

УДК 519.652

ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ X-СПЛАЙНЫ

Б.И.Квасов

Исследован новый класс параболических сплайнов, обобщающих стандартные параболические сплайны Стечкина-Субботина. Обобщение достигается за счет наложения связей на величины скачков производных сплайна. Это позволяет получать интерполанты, имеющие существенные практические преимущества.

В в е д е н и е

В работе Кленшоу и Негуса [1] (см. также [2, с.193-198]) был предложен алгоритм построения кубических X-сплайнов, основанный на введении в структуру сплайна N параметров, регулирующих величины скачков второй производной сплайна. Это позволяет повышать точность приближения интерполируемой функции на произвольной неравномерной сетке или без какого-либо значительного ухудшения аппроксимативных свойств существенно снижать вычислительные затраты. Определение X-сплайнов Кленшоу-Негуса было обобщено в [3] на широкий класс непрерывно дифференцируемых интерполяционных кусочно-кубических многочленов. Мольтхай и Шорр [4] показали, что, рассматривая линейную комбинацию двух X-сплайнов "наименьшей работы", можно получить кубический сплайн, который при определенных ограничениях на сетку узлов интерполяции обеспечивает фактически такую же точность приближения как и стандартный кубический сплайн, но с меньшими вычислительными затратами. В [5] результаты работ [1, 3] были распространены на случай квадратических X-сплайнов, когда значения интерполируемой функции считаются заданными в серединах отрезков некоторой произвольной неравномерной сетки.

Цель данной работы состоит в представлении алгоритмов построения и исследовании свойств приближения интерполяционных пара-

болических X-сплайнов, обобщающих стандартные параболические сплайны Стечкина-Субботина [6]. В отличие от кубических X-сплайнов здесь можно без какого-либо усложнения алгоритма вводить регулируемые разрывы не только в значения производной сплайна, но и в значения самого сплайна, что может быть полезно при интерполяции разрывных функций. Возможность использования представления параболического X-сплайна через моменты (значения второй производной сплайна в узлах интерполяции) повышает вычислительную эффективность предлагаемого алгоритма.

Аналогично кубическим X-сплайнам за счет выбора параметров, связывающих величины скачков производных сплайна, удастся повышать точность приближения на неравномерной сетке или существенно снижать вычислительные затраты по реализации интерполяции фактически без увеличения погрешности приближения. Приводимый численный пример показывает, что параболические X-сплайны с успехом могут быть использованы для получения кривых с заданными изогометрическими характеристиками. Это позволяет надеяться на практическое применение таких сплайнов для решения задач машинной графики, где экономичность алгоритмов и возможность получения кривых с нужными качественными характеристиками часто оказываются более важными показателями, чем высокая точность приближения гладких функций.

Посредством дифференцирования по параметру и построения сплайна от сплайна параболические X-сплайны могут быть применены для приближения производных интерполируемой функции старшей степени сплайна. Возможно также построение на их основе формул численного дифференцирования на равномерной сетке высокой точности.

§1. Постановка задачи. Определяющие соотношения

Пусть на отрезке $[a, b]$ в узлах разбиения $\Delta: a=x_0 < x_1 < \dots < x_N=b$ заданы значения некоторой функции $f_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, N$. Введем еще одну сетку $\bar{\Delta} = \{\bar{x}_i \mid i = 0, 1, \dots, N+1\}$, полагая $\bar{x}_i = (x_{i-1} + x_i)/2$, $i = 1, 2, \dots, N$; $\bar{x}_0 \leq a$, $\bar{x}_{N+1} \geq b$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Интерполяционным параболическим X-сплайном назовем непрерывную функцию $S(x)$, которая на каждом из интервалов $(\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1})$ совпадает с некоторым квадратным многочленом $S(x) = \sum_{j=0}^2 a_{ij}(x-x_i)^j$, $x \in (\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, N$, причем выполняются соотношения $S'(\bar{x}_{i+1} + 0) - S'(\bar{x}_{i+1} - 0) = \alpha_i(S''(\bar{x}_{i+1} + 0) -$

$-S''(\bar{x}_{i+1} - 0)\}$, $i = 0, 1, \dots, N-1$, и удовлетворяет условиям $S(x_i) = f_i$, $i = 0, 1, \dots, N$.

При $\alpha_i = 0$ сплайн $S(x)$ непрерывно дифференцируем в точке $\bar{x}_{i+1}$. Если $\alpha_i = 0$ для всех i , то получаем параболический сплайн Стечкина-Субботина [6], имеющий непрерывную производную на всем отрезке $[a, b]$.

Для однозначного определения сплайна $S(x)$ требуется задание граничных условий, в качестве которых рассмотрим условия одного из следующих типов.

I. $S'(a) = f'_0$, $S'(b) = f'_N$.

II. $S''(a) = f''_0$, $S''(b) = f''_N$.

III. Условия периодичности $S^{(r)}(a) = S^{(r)}(b)$, $r = 1, 2$.

IV. $S''(\bar{x}_i - 0) = S''(\bar{x}_i + 0)$, $i = 1, N$.

Положим $m_i = S'(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, N$. Тогда для $x \in [x_i, \bar{x}_{i+1}]$

$$S(x) = [1 - (1+q_i)t^2]f_i + (1+q_i)t^2f_{i+1} + \\ + \left[1 - (2+q_i)\frac{t}{2}\right]th_im_i - \frac{q_i}{2}t^2h_im_{i+1}, \quad (1.1)$$

где $h_i = x_{i+1} - x_i$, $t = (x - x_i)/h_i$, $q_i = 1 + 4\epsilon_i$, $\epsilon_i = \alpha_i/h_i$, с заменой местами индексов i и $i+1$ (q_i заменяется на $p_i = 1 - 4\epsilon_i$) для $x \in [\bar{x}_{i+1}, x_{i+1}]$.

