МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ В ЧИСЛЕННОМ АНАЛИЗЕ
(Вычислительные системы)
1983 год Выпуск 98

УДК 517.5

О ЛОКАЛЬНО-АППРОКСИМАЦИОННЫХ МОНОСПЛАЙНАХ НА РАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ

Б.М.Шумилов

В монографии [I] изучались моносплайны степени $n+1$, являющиеся остаточными членами приближения мономов $X_{n+1}(x) = x^{n+1}$ по формуле локальной аппроксимации сплайнами степени n вида

$$S_n(x) = \sum_{i=-n}^{N} b_i(X_{n+1}) B_n^i(x), \tag{1}$$

где $b_i(f) = \sum_{p=0}^{n} \alpha_{ip} f[\tau_{i0}, \tau_{i1}, \ldots, \tau_{ip}]$ и коэффициенты α_{ip} выбраны так, чтобы формула (I) была точна на многочленах степени n. Для случая равномерной бесконечно продолженной в обе стороны с шагом h сетки и точек τ_{ir}, $r = 0, 1, \ldots, n$, совпадающих при нечетных n с узлами сплайна x_j и при четных n с серединными точками $x_j + \frac{1}{2}h$ в носителе В-сплайна $B_n^i(x)$ - отрезке $[x_i, x_{i+n+1}]$, было высказано утверждение, что моносплайны $Z_{n+1}(x) = x^{n+1} - S_n(x)$ на каждом интервале $[x_j, x_{j+1}]$ с точностью до множителя h^{n+1} и аддитивной постоянной совпадают с многочленами Бернулли $n+1$-й степени $\beta_{n+1}(t)$, $t = \frac{1}{n}(x-x_j)$.

В настоящей заметке доказано, что

$$Z_{n+1}(x) = h^{n+1}(\beta_{n+1}(t) + C_{n+1}), \quad x_j \le x \le x_{j+1}, \tag{2}$$

где $C_{n+1} = 0$, если n четное, и

$$C_{n+1} = \int_{-1/2}^{1/2} \overline{\varphi}_0(\sigma)d\sigma + \frac{1}{n!} \sum_{p=2,4,\ldots,n-1} p\tilde{\varphi}_0^{(n-p)}(0)\tilde{\varphi}^{(p-1)}(0),$$

$$\bar{\psi}_0(\sigma) = (\sigma^2 - \frac{1}{4})(\sigma^2 - \frac{9}{4})\cdot\ldots\cdot(\sigma^2 - \frac{n^2}{4}),$$

$$\tilde{\psi}_0(\sigma) = \sigma(\sigma^2 - 1)\cdot\ \ldots\ \cdot(\sigma^2 - (\frac{n-1}{2})^2),$$

если n нечетное.

Введем следующие обозначения:

$$\phi_i(x) = (x - x_{i+1})\cdot\ \ldots\ \cdot(x - x_{i+n}),$$

$$\omega_i(x) = (x - \tau_{i0})\cdot\ \ldots\ \cdot(x - \tau_{in}),$$

$$M_{n+1}(x) = (-1)^{n+1}(n+1)\sum_{i=-n}^{N}\int_x^{\tau_i}\phi_i(\tau)d\tau\, B_n^i(x), \tag{3}$$

$$V_{n+1}(x) = \sum_{i=-n}^{N}\frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\phi_i^{(n-p)}(\tau_i)\,\omega_i^{(p)}(\tau_i)\, B_n^i(x),$$

где τ_i - произвольные значения аргумента.

В [2] было доказано, что $Z_{n+1}(x) = M_{n+1}(x) + V_{n+1}(x)$.

Будем предполагать сетку узлов равномерной бесконечно продолженной в обе стороны с шагом h. На такой сетке функции $\phi_i(x)$ и B-сплайны $B_n^i(x)$ получаются друг из друга сдвигом

$$\phi_i(x) = \phi_{i-1}(x-h),$$

$$B_n^i(x) = B_n^{i-1}(x-h).$$

Кроме того, В-сплайны являются четными функциями относительно точек $\xi_i = \frac{1}{n}(x_{i+1} + \ldots + x_{i+n}) = x_i + \frac{n+1}{2}h$, в которых они принимают максимальные значения. Функции $\phi_i(x)$ являются четными относительно точек ξ_i при n четном и нечетными при n нечетном. Положим в (3) $\tau_i = \xi_i$. Покажем, что функция $M_{n+1}(x)$ является периодической с периодом h. Действительно, в силу перечисленных свойств

