МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ В ЧИСЛЕННОМ АНАЛИЗЕ
(Вычислительные системы)
1983 год Выпуск 98

УДК 518.12:517.27

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ СПЛАЙНАМИ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ*)

В.К.Исаев, С.А.Плотников

Задача о наилучшем приближении функций сплайнами является традиционной в прикладной математике [1]. Для случая выпуклых функций Ремезом Р.Е. [2] был предложен способ выбора узлов ломаной, гарантирующий наилучшее равномерное приближение функции ломаной. В работе Кеткова Ю.Л. [3] получены некоторые оценки сверху и снизу минимального числа узлов ломаной, приближающей с заданной точностью выпуклую функцию $f(x) \in C^2[a, b]$. Шумилов Б.М. [4] рассмотрел вопрос об асимптотически наилучшем равномерном приближении $f(x) \in C^2[a,b]$ сплайнами первой степени. Обобщение результатов по аппроксимации функций $f(x) \in C^2[a,b]$ сплайнами первой степени дано в монографии [1].

В настоящей работе рассматривается задача аппроксимации функций $f(x) \in C[a,b]$ сплайнами первой степени с заданной точностью; предложен метод ее решения, основанный на построении однопараметрического множества последовательных сплайнов первой степени. Исследованы некоторые свойства этих приближений. Введен класс оптимальных сплайнов первой степени. Он обладает следующими преимуществами: число узлов локально оптимального сплайна меньше, чем у ломаной, построенной по любому из известных ранее методов [2,4] для кусочно-выпуклых функций при фиксированной точности аппроксимации; локально оптимальный сплайн является точным (а не асимптотически точным) приближением [3,4]; на заданную точность приближения не накладывается никаких ограничений. Для гладких функций $f(x) \in C^1[a,b]$ предложен алгоритм построения; ал-

*) Работа доложена на школе "Сплайн-функций в инженерной геометрии" в июне 1981 г. в г. Новосибирске.

горитм построения локально оптимального сплайна не использует значения производных приближаемой функции выше первой; алгоритм по своей сути прост и в принципе допускает некоторые дальнейшие обобщения.

Предложенный алгоритм построения локально оптимального сплайна использован авторами при разработке программ оптимального представления геометрической информации для станков с ЧПУ, дисплеев графопостроителей и т.д. [5].

I. Основные понятия. Пусть в R^2 заданы точки r_i, $i = 1, \ldots I$, с координатами (x_i, y_i) и сплайн первой степени S_1 - ломаная, последовательно соединяющая заданные точки. Если $x_i < x_{i+1}$, то $S_1 = S_1(x) = S_{1i}(x)$, $x \in h_i$, где h_i - отрезок $[x_i, x_{i+1}]$, или i-й шаг сплайна $S_1(x)$, $i = 1, \ldots, I-1$; $S_{1i}(x)$ - участок сплайна на h_i, или i-е звено сплайна $S_1(x)$.

Пусть даны функции $f(x)$, $g(x) \in C[a,b]$ и вещественное число $\varepsilon > 0$. Функцию $\Delta_{cd}(x,g) = f(x) - g(x)$, $x \in [c,d] \subset [a,b]$ назовем уклонением функции $g(x)$ от функции $f(x)$ или просто уклонением. Сплайн $S_1(x)$, удовлетворяющий условию: $|\Delta_{ab}(x, S_1)| \le \varepsilon$ или $|\Delta_{h_i}(x, S_{1i})| \le \varepsilon$, $i=1, \ldots, I-1$, назовем допустимым.

Пусть G_{ab} - подпространство всех допустимых сплайнов на $[a,b]$ и $S_1 \in G_{ab}$ - произвольный допустимый сплайн первой степени, h_i - i-й шаг сплайна S_1. Сплайн $S_1^*(x) = S_{1i}^*(x)$, $x \in h_i^*$, $i = 1, \ldots, I-1$, удовлетворяющий условию:

$$x_{i+1}^* = x_i^* + \max_{\substack{x_{i+1} \in [x_i, b] \\ S_1 \in G_{ab}}} \{x_{i+1} - x_i\}, \quad i=1,2,\ldots,$$

называется локально оптимальным сплайном первой степени на $[a,b]$. Здесь $[x_i^*, x_{i+1}^*]$ - i-й шаг h_i^* сплайна S_1^*.