Условие непрерывности $S''(x)$ в узлах сетки Δ дает следующую систему определяющих соотношений для нахождения параметров сплайна:

$$p_{i-1}\lambda_im_{i-1} + (2+p_{i-1}\lambda_i + q_i\mu_i)m_i + q_i\mu_im_{i+1} = c_i, \quad (I.2) \\ i = 1, 2, \dots, N-1,$$

где

$$\lambda_i = 1 - \mu_i = h_i/(h_{i-1} + h_i),$$

$$c_i = 2(1+p_{i-1})\lambda_i \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} + 2(1+q_i)\mu_i \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i}.$$

Уравнения (I.2) замыкаются с помощью краевых условий перечисленных выше типов.

$$I. m_0 = f_0', \quad m_N = f_N'.$$

$$II. (2+q_0)m_0 + q_0m_1 = 2(1+q_0) \frac{f_1-f_0}{h_0} - 2h_0f_0'',$$

$$p_{N-1}m_{N-1} + (2+p_{N-1})m_N = 2(1+p_{N-1}) \frac{f_N-f_{N-1}}{h_{N-1}} + 2h_{N-1}f_N''.$$

III. Если $f(x)$ - периодическая функция с периодом $b-a$, то, продолжая периодическим образом сетку Δ и полагая $h_N=h_0$, $m_N=m_0$, $m_{N+1}=m_1$, можно записать условие (I.2) в точке x_N . В результате система определяющих соотношений для параметров m_i опять замыкается.

$$IV. m_i + m_{i+1} = 2(f_{i+1} - f_i)/h_i, \quad i = 0, N-1.$$

Во всех четырех случаях матрицы систем имеют строгое диагональное преобладание, если выполнено условие $|\epsilon_i| < 1/2$, $i = 0, 1, \dots, N$. Это обеспечивает существование и единственность решения этих систем, а следовательно, существование и единственность соответствующих им параболических X-сплайнов.

Отметим некоторые важные с практической точки зрения варианты выбора параметров ϵ_i . Если все $\epsilon_i = 1/4$ (или $\epsilon_i = -1/4$), то система (I.2) становится двухдиагональной и неизвестные m_i можно определить рекуррентным образом, не прибегая к алгоритму прогонки, что существенно сокращает вычислительные затраты. При этом наличие диагонального преобладания обеспечит устойчивость вычислительного процесса. Если положить $\epsilon_{i-1} = -\epsilon_i = 1/4$, то из i -го уравнения системы (I.2) имеем

$$m_i = \lambda_i \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} + \mu_i \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i}. \quad (1.3)$$

На интервале $(\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1})$ сплайн $S(x)$ становится локальным и, как нетрудно проверить, совпадает с квадратной параболой по трем точкам, а система (I.2) распадается на две изолированные подсистемы. Этот факт, в частности, может быть использован для распараллеливания вычислений. При $\epsilon_i = 0$ для всех $i \neq k$ и $\epsilon_k = \pm 1/4$ сплайн $S(x)$ будет состоять из двух "непрерывно дифференцируемых" параболических сплайнов, стыкующихся в точке $\bar{x}_{k+1}$. Коэффициенты одного из этих сплайнов будут определяться независимо от коэффициентов другого. Как было отмечено в [2, с. 195], такой выбор ϵ_i может

быть использован, например, для устранения осцилляций, присущих обычному параболическому сплайну [6].

Более удобным и экономичным при расчетах является другое представление сплайна $S(x)$, в котором вместо величин w_i присутствуют параметры $M_i = S''(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, N$. В терминах этих неизвестных для $x \in [x_i, x_{i+1}]$ имеем

$$S(x) = (1-t)f_i + tf_{i+1} + [(4t-4+q_i)M_i - q_i M_{i+1}]th_i^2/8 \quad (1.4)$$

с заменой местами индексов i и $i+1$ (q_i заменяется на p_i) для $x \in [x_{i+1}, x_{i+2}]$.

Условие непрерывности $S'(x)$ в узлах сетки Δ равносильно следующей системе определяющих соотношений для параметров сплайна:

$$p_{i-1}M_{i-1} + (4-p_{i-1}M_i - q_i\lambda_i)M_i + q_i\lambda_i M_{i+1} = d_i, i=1, 2, \dots, N-1, \quad (1.5)$$

где

$$d_i = \frac{8}{h_{i-1}+h_i} \left(\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i} - \frac{f_i-f_{i-1}}{h_{i-1}} \right).$$

Система (1.5) замыкается с помощью краевых условий типа I-IV, которые в данном случае приобретают вид

$$\text{I. } (4-q_0)M_0 + q_0M_1 = \frac{8}{h_0} \left[\frac{f_1-f_0}{h_0} - f'_0 \right],$$

$$p_{N-1}M_{N-1} + (4-p_{N-1})M_N = \frac{8}{h_{N-1}} \left[f'_N - \frac{f_N-f_{N-1}}{h_{N-1}} \right].$$

$$\text{II. } M_0 = f''_0, \quad M_N = f''_N.$$

III. В периодическом случае к (1.5) добавляется такое же уравнение с индексом $i=N$ и полагается $h_N=h_0$, $M_N=M_0$, $M_{N+1}=M_1$.

