 + S_m]$, где $n(1+m) = p$. Соответствующий цикловой индекс равен $Z(G_p) = Z(D_n)[t_1 \cdot Z(S_m)]$.

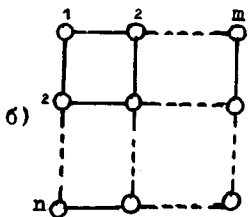
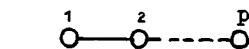


Рис. 8.

При итеративной топологии на внутренние связи наложены ограничения: каждый модуль может иметь связь только с соседним (в одном или нескольких измерениях). Мы рассмотрим одномерную и двумерную итеративные топологии внутренних связей (рис.8).

Одномерная итеративная топология (рис.8, а) имеет группу:

$$\Gamma(G_p) = \begin{cases} S_2[E_{p/2}], & \text{если } p \text{ четное,} \\ E_1 + S_2[E_{(p-1)/2}], & \text{если } p \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Цикловой индекс группы $\Gamma(G_p)$ равен:

$$Z(G_P) = \begin{cases} t_1^p + t_2^{p/2}, & \text{если } p \text{ четное,} \\ t_1^p + t_1 t_2^{(p-1)/2}, & \text{если } p \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Двумерная итеративная топология (рис. 8, б) описывается группой:

$$\Gamma(G_P) = \begin{cases} \Gamma(P_m) \times \Gamma(P_n), & \text{если } m \neq n, \\ [S_m]S_2, & \text{если } m = n, \end{cases}$$

где $\Gamma(P_m)$ и $\Gamma(P_n)$ — группы одномерных итеративных топологий с m и n вершинами соответственно.

Цикловой индекс декартового произведения $\Gamma(P_m) \times \Gamma(P_n)$ можно найти по формуле для вычисления $Z(A \times B)$ при известных $Z(A)$ и $Z(B)$ [3]: $Z(A \times B) = Z(A) \times Z(B)$.

Для вычисления циклового индекса $Z([S_m]S_2)$ можно воспользоваться методом, описанным в [3]. Цикловой индекс $Z([B]A)$ эквивалентности групп A и B может быть представлен как образ циклового индекса $Z(B)$ при воздействии на него оператора $Z(A; J_1, J_2, \dots)$. Для каждого целого $l > 0$ находим $J_l(Z(B))$, т.е. результат воз действия оператора J_l на $Z(B)$. Оператор J_l на одночленах определяется так:

$$J_l\left(\prod_{i=1}^m t_i^{b_i}\right) = \prod_{j=1}^m t_j^{c_j},$$

$$c_j = \frac{1}{j} \sum_{k|j} \mu(j/k) \left(\sum_{1|(k/(1,k))} b_{1,k} \right) i b_{1,k}^{(1,k)}. \quad (6)$$

В выражении (6) внутренняя сумма берется по всем делителям числа $k/(1,k)$, где $(1,k)$ обозначает наибольший общий делитель чисел 1 и k ; внешняя сумма берется по всем делителям числа j ; μ — функция Мёбиуса. Далее оператор J_l по линейному закону распространяется на многочлены. Если теперь в одночленах из выражения $Z(A; J_1(Z(B)), J_2(Z(B)), \dots)$ операции обычного умножения заменить операцией декартового умножения и выполнить необходимые преобразования, то в результате получим искомый цикловой индекс $Z([B]A)$.

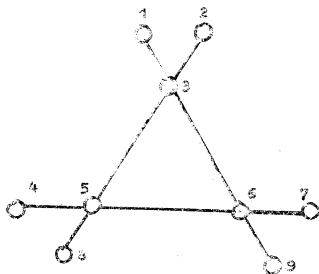


Рис. 9

3. П р и м е р. Пусть для структуры многомашинной ВС выбрана радиально-кольцевая топология $G = (V, E)$ с $|V| = 9$ вершинами, изображенная на рис.9, ребра $e_i \in E$, $i = 1, 9$, которой соответствуют каналам связи. Пусть также задан состав $R = \{r_1, r_2, r_3\}$, содержащий ЭВМ трех типов. Требуется найти:

1) число всех неэквивалентных вариантов структуры ВС для состава R ;

2) число неэквивалентных вариантов структуры с конкретным составом $R_c = \{f(1), f(2), \dots, f(9)\}$, который включает одну ЭВМ типа r_1 , три типа r_2 и пять типа r_3 .