Из такого определения сплайна вытекает алгоритм его построения, основанный на последовательной максимизации каждого шага строящегося сплайна.

Координаты первого (x_1, y_1) и последнего (x_I, y_I) узлов сплайна $S_1^*(x)$ удовлетворяют ограничениям: $x_1 = a$, $x_I = b$. Конкретный сплайн выделяется из однопараметрического множества $\Sigma(y_1)$ заданием координаты y_1 первого узла $r_1 = (a, y_1)$.

ЛЕММА I. $|\Delta_{ab}(x_{i+1}, S_1^*)| = \varepsilon$, $i = 1, \ldots, I-2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точка локального максимума $x^* \in h_i$ функции $|\Delta_{h_i}(x, S_1)|$, $i = 1, \ldots, I-1$, называется допустимой локально опорной точкой сплайна S_1, если $|\Delta_{h_i}(x^*, S_1)| = \varepsilon$.

ЛЕММА 2. На любом интервале $(x_i, x_{i+1}) \subset h_i$, $i = 1,\dots,I-2$, локально оптимальный сплайн $S_1^*(x)$ имеет хотя бы одну допустимую локально опорную точку, в противном случае звено $S_{1i}^*(x)$ в точке x_i опорно справа*) к границе $\bar{G}_{ab}$ множества G_{ab}.

2. Некоторые свойства локально оптимального сплайна. Ниже под наилучшим приближением**) заданной функции сплайном первой степени будем понимать приближение функции с заданной точностью допустимым сплайном первой степени с минимальным числом узлов.

Пусть имеем $f(x) \in C[a,b]$ и вещественное число $\varepsilon > 0$. Обозначим через G_{cd} пространство допустимых сплайнов первой степени для функции $f(x)$, $x \in [c,d] \subset [a,b]$, $(S_1(x) = S_{1i}(x)$, $x \in h_i$, $i = 1,\dots,I-1$, $x_1 = c$, $x_I = d)$, а через G_{pq}^* - подпространство локально оптимальных сплайнов первой степени для функции $f(x)$, $x \in [p,q] \subset [a,b]$, $(S_1^*(x) = S_{1j}^*(x)$, $x \in h_j$, $j = 1,\dots,J-1$, $x_1 = p, x_I = q)$. Очевидно, что $G_{ab}^* \subset G_{ab} \subset C[a,b]$.

ТЕОРЕМА. Пусть функция $f(x) \in C[a,b]$ выпукла, и $S_1^* \in G_{ab}^*$, $S_1^* = S_{1i}^*(x)$, $x \in h_i$, $i = 1,\dots,I-1$, - локально оптимальный сплайн с числом узлов $I \geq 4$. Тогда локально оптимальный сплайн $S_1^{**} \in G_{x_2 x_{I-1}}^*$: $S_1^{**} \equiv S_1^*$, $x \in [x_2, x_{I-1}]$ является единственным наилучшим приближением функции $f(x)$ в пространстве $G_{x_2, x_{I-1}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 1 все узлы сплайна S_1^{**} уклонены от $f(x)$ на ε, а так как $f(x)$ выпукла, то каждый шаг сплайна S_1^{**} имеет по одной внутренней допустимой локальной опорной точке. Можно заметить, что совокупность звеньев сплайна S_1^{**} доставляет наилучшее чебышевское приближение [6] для $f(x)$, так как на каждом шаге узловые точки и внутренние допустимые локально опорные точки образуют чебышевский альтернанс [2]. Данное наи-

---

*) В случае, когда $\bar{G}_{ab}$ дифференцируема в точке x_i справа, понятия опорной справа и касательной справа прямых совпадают.

**) Во избежание возможных ассоциаций с наилучшим чебышевским приближением отметим, что последнее не есть приближение с заданной точностью.