$$\text{IV. } M_i = M_{i+1}, \quad i=0, N-1.$$

При $|e_i| \leq 1/4$, $i = 0, 1, \dots, N-1$, во всех четырех случаях матрицы систем имеют диагональное преобладание. При практических вычислениях в целях уменьшения числа выполняемых арифметических операций рекомендуется переписать эти системы относительно неизвестных $\bar{M}_i = M_i/2$, одновременно полагая $\bar{p}_i = p_i h_i/4$, $\bar{q}_i = q_i h_i/4$ и умножая i -е уравнение на $h_{i-1} + h_i$. После определения всех $\bar{M}_i$

целесообразно вычислить коэффициенты m_i в представлении сплайна на подотрезке $[\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}]$ $S(x) = f_i + (x - \bar{x}_i)[m_i + (x - \bar{x}_i)\bar{M}_i]$, $i=0, 1, \dots, N$, по формулам

$$m_N = (f_N - f_{N-1})/h_{N-1} + \bar{p}_{N-1}\bar{M}_{N-1} + (h_{N-1} - \bar{p}_{N-1})\bar{M}_N,$$

$$m_i = (f_{i+1} - f_i)/h_i - (h_i - \bar{q}_i)\bar{M}_i - \bar{q}_i\bar{M}_{i+1}, \quad i=0, 1, \dots, N-1.$$

Можно рассмотреть также более общий случай параболического X-сплайна, когда условие непрерывности сплайна заменяется на требование $S(\bar{x}_{i+1} + 0) - S(\bar{x}_{i+1} - 0) = \beta_i \{S'(\bar{x}_{i+1} + 0) - S'(\bar{x}_{i+1} - 0)\}$, $i = 0, 1, \dots, N-1$. Использование такой конструкции может оказаться полезным при интерполяции разрывных функций. Для получения расчетных соотношений достаточно заменить в выписанных выше формулах параметры p_i, q_i на $P_i = (1 - 4\epsilon_i + 8\epsilon_i v_i)/(1 - 8\epsilon_i v_i)$, $Q_i = (1 + 4\epsilon_i + 8\epsilon_i v_i)/(1 - 8\epsilon_i v_i)$ ($v_i = \beta_i/h_i$) в случае наклонов m_i и $P_i = 1 - 4\epsilon_i + 8\epsilon_i v_i$, $Q_i = 1 + 4\epsilon_i + 8\epsilon_i v_i$ в случае моментов M_i . Системы, отвечающие (I.2), (I.5), будут иметь строгое диагональное преобладание, например, при $|\epsilon_i| < 1/2$, $|v_i| < 1/4$ и соответственно $|\epsilon_i| < 1/8$, $|v_i| < 1/2$, $i = 0, 1, \dots, N-1$.

Возможно дальнейшее обобщение понятия параболического X-сплайна. Пусть $\phi_i(x)$ - квадратная парабола по трем точкам: $\phi_i(x_j) = f_j$, $j = i-1, i, i+1$. Тогда нетрудно показать, что связи для параметров m_i можно переписать в виде

$$P_{i-1}\lambda_i[m_{i-1} - \phi'_i(x_{i-1})] + (2 + P_{i-1}\lambda_i + Q_i\mu_i)[m_i - \phi'_i(x_i)] + Q_i\mu_i[m_{i+1} - \phi'_i(x_{i+1})] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (1.6)$$

Поэтому, следуя [3], можно рассмотреть параболические X-сплайны (уже с узлами, вообще говоря, на сетке $\delta = \Delta \cup \bar{\Delta}$), для которых система определяющих соотношений имеет вид

$$A_i m_{i-1} + m_i + B_i m_{i+1} = A_i \phi'_i(x_{i-1}) + \phi'_i(x_i) + B_i \phi'_i(x_{i+1}),$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (1.7)$$

где для получения строгого диагонального преобладания, гарантирующего существование и единственность сплайна, вещественные числа A_i, B_i подчинены ограничению $|A_i| + |B_i| < 1$, $i = 1, 2, \dots, N-1$. В частности, при $A_i = B_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, N-1$, мы получаем параболический X-сплайн "наименьшей работы", у которого m_i , $i=1, 2, \dots, N-1$, задаются согласно (I.3).

Аналогично (I.6) связи (I.5) могут быть записаны в виде

$$p_{i-1}\mu_i[M_{i-1}-\varphi_i''(x)] + (4-p_{i-1}\mu_i-q_i\lambda_i)[M_i-\varphi_i''(x)] + \\ + q_i\lambda_i[M_{i+1}-\varphi_i''(x)] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

и, следовательно, при получении обобщения понятия X-сплайна можно пойти по пути рассмотрения системы

$$A_i M_{i-1} + M_i + B_i M_{i+1} = A_i \varphi_i''(x) + \varphi_i''(x) + B_i \varphi_i''(x), \\ i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (1.8)$$

Отметим, что системы (I.7), (I.8) как частные случаи содержат соответствующие системы для кубических X-сплайнов и дискретных кубических сплайнов [2].

Параметры m_i , M_i могут выбираться и из других соображений, например, используя вариационный или адаптивный подход [7].

§2. Оценки погрешности интерполяции

Нам потребуются следующие обозначения: $\|\cdot\|_C$, $\|\cdot\|_\infty$ - нормы в пространствах непрерывных на $[a, b]$ функций $C[a, b]$ и измеримых и ограниченных в существенном функций $L_\infty[a, b]$. Через $W_\infty^1[a, b]$ обозначим множество функций с абсолютно непрерывной на $[a, b]$ производной порядка $1-1$ и 1-й производной из $L_\infty[a, b]$. Положим также $\bar{h} = \max_i h_i$.