Определяем группу топологии G , которая имеет вид $\Gamma(G) = D_3[E_1 + S_2]$. Вычисляем цикловой индекс группы $\Gamma(G)$:

$$\begin{aligned} Z(D_3[E_1 + S_2]) &= Z(D_3)[t_1 \cdot Z(S_2)] = \frac{1}{6} [(t_1^3 + t_1 t_2)^3 + \\ &+ 3(\frac{1}{2}(t_1^3 + t_1 t_2))(\frac{1}{2}(t_2^3 + t_2 t_4)) + 2(\frac{1}{2}(t_3^3 + t_3 t_6))] = \\ &= \frac{1}{6} (t_1^9 + 3t_1^7 t_2 + 3t_1^5 t_2^2 + 7t_1^3 t_2^3 + 6t_1 t_2^4 + 6t_1^3 t_2 t_4 + \\ &+ 6t_1 t_2^2 t_4 + 8t_3^3 + 8t_3 t_6). \end{aligned} \quad (7)$$

Поставив число $|R| = 3$ вместо каждой переменной в $Z(G)$, находим число всех неэквивалентных вариантов структуры ВС для состава R [3,4]:

$$N = Z(D_3[E_1 + S_2]; 3) = 1140. \quad (8)$$

Таким образом, существует 1140 неэквивалентных вариантов структуры ВС с топологией G и составом R .

Число неэквивалентных вариантов структуры с составом R_c можно получить, вычислив производящую функцию классов эквивалентности [3]. В таблице приведены коэффициенты при слагаемых в производящей функции. Здесь n_1, n_2 и n_3 - показатели степени весов w_1, w_2 и w_3 , входящих в слагаемые, причем $n_3 = |V| - n_1 - n_2$. Неэкви-

Т а б л и ц а

п ₁	п ₂									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	5	9	11	11	9	5	2	1
1	2	7	18	29	35	29	18	7	2	
2	5	18	42	61	61	42	18	5		
3	9	29	61	75	61	29	9			
4	11	35	61	61	35	11				
5	11	29	42	29	11					
6	9	18	18	9						
7	5	7	5							
8	2	2								
9	1									

валентным вариантам структуры с составом R_2 соответствует слагаемое $29w_1w_2^3w_3^5$. Следовательно, существует 29 неэквивалентных вариантов, содержащих одну ЭВМ веса w_1 (типа r_1), три веса w_2 (типа r_2) и пять веса w_3 (типа r_3). Можно усилить эквивалентность вариантов структуры [5], вве-

дя группу на множестве в модулей ВС. Это позволяет уточнить эквивалентность вариантов структуры и уменьшить число типовых (неэквивалентных) вариантов.

Для практического применения теории перечисления разработан пакет программ на языке Фортран-IV для ЕС ЭВМ. Общий объем программного обеспечения составляет около 1400 операторов Фортрана. Результаты (7), (8), а также производящая функция получены на ЭВМ ЕС-1033 в системе ОС: версия 6.1. Время счета составило 1,3 сек, 1,1 сек и 11,3 сек соответственно.

Предложенный подход к исследованию структуры ВС позволяет найти количественные оценки числа типовых вариантов структуры, что позволяет значительно уменьшить объем перебора при генерации вариантов структуры на основе методов случайного поиска и дискретной оптимизации.

Л и т е р а т у р а

1. Мультипроцессорные системы и параллельные вычисления. Под ред. Ф.Г.Энслоу. - М.: Мир, 1976.
2. ЕВРЕИНОВ Э.В., ХОРОШЕВСКИЙ В.Г. Однородные вычислительные системы. - Новосибирск: Наука, 1978.
3. ХАРАРИ Ф., ПАЙМЕР Э. Перечисление графов. - М.: Мир, 1977.

4. ПОПОВ В.А., СКИБЕНКО И.Т., ФЕДОРОВИЧ О.Е. О некоторых вопросах структурно-функциональной оптимизации управляющих вычислительных комплексов. - Автоматика и телемеханика, 1978, № 5, с.173-181.

5. ПОПОВ В.А., СКИБЕНКО И.Т. Перечисление абстрактных автоматов. - Автоматика и телемеханика, 1975, № 1, с. 143-148.

Поступила в ред.-изд.отд.

20 августа 1982 года