лучшее чебышевское приближение к тому же является единственным [4]. Допустим существование некоторого другого допустимого сплайна $S_1 \in G_{x_2 x_{I-1}}$ с числом узлов J, $2 \le J < I-2$. Тогда величина приближения δ функции $f(x)$ сплайном S_1 удовлетворяет неравенству $\delta_J \le \delta \le \epsilon$, где δ_J - величина наилучшего чебышевского приближения для сплайнов с числом узлов, не большим J. С другой стороны, в силу свойств и единственности наилучшего чебышевского приближения [4] последовательность δ_J, $J = 2, 3, \ldots$, строго монотонна: $\delta_J > \delta_{J+1}$, $J = 2, 3, \ldots$, а так как по предположению $I - 2 > J$, то $\delta \ge \delta_I > \delta_{I-2}$, где δ_{I-2} - величина наилучшего чебышевского приближения сплайном S_1^{**}. Так как $\delta_{I-2} = \epsilon$, то $\delta > \epsilon$. Получено противоречие. Если $J = I-2$, то нарушается единственность наилучшего чебышевского приближения, а поэтому наилучшее приближение $S_1^{**} \in G^{*}_{x_2 x_{I-1}}$ единственно в $G_{x_2 x_{I-1}}$.

СЛЕДСТВИЕ I (единственность на $[a, x_{I-1}]$). Если, кроме условий теоремы, выполняется условие:

$$\Delta_{h_1}(a, S_1^*) = \Delta_{h_1}(x_2, S_1^*), \tag{1}$$

то локально оптимальный сплайн $S_1^{**} \in G^*_{a x_{I-1}}$: $S_1^{**} \equiv S_1^*$, $x \in [a, x_{I-1}]$, является единственным наилучшим приближением $f(x)$ в пространстве $G_{a\, x_{I-1}}$ $(I \ge 3)$.

Доказательство следует из того факта, что при выполнении (I) шаг h_1 сплайна S_1^* имеет три точки чебышевского альтернанса.

СЛЕДСТВИЕ 2 (существование линейно оптимального сплайна на $[a, b]$). При выполнении условий теоремы и условия (I) любой сплайн $S_1^* \in G^*_{ab}$ является наилучшим кусочно-линейным приближением функции $f(x)$ по критерию минимума числа узлов (на всем множестве допустимых сплайнов с заданной точностью приближения ϵ) в простарнстве $G_{ab}(I \ge 2)$.

Данный результат вытекает из следствия I, так как все сплайны из G^*_{ab}, удовлетворяющие (I), отличаются лишь последним звеном и имеют одно и то же число узлов.

СЛЕДСТВИЕ 3.(связь локально оптимального сплайна с наилучшим чебышевским приближением). Пусть выполнены условия теоремы для $I \ge 2$. Если $\epsilon = \delta_I$,

$\delta_I \geq 0$, где ϵ-погрешность аппроксимации $f(x)$ сплайном S_1^*, δ_I - величина наилучшего чебышевского приближения на множестве сплайнов с числом узлов, меньшим или равным I, то сплайн $S_1^* \in G_{ab}^* \subset G_{ab}$ является единственным наилучшим приближением как в смысле Чебышева, так и в смысле числа узлов в пространстве $C[a,b]$.

Вытекает из единственности наилучшего чебышевского приближения.

В заключение отметим, что условие (I) является определяющим для выбора сплайна из G_{ab} при аппроксимации выпуклых функций. Результаты данной работы допускают обобщение алгоритмов процесса кусочно-линейной аппроксимации и для класса непрерывных функций $C[a,b]$.

3. Алгоритм построения локально оптимального сплайна. Пусть найден i-й узел $S_1^*(x)$. Найдем (i+1)-й узел. Если $i+1<I$, то угловой коэффициент звена $S_{1i}^*(x)$ однозначно определяется допустимой локально опорной точкой, принадлежащей по лемме 2 полуинтервалу $[x_i, x_{i+1})$. По определению опорная точка ξ является точкой локального максимума функции $|\Delta_{h_i}(x, s_1^*)|$ и, следовательно, точкой локального экстремума функции $\Delta_{h_i}(x, s_1^*)$, $i = 1,\dots,I-2$.