ЛЕММА. Если $S(x)$ интерполирует функцию $f(x) \in W_\infty^3[a, b]$ и удовлетворяет крайевым условиям одного из типов I, II, III, то при $|\epsilon_i| \leq 1/4$, $i = 0, 1, \dots, N-1$,

$$|m_i - f_i'| \leq \frac{\bar{h}^2}{6} \|f'''\|_\infty, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим, например, случай граничных условий типа I. Из уравнений (I.2) с учетом краевых условий для неизвестных $Q_i = m_i - f_i'$ имеем систему

$$\left. \begin{aligned} p_{i-1}\lambda_i Q_{i-1} + (2+p_{i-1}\lambda_i + q_i\mu_i)Q_i + q_i\mu_i Q_{i+1} &= \tilde{c}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ Q_0 = Q_N &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

где в силу формулы Тейлора

$$\tilde{c}_i = \lambda_i h_{i-1}^2 \int_0^1 \phi(\tau, p_{i-1}) f'''(x_{i-1} + h_{i-1} \tau) d\tau + \mu_i h_i^2 \int_0^1 \phi(1-\tau, q_i) f'''(x_i + h_i \tau) d\tau$$

$$\text{и } \phi(\tau, p_{i-1}) = (1 + p_{i-1}) \tau^2 - p_{i-1} \tau.$$

Оценивая интегралы посредством неравенства Гёльдера, находим

$$|\tilde{c}_i| \leq \frac{1}{3} \bar{h}^2 \|f'''\|_{\infty}, \quad i=1, 2, \dots, N-1, \text{ и так как при } |\epsilon_i| \leq 1/4, \quad i=0,$$

$1, \dots, N-1$, матрица системы (2.2) имеет диагональное преобладание $r_i = 2$, то для получения оценки (2.1) остается применить следствие Д.И из [2]. Аналогично исследуются случаи краевых условий типа II, III. Лемма доказана.

Использование установленного результата позволяет легко оценить величины скачков производной сплайна.

Так как согласно (I.I) $d_i^{(1)} = S'(\bar{x}_{i+1} + 0) - S'(\bar{x}_{i+1} - 0) = 4\epsilon_i(m_i + m_{i+1} - 2 \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i}) = 4\epsilon_i[(m_i - f'_i) + (m_{i+1} - f'_{i+1}) + I]$, где в силу формулы Тейлора

$$I = h_i^2 \int_0^1 \tau(1-\tau) f'''(x_i + h_i \tau) d\tau,$$

то, оценивая интеграл с помощью неравенства Гёльдера и применяя лемму, при $|\epsilon_i| \leq 1/4$, $i = 0, 1, \dots, N-1$, находим

$$|d_i^{(1)}| \leq 2|\epsilon_i| \bar{h}^2 \|f'''\|_{\infty} \leq \frac{\bar{h}^2}{2} \|f'''\|_{\infty}, \quad i=0, 1, \dots, N-1.$$

Оценим теперь погрешность получаемых с помощью параболических X-сплайнов приближений.

ТЕОРЕМА I. Если $S(x)$ интерполирует функцию $f(x) \in W_{\infty}^3[a, b]$ и удовлетворяет краевым условиям одного из типов I, II, III, то при $|\epsilon_i| \leq 1/4$, $i=0, 1, \dots, N-1$,

$$\|S^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)\|_{\infty} \leq c_r \bar{h}^{3-r} \|f'''\|_{\infty}, \quad r=0, 1, \quad (2.3)$$

где $c_0 = 1/16$, $c_1 = 11/24$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (I.I) следует, что для $x \in [x_i, \bar{x}_{i+1}]$

$$S(x) - f(x) = h_i^3 I + \left[1 - \left(1 + \frac{p_i}{2}\right)t\right] t h_i (m_i - f'_i) - \frac{p_i}{2} t^2 h_i (m_{i+1} - f'_{i+1}), \quad (2.4)$$

где в силу формулы Тейлора

$$I = \int_0^t \left\{ \left[(1+p_i)t^2 - 1 \right] \frac{t}{2} + t - \left(1 + \frac{p_i}{2}\right)t^2 \right\} \tau f'''(x_i + h_i \tau) d\tau + \\ + \frac{t^2}{2} \int_t^1 \left\{ (1+p_i)(1-\tau) - p_i \right\} (1-\tau) f'''(x_i + h_i \tau) d\tau.$$

Оценивая интегралы посредством неравенства Гёльдера, находим $|I| \leq \varphi(p_i, t) \|f'''\|_\infty$, где

$$\varphi(p_i, t) = \begin{cases} \left[\frac{p_i^3}{(1+p_i)^2} + 1 - \frac{p_i}{2} - t \right] \frac{t^2}{6}, & 0 \leq t \leq \frac{1}{1+p_i}, \\ \left(\frac{t[2-(2+p_i)t]^3}{[1-(1+p_i)t^2]^2} + t + \frac{p_i}{2} - 1 \right) \frac{t^2}{6}, & \frac{1}{1+p_i} \leq t \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Тогда в силу леммы из (2.4) находим

$$|S(x) - f(x)| \leq \left[\varphi(p_i, t) + \frac{t(1-t)}{6} \right] h^3 \|f'''\|_\infty = \varphi(p_i, t) h^3 \|f'''\|_\infty$$

и так как $\max_{0 \leq t \leq 1/2} \varphi(p_i, t) = \varphi(0, 1/2) = \varphi(2, 1/2) = \frac{1}{16}$, то первая из оценок (2.3) установлена.

Дифференцируя (2.4), аналогично получим оценку (2.3) при $r = I$. Теорема доказана.

Для сравнения отметим, что при $\varepsilon_i = 0$, $i=0, 1, \dots, N-1$, оценки (2.3) имеют место с постоянными $C_0 = 1/24$, $C_1 = 1/6$.