Рассмотрим функцию $\Delta_{x_i b}(x, y)$, где $y(x) = y_i + L\cdot(x-x_i)$, которая представляет собой уклонение луча с угловым коэффициентом L, проведенного из i-го узла сплайна $S_1^*(x)$, от функции $f(x) \in C[a,b]$. Так как, согласно лемме 2, опорная точка обязательно существует $(i+1<I)$, то существует луч $\zeta(x) = L^*(x-x_i)+y_i$, угловой коэффициент которого совпадает с угловым коэффициентом звена $S_{1i}^*(x)$. Если $f(x) \in C^1[a,b]$, то $L^* = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=\xi}$, $\xi \in [x_i, b)$.

Таким образом, условия, необходимые для нахождения ξ, выглядят так:

$$\operatorname*{extr}_{x} \Delta_{x_i b}(x, y) = \Delta_{x_i b}(\xi, y) = \pm\, \epsilon. \qquad (2)$$

Следует заметить, что (2) справедливы и для более общего класса функций $f(x) \in C[a,b]$. Для гладкой функции $f(x) \in C^1[a\ b]$ условия (2) можно заменить на более слабые условия:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\Delta_{x_i b}(x,y) = 0, \\ |\Delta_{x_i b}(x, y)| = \varepsilon. \end{cases} \tag{3}$$

Из первого уравнения условий (3) следует:

$$\frac{d}{dx}\Delta_{x_i b}(x, y) = \frac{df(x)}{dx} - L = 0 \Rightarrow L = \frac{df}{dx}, \qquad x \in [\, x_i, b \,] .$$

Тогда

$$\Delta_{x_i b}(x, y) = f(x) - \frac{df}{dx}(x - x_i) - y_i. \tag{4}$$

С учетом (4) условия (3) эквивалентны последнему уравнению (3):

$$|\Delta_{x_i b}(x, y)| = \varepsilon. \tag{5}$$

Пусть точки x_j , $j = 1,\dots,J$, образуют решение уравнения (5). Каждой точке x_j соответствует вполне определенный угловой коэф - фициент $L_j = \dfrac{df(x_j)}{dx}$ луча $y_j(x) = L_j(x-x_i)-y_i$. Для простоты считаем, что все L_j разные, так как в случае совпадения каких-то угловых коэффициентов всегда можно оставить какой-то один, отбросив остальные с соответствующими точками x_j. Заметим, что (5) имеет хотя бы одно решение, например, $x = x_i$, так как $i+1 < I$.

Из множества точек x_j, $j = 1,\dots,J$, отбросим точки перегиба и локального минимума функции $|\Delta_{x_i b}(x, y_j)|$, $j = 1,\dots,J$, и обозначим оставшиеся через x_{J_k}, $k = 1,\dots,K \le J$. Для каждой точки x_{J_k} имеем соответствующий угловой коэффициент L_{J_k} , $k = 1,\dots$ $\dots,K \le J$, луча $y_{J_k}(x) = y_i + L_{J_k}(x - x_i)$.

Перебором лучей $y_{J_k}(x)$, $k = 1,\dots,K$, выберем лучи, удовлетворяющие условию:

$$|\Delta_{x_i x_{J_k}}(x, y_{J_k})| \le \varepsilon, \quad k = 1,\dots,K. \tag{6}$$

Обозначим их $y_{JKl}(x) = y_i + L_{JKl}(x-x_i)$, $l = 1,\dots,\mathcal{L} \le K \le J$. Множество точек x_{JKl}, $l=1,\dots,\mathcal{L}$, непусто, так как содержит,по крайней мере, опорную точку сплайна $S_i^*(x)$. Ограничение (6) проверяется в два шага.

I. Находится множество точек, удовлетворяющих уравнению:

$$\frac{d}{dx}\Delta_{x_i x_{J_k}}(x,\ y_{J_k}) = 0,\quad k = 1,\dots,K. \tag{7}$$

Пусть точки x_{Jkm}, $k=1,\dots,K$, $m=1,\dots,M$, удовлетворяют (7).

2. Для каждого k, $k = 1,\dots,K$, проверяется ограничение:

$$|\Delta_{x_i x_{J_k}}(x_{Jkm},\ y_{Jk})| \le \varepsilon,\quad m = 1,\dots,M\ . \tag{8}$$

Выберем те лучи, которые удовлетворяют (8), а значит, и (6). Таким образом, осталось $\mathcal{L}$: $1 \le \mathcal{L} \le K$ лучей.