Придавая параметрам ε_i специальные значения, можно существенно повысить точность приближения интерполируемой функции в узлах сплайна. Ниже будут использованы обозначения $S_i = S(\bar{x}_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, N-1$; $\rho = \max_{|i-j|=1} h_i/h_j$.

ТЕОРЕМА 2. Если $S(x)$ интерполирует функцию $f(x) \in W_\infty^k[a, b]$ и удовлетворяет пе -

периодическим краевым условиям или условиям вида

$$S_i = f(\bar{x}_{i+1}), \quad i = 0, N-1, \quad (2.5)$$

а для сетки Δ выполнено ограничение $\rho \leq \gamma < 1 + \sqrt{2}$, то при

$$\epsilon_i = \frac{h_{i-1} - h_{i+1}}{4(h_{i-1} + 4h_i + h_{i+1})}, \quad i = 1, 2, \dots, N-2, \quad (2.6)$$

справедлива оценка

$$|S_i - f(\bar{x}_{i+1})| \leq \frac{11\bar{h}^4}{128c} \|f^{IV}\|_{\infty}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.7)$$

где $c = 2(1+2\gamma-\gamma^2)/(1+\gamma)$. Если сетка Δ равномерна, то

$$|S_i - f(\bar{x}_{i+1})| \leq \frac{h^4}{64} \|f^{IV}\|_{\infty}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно показать, что величины S_i , $i = 0, 1, \dots, N-1$ связаны соотношениями

$$a_i \lambda_i S_{i-1} + (2 + a_i \mu_i + b_i \lambda_{i+1}) S_i + b_i \mu_{i+1} S_{i+1} = e_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-2, \quad (2.9)$$

где $e_i = (1 + a_i) f_{i+1} + (1 + b_i) f_{i+1}$, $a_i = (1 - 4\epsilon_i) h_i / h_{i-1}$, $b_i = (1 + 4\epsilon_i) h_i / h_{i+1}$. Рассмотрим, например, случай граничных условий вида (2.5). В силу связей (2.9) для неизвестных $u_i = S_i - f(\bar{x}_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, N-1$, имеем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_i \lambda_i u_{i-1} + (2 + a_i \mu_i + b_i \lambda_{i+1}) u_i + b_i \mu_{i+1} u_{i+1} &= \bar{e}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-2 \\ u_0 = u_{N-1} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

где правые части, используя разложение по формуле Тейлора, можно записать в виде

$$\begin{aligned} \bar{e}_i &= [h_{i-1} - h_{i+1} - 4\epsilon_i (h_{i-1} + 4h_i + h_{i+1})] \frac{h_i^2}{48} f'''(\bar{x}_{i+1}) + \\ &+ \int_{1/2}^1 \phi(\tau, a_i, h_{i-1}) f^{IV}(x_{i-1} + h_{i-1}\tau) d\tau + \int_0^{1/2} \phi(\tau, a_i, h_{i-1}) f^{IV}(x_i + h_i\tau) d\tau + \end{aligned}$$

$$+ \int_{1/2}^1 \varphi(1-\tau, b_i, h_{i+1}) f^{IV}(x_i + h_i \tau) d\tau + \int_0^{1/2} \varphi(1-\tau, b_i, h_{i+1}) f^{IV}(x_{i+1} + h_{i+1} \tau) d\tau$$

с подынтегральной функцией

$$\varphi(\tau, a_i, h_{i+1}) = \begin{cases} \frac{h_i^4}{6} \left[-a_i \lambda_i \left(\tau + \frac{h_{i-1}}{2h_i} \right)^3 + (1+a_i) \tau^3 \right], & 0 \leq \tau \leq 1/2, \\ a_i \lambda_i \frac{h_{i-1}^4}{6} \left(\frac{1}{2} - \tau \right)^3, & 1/2 \leq \tau \leq 1. \end{cases}$$

Выбирая ϵ_i согласно (2.6) и оценивая интегралы посредством неравенства Гёльдера, находим $|\bar{e}_i| \leq \frac{11}{128} \bar{h}^4 \|f^{IV}\|_\infty$, $i=1, 2, \dots, N-2$.

При выполнении условия $\rho \leq \gamma < 1 + \sqrt{2}$ матрица системы (2.10) имеет диагональное преобладание

$$\begin{aligned} r_i &= 2 + p_i(\mu_i - \lambda_i) + q_i(\lambda_{i+1} - \mu_{i+1}) \geq \\ &\geq 2 \left[1 + \frac{1}{1+\rho^{-1}} \frac{h_{i-1} + 2h_i}{h_{i-1} + 4h_i + h_{i+1}} (1-\rho) + \frac{1}{1+\rho^{-1}} \frac{2h_i + h_{i+1}}{h_{i-1} + 4h_i + h_{i+1}} (1-\rho) \right] = \\ &= 2 \frac{1+2\rho-\rho^2}{1+\rho} \geq 2 \frac{1+2\gamma-\gamma^2}{1+\gamma} = c > 0. \end{aligned}$$

Поэтому для получения оценки (2.7) остается применить следствие Д.1 из [2].

В случае равномерной сетки Δ для правых частей системы (2.10) имеем оценку $|\bar{e}_i| \leq \frac{h^4}{32} \|f^{IV}\|_\infty$, $i = 1, 2, \dots, N-2$, и так как в этом случае матрица системы (2.10) имеет диагональное преобладание $r_i = 2$, то приходим к оценке (2.8), ранее полученной в [8]. Теорема доказана.