Согласно лемме I $(i+1)$-й узел $(i+1 < I)$ сплайна $S_i^*(x)$ уклонен от $f(x)$ на ε. Поэтому для каждого l: $l = 1,\dots,\mathcal{L}$, ищем множество точек x_{JKln}, $n = 1,\dots, N$, удовлетворяющих уравнению:

$$|\Delta_{x_{JKl}b}(x,\ y_{JKl})| = \varepsilon\ ,\quad l = 1,\dots,\mathcal{L}, \tag{9}$$

причем $x_{JKln} < x_{JKl(n+1)}$, $n = 1,\dots,N-1$. Так как $i+1 < I$, то (9) имеет как минимум два корня для любого l. Для каждого l: $l=1,\dots$ $\dots,\mathcal{L}$, проверяем органичение

$$|\Delta_{x_{JKln}x_{JKl(n+1)}}(x,\ y_{JKl})| > \varepsilon,\quad n = 1,\dots,N-1. \tag{10}$$

Ограничение (I0) проверяется в два шага аналогично проверке ограничения (6). Для каждого l выберем из n точек x_{JKln}, $n=1,\dots,N$, одну точку с минимальным индексом $n = n_0$, удовлетворяющую (I0). Пусть число таких точек будет $N_0 \le \mathcal{L}$. Данные точки обязательно существуют, так как $i+1 < I$. Обозначим данные точки $x_{JK\mathcal{L}n_0}$, $n_0=1,\dots$ $\dots,N_0$.

ЛЕММА 3. $x_{i+1} = \max\limits_{n_0} x_{JK\mathcal{L}n_0}$, $i=1,\dots,I-2$. Согласно лемме 3, $x_{i+1}-x_i = \max\limits_{n_0} x_{JK\mathcal{L}n_0} - x_i$, $i=1,\dots,I-2$. Пусть $x_{JKl_0n_0} \equiv \max\limits_{n_0} x_{JK\mathcal{L}n_0}$, тогда $\Delta_{h_i}(x,S_i^*) \equiv \Delta_{x_i x_{JKl_0n_0}}(x,\ y_{JKl_0})$ и угловой коэффициент звена $S_{1i}^*(x)$ равен L_{JKl_0}, $y_{i+1} = y_i + L_{JKl_0}(x_{JKl_0n_0}-x_i)$, $i=1,\dots,I-2$.

Если $J\cdot K\cdot\mathcal{L}\cdot N_0 = 0$, то $x_{i+1} = x_I = b^0$, а $y_{i+1}=y_I$ выбирается произвольным образом из однопараметрического множества $\Sigma(y_I)$ при условии $|\Delta_{h_{I-1}}(x,\ y^*)| \le \varepsilon$, где

$$y^* = y_{I-1} + \frac{y_I - y_{I-1}}{x_I - x_{I-1}} \cdot (x - x_{I-1}) , \quad x \in [x_{I-1}, b] .$$

Авторы выражают глубокую благодарность Ю.С.Завьялову за постоянное внимание к данной работе и ряд важных замечаний, способствовавших ее улучшению.

Литература

1. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. -М.: Наука, 1980. - 352 с.

2. РЕМЕЗ Р.Е. Общие вычислительные методы чебышевского приближения. - Киев: Изд. АН УССР, 1957. - 454 с.

3. КЕТКОВ Ю.Л. Об оптимальных методах кусочно-линейной аппроксимации. -Изв. ВУЗов, Радиофизика, 1966, т.9, с.1202-1209.

4. ШУМИЛОВ Б.М. О локальной аппроксимации сплайнами первой степени. -В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 75). Новосибирск, 1978, с. 16-22.

5. ИСАЕВ В.К., СИТНИКОВ В.П., СУХНЕВ В.А. Автоматизированная система изготовления моделей-АСИМ. Итоги разработки и внедрения. -В кн.: Сплайн-функции в инженерной геометрии (Вычислительные системы, вып. 86). Новосибирск, 1981, с. 105-110.

6. БАХВАЛОВ Н.С. Численные методы. Т.1. - М.: Наука, 1973.

Поступила в ред.-изд.отд.
15 июля 1981 года