Используя методику доказательства теоремы I применительно к представлению сплайна

$$s(x) = f_i + 2 \left(\mu_i \frac{s_i - f_i}{h_i} + \lambda_i \frac{f_i - s_{i-1}}{h_{i-1}} \right) (x - x_i) + \frac{4}{h_{i-1} + h_i} \left(\frac{s_i - f_i}{h_i} - \frac{f_i - s_{i-1}}{h_{i-1}} \right) (x - x_i)^2$$

для $x \in (\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1})$, при ограничении $\rho \leq 1 + \sqrt{2}$ нетрудно получить оценку

$$|s(x)-f(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{216} \bar{h}^3 \|r''' \|_{\infty} + \max_i |s_i - f(x_{i+1})|.$$

Следовательно, если выбрать параметры ϵ_i согласно (2.6), то в силу (2.7) при $\rho < 1/\sqrt{2}$ сплайн $s(x)$ будет обеспечивать практически такую же точность приближения интерполируемой функции $f(x) \in W_{\infty}^4[a, b]$, как и интерполяция квадратными параболоми по трем точкам на сетке с вдвое меньшим шагом. Отметим, что в случае выбора параметров ϵ_i согласно (2.6) имеем $|\epsilon_i| \leq 1/4$, $i = 1, 2, \dots, N-2$.

Обратимся теперь к системе (I.7). Записывая ее относительно неизвестных $Q_i = s_i - f'_i$, $i = 0, 1, \dots, N$, будем иметь

$$A_i Q_{i-1} + Q_i + B_i Q_{i+1} = \tilde{c}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (2.11)$$

где в предположении $f(x) \in W_{\infty}^3[a, b]$ согласно формуле Тейлора

$$\begin{aligned} \tilde{c}_i = & [(1-A_i-B_i)h_{i-1}h_i - A_i h_{i-1}^2 - B_i h_i^2] \frac{1}{6} f'''_i + \\ & + [(1-A_i-B_i)h_{i-1}h_i(h_i-h_{i-1}) + 2h_{i-1}^3 A_i - 2h_i^3 B_i] \frac{1}{24} f^{IV}_i + \\ & + \frac{h_{i-1}^4}{6} \int_0^1 \{ [A_i(1+\mu_i) + \lambda_i(1-B_i)] \frac{\tau}{4} - A_i \} \tau^3 f^V(x_{i-1} + h_{i-1}\tau) d\tau + \\ & + \frac{h_i^4}{6} \int_0^1 \{ [(1-A_i)\mu_i + (1+\lambda_i)B_i] \frac{1-\tau}{4} - B_i \} (1-\tau)^3 f^V(x_i + h_i\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Полагая здесь $A_i = \lambda_i^2$, $B_i = \mu_i^2$, $i = 1, 2, \dots, N-1$, оценивая интегралы посредством неравенства Гёльдера и пользуясь получаемым диагональным преобладанием системы (2.II), в случае краевых условий типа I, III приходим к оценке $|s_i - f'_i| \leq \frac{\bar{h}^4}{60} \|f^{IV}\|_{\infty}$, $i = 0, 1, \dots, N$.

Поэтому, рассматривая параболический X-сплайн с параметрами $\alpha_i = 0$, $i = 0, 1, \dots, N-1$, и поступая, как это делалось при доказательстве теоремы I, в случае краевых условий I, III, имеем $\|s^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)\|_{\infty} \leq c_r \bar{h}^{5-r} \|r'''\|_{\infty} + O(\bar{h}^{5-r})$, $r=0, 1$, с постоянными $c_0 = 1/96$, $c_1 = 1/24$.

Аналогично из системы (I.8) при

$$A_i = \lambda_i \frac{h_{i-1}^2 + h_{i-1}h_i - h_i^2}{h_{i-1}^2 + 3h_{i-1}h_i + h_i^2}, \quad B_i = \mu_i \frac{h_i^2 + h_{i-1}h_i - h_{i-1}^2}{h_{i-1}^2 + 3h_{i-1}h_i + h_i^2}, \quad i=1, 2, \dots, N-1,$$

и краевых условиях типа II, III для $f(x) \in W_{\infty}^6[a, b]$ следует оценка $|M_i - r_i^n| \leq \frac{\bar{h}^3}{60} (1.02 \|f^{IV}\|_C + \frac{3}{8} \bar{h} \|f^{VI}\|_{\infty})$, $i = 0, 1, \dots, N$. Используя это неравенство применительно к представлению сплайна (I.4), при $\alpha_i = 0$ для всех i приходим к оценкам $\|S^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)\|_{\infty} \leq c_r \bar{h}^{3-r} \|f^{(r+3)}\|_{\infty} + O(\bar{h}^{4-r})$, $r = 0, 1, 2$, где $c_0 = \sqrt{3}/216$, $c_1 = 1/12$, $c_2 = 1/2$.

Отметим, что при рассмотренном выборе параметров A_i, B_i системы (I.7), (I.8) совпадают с соответствующими системами для кубических X-сплайнов и дискретных кубических сплайнов [2].

§3. Численное дифференцирование на равномерной сетке

Пусть сетка Δ равномерна, а достаточно гладкая интерполируемая функция $f(x)$ периодична с периодом $b-a$. В предположении $\epsilon_i = \epsilon$, $i = 0, 1, \dots, N-1$, решение системы (I.5) может быть записано в виде

$$M^i = f_i'' - \epsilon h f_i'''' + \left(-\frac{1}{24} + \epsilon^2\right) h^2 f_i^{IV} + O(h^3), \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (3.1)$$

Поэтому, подставляя это выражение для M_i, M_{i+1} в (I.4) и выполняя разложение по формуле Тейлора в точке $x = x_i + th_i$, на - ходим

$$\begin{aligned} S(x) = & f(x) + (1-12\epsilon t-4t^2) \frac{th^3}{24} f'''(x) + \\ & + [-2\epsilon + 8\epsilon t(\epsilon+t) - t+2t^3] \frac{th^4}{16} f^{IV}(x) + O(h^3). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Дифференцируя (I.4), аналогично имеем

$$\begin{aligned} S'(x) = & f'(x) + (1-24\epsilon t-12t^2) \frac{h^2}{24} f''(x) + \\ & + [-3\epsilon + 24\epsilon t(\epsilon+t) - 2t(1-4t^2)] \frac{h^3}{24} f^{IV}(x) + O(h^4), \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$S''(x) = f''(x) - (\epsilon+t) h f'''(x) + \left[\epsilon(\epsilon+t) + \frac{-1+12t^2}{24}\right] h^2 f^{IV}(x) + O(h^3). \quad (3.4)$$

Формулы (3.2)-(3.4) полностью характеризуют погрешность приближения периодическим сплайном $S(x)$. В непериодическом случае по-

лученные соотношения сохраняют силу, если в качестве граничных условий задать величины M_0, M_N согласно (3.1) или воспользоваться соотношениями $\Delta_h^3 M_0 = \Delta_{-h}^3 M_N = 0$, где $\Delta_{\pm h} \phi(x) = \phi(x \pm h) - \phi(x)$. Использование формул (3.2)–(3.4) позволяет также указать точки суперсходимости, где порядок приближения может быть повышен.

Покажем теперь, что возможно применение параболических Х-сплайнов и для приближения производных интерполируемой функции старше второй. Ограничимся приведением следующего результата.

ТЕОРЕМА 3. Если $S(x)$ интерполирует функцию $f(x) \in W_{\infty}^6[a, b]$ на равномерной сетке Δ и удовлетворяет периодическим краевым условиям или условиям вида

$$M_i = f_i'' - \epsilon h f_i''' + \left(-\frac{1}{24} + \epsilon^2\right) h^2 f_i^{IV} - \epsilon^3 h^3 f_i^V, \quad i=0, N, \quad (3.5)$$

или же $\Delta_h^4 M_0 = \Delta_{-h}^4 M_N = 0$, то при $|\epsilon| < 1/2$

$$\left\| f^{(r)}(x) - \frac{(-1)^r}{r-2} \frac{\partial^r S}{\partial x^2 \partial \alpha^{r-2}} \right\| \leq \left(\frac{1}{2} + (r-1)|\epsilon| \right) h \|f^{(r+1)}\|_{\infty} + O(h^2), \quad r=3, 4. \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим, например, случай граничных условий (3.5). В предположениях теоремы из уравнений (I.5), замыкая с помощью краевых условий, для неизвестных $Q_i = M_i - f_i'' + \epsilon h f_i''' + \left(-\frac{1}{24} + \epsilon^2\right) h^2 f_i^{IV} + \epsilon^3 h^3 f_i^V$, $i=0, 1, \dots, N$, имеем систему

$$\left. \begin{aligned} (1-4\epsilon)Q_{i-1} + 6Q_i + (1+4\epsilon)Q_{i+1} &= \tilde{d}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ Q_0 = Q_N &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

где в силу формулы Тейлора

$$d_i = h^4 \left\{ \int_0^1 \phi(\epsilon, \tau) f^{V'}(x_{i-1} + h\tau) d\tau + \int_0^1 \phi(-\epsilon, 1-\tau) f^{V'}(x_i + h\tau) d\tau \right\}$$

с подынтегральной функцией

$$\phi(\epsilon, \tau) = \frac{\tau^5}{15} - (1-4\epsilon) \left[\frac{\tau^3}{6} + \frac{\epsilon \tau^2}{2} + \left(-\frac{1}{24} + \epsilon^2\right) \tau + \epsilon^3 \right].$$

Так как система (3.7) и получающиеся из нее дифференцированием по α системы при $|\epsilon| < 1/2$ имеют диагональное преобладание, то, применяя следствие Д.1 из [2], находим $\partial^r Q_i / \partial \alpha^r = O(h^{4-r})$,

$r = 1, 2$, т.е.

$$\left. \begin{aligned} \dot{M}_1 &= -f_1''' + 2\epsilon h f_1^{IV} - 3\epsilon^2 h^2 f_1^V + O(h^3), \\ \dot{M}_1 &= 2f_1^{IV} - 6\epsilon h f_1^V + O(h^2), \quad i = 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Нетрудно проверить, что эти соотношения имеют место и в случае краевых условий других типов.

Из формул (I.3), (3.8) выполняя разложение по формуле Тейлора в точке $x = x_1 + th$, получим

$$\frac{\partial^3 S}{\partial x^2 \partial \alpha} = \dot{M}_1 = -f'''(x) + (t + 2\epsilon) h f^{IV}(x) + O(h^2), \quad (3.9)$$

откуда непосредственно следует первая из оценок (3.6).

Аналогично в силу (3.9), (3.8) $\frac{\partial^4 S}{\partial x^2 \partial \alpha^2} = \ddot{M}_1 = 2f^{IV}(x) - (6\epsilon + 2t) h f^V(x) + O(h^2)$, что дает вторую из нужных нам оценок. Теорема доказана.

Практическая реализация установленного результата осуществляется путем построения сплайна от сплайна, для чего последовательно решаются получаемые из (I.5) дифференцированием по α системы.

Пользуясь методом неопределенных коэффициентов, из систем (I.2), (I.5) нетрудно получить разложения

$$\begin{aligned} m_1 &= f_1' + \frac{h^2}{24} f_1''' - \frac{\epsilon^2}{8} h^3 f_1^{IV} + \left(-\frac{7}{120} + \epsilon^2\right) \frac{h^4}{8} f_1^V + \left(\frac{23}{180} - \epsilon^2\right) \frac{\epsilon h^5}{8} f_1^{VI} + \\ &+ \left(\frac{53}{4 \cdot 7!} + \frac{7\epsilon^2}{180} + \epsilon^4\right) \frac{h^6}{8} f_1^{VII} + O(h^7), \\ M_1 &= f_1'' - \epsilon h f_1''' + \left(-\frac{1}{24} + \epsilon^2\right) h^2 f_1^{IV} - \epsilon^3 h^3 f_1^V + \left(-\frac{7}{2880} + \frac{\epsilon^2}{24} + \epsilon^4\right) h^4 f_1^{VI} + \\ &+ \left(\frac{11}{960} - \frac{\epsilon^2}{12} - \epsilon^4\right) \epsilon h^5 f_1^{VII} + \left(\frac{71}{4 \cdot 8!} - \frac{3\epsilon^2}{160} + \frac{\epsilon^4}{8} + \epsilon^6\right) h^6 f_1^{VIII} + O(h^7). \end{aligned}$$

Используя эти соотношения и применяя методику работы [9], можно получить формулы численного дифференцирования на равномерной сетке высокой точности. Приведем одну такую формулу $\ddot{M}_1|_{\alpha=0} = -f_1''' + \frac{11}{960} h^4 f_1^{VII} + O(h^6)$. Разумеется, при выводе формул численного

дифференцирования можно исходить из более общих систем (I.7), (I.8).

§4. Численный пример

Как было показано в §I, при выборе параметров X-сплайна по правилу $\alpha_i = 0$ для всех $i \neq k$ и $\alpha_k = \pm 1/4$ сплайн распадается на два сплайна, стыкующихся в точке $\bar{x}_{k+1}$. Покажем, что этот факт может быть использован

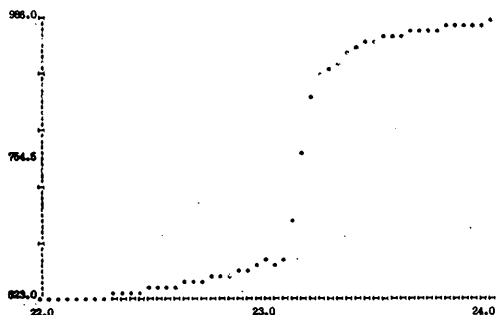


Рис. I

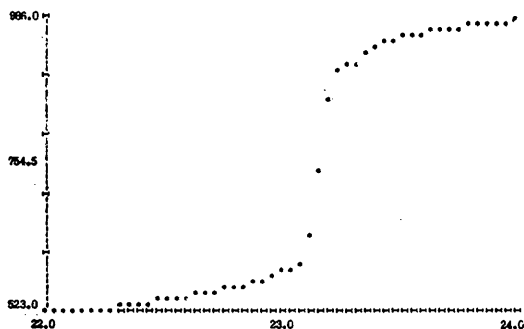


Рис. 2

случай $\alpha_i = 0$, $i = 0, 1, \dots, 20$, приведен на рис. I. Для устранения нежелательного нарушения монотонности профиля на участке $[23, 23.1]$, отвечающему этому отрезку параметру α_{14} было придано значение $1/4$. Полученный результат изображен на рис. 2.

для устранения осцилляций, присущих обычному параболическому сплайну. С этой целью рассмотрим пример интерполяции монотонных данных, взятый из работы [10]: $\{x_i\} = \{1.5, 10, 15, 20, 21, 22, 22.5, 22.6, 22.7, 22.8, 22.9, 23, 23.1, 23.2, 23.3, 23.4, 23.5, 24, 26, 30\}$, $\{y_i\} = \{373, 415, 438, 459, 491, 503, 523, 543, 550, 557, 566, 575, 590, 620, 860, 915, 944, 958, 986, 1067, 1125\}$. Результат интерполяции в характерной области быстрого изменения данных, полученный с помощью обычного параболического сплайна, отвечающего

Л и т е р а т у р а

1. GLENSHAW C.W., NEGUS B. The cubic X-spline and its application to interpolation.- J.Inst.Math.Applics., 1978, v.22,p.109-119.
2. ЗАБЕЛЯЛОВ Д.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. -М.: Наука, 1980. - 352 с.
3. BENFOROZ G.H., PARAMICHAEL N., WORSEY A.J. A class of piecewise-cubic interpolatory polynomials. - J.Inst.Maths.Applics. 1980,v.25,p.53-65.
4. MÜLTREI H.N., SCHORR B. Error analysis for a special X-spline.- Computing,1980,v.25,p.253-267.
5. BUJAŁSKA A., SMARZEWSKI R. Quadratic X-splines. - IMA J. Num.Anal., 1982,v.2,p.37-47.
6. СТЕЧКИН С.Б., СУББОТИН Д.Н. Сплайны в вычислительной математике. -М.: Наука, 1976. - 298 с.
7. ВОРОНИН В.Т. Построение сплайнов, сохраняющих изогометрию. - Препринт ИЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1982, №404. - 19 с.
8. КВАСОВ Б.И. Интерполяция квадратическими сплайнами. -Препринт Ин-та теор. и прикл. механ. СО АН СССР, Новосибирск, 1981, № 3-81. - 60 с.
9. КВАСОВ Б.И. Дискретные интерполяционные параболические сплайны и их применение к задаче численного дифференцирования. - Препринт ИЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1982, № 97. - 27 с.
10. PRUESS S. Alternatives to the exponential spline in tension.-Math.Comput., 1979,v.33,N 148,p.1273-1281.

Поступила в ред.-изд.отд.
26 мая 1983 года