$$M_{n+1}(x+h) = (-1)^{n+1}(n+1)\sum_i\int_{x+h}^{\xi_i}\phi_i(\tau)d\tau\, B_n^i(x+h) =$$

$$= (-1)^{n+1}(n+1) \sum_i \int_{x+h}^{\xi_{i-1}+h} \phi_{i-1}(\tau - h)d\tau \, B_n^{i-1}(x) =$$

$$= (-1)^{n+1}(n+1)\sum_i \int_{x}^{\xi_{i-1}} \phi_{i-1}(\tau)d\tau \, B_n^{i-1}(x) = M_{n+1}(x).$$

Приведем простейший пример такого рода сплайнов, когда параметр n равен нулю. В этом случае $B_0^i(x) = 1$ на промежутке $[x_i, x_{i+1})$ и $B_0^i(x) = 0$ вне его. Поэтому на $[x_j, x_{j+1})$ имеем

$$M_1(x) = -\int_{x}^{\xi_j} 1\cdot d\tau = x - \xi_j,$$

где в данном случае $\xi_j = x_j + \frac{1}{2}h$. Следовательно, $M_1(\xi_j) = 0 \ \forall j$.

Нетрудно убедиться, что это свойство сохраняется для всех четных n. В самом деле, заменяя индекс суммирования i на $k = j-i$, находим

$$M_{n+1}(\xi_j) = (-1)^{n+1}(n+1) \sum_k \int_{\xi_j}^{\xi_{j-k}} \phi_{j-k}(\tau)d\tau B_n^{j-k}(\xi_j) =$$

$$= (-1)^{n+1}(n+1) \sum_k \int_{\xi_j}^{\xi_j-kh} \phi_j(\tau+kh)d\tau \, B_n^j(\xi_j+kh) =$$

$$= (-1)^{n+1}(n+1) \sum_{k=1,2,\dots} \Big(\int_{\xi_j+kh}^{\xi_j} \phi_j(\tau)d\tau +$$

$$+ \int_{\xi_j-kh}^{\xi_j} \phi_j(\tau)d\tau\Big) B_n^j(\xi_j + kh).$$

Интегралы в скобках равны по абсолютной величине, а для четных n имеют противоположные знаки. Отсюда вытекает желаемый результат.

Получим выражение для производной функции $M_{n+1}(x)$. Из [2] следует, что

$$M'_{n+1}(x) = (-1)^{n+1}(n+1)\sum_i \int_x^{\xi_i} \phi_i(\tau)d\tau\, B_n^{i\,\prime}(x).$$

Перейдем здесь к В-сплайнам $n-1$-й степени по формуле (см. [I]) $B_n^{i\,\prime}(x) = \frac{1}{h}(B_{n-1}^{i}(x) - B_{n-1}^{i+1}(x))$. Тогда

$$M'_{n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{h}\sum_i\Big(\int_x^{\xi_i}\phi_i(\tau)d\tau - \int_x^{\xi_{i-1}}\phi_{i-1}(\tau)d\tau\Big)B_{n-1}^{i}(x).$$

Из определений ξ_i, $\phi_i(\tau)$ вытекают формулы

$$\xi_i = \xi_i^{n-1} + \frac{h}{2}, \quad \xi_{i-1} = \xi_i^{n-1} - \frac{h}{2},$$

$$\phi_i(\tau) = \phi_i^{n-1}(\tau)(\tau - x_{i+n}), \quad \phi_{i-1}(\tau) = (\tau - x_i)\phi_i^{n-1}(\tau),$$

где $\xi_i^{n-1} = \frac{1}{n-1}(x_{i+1} + \ldots + x_{i+n-1}) = x_i + \frac{n}{2}h$, $\phi_i^{n-1}(\tau) = (\tau - x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(\tau - x_{i+n-1})$. Подставляя их в выражение $M'_{n+1}(x)$ и учитывая равенство

$$\int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i^{n-1}}\phi_{i-1}(\tau)d\tau = \int_{\xi_i}^{\xi_i+\frac{h}{2}}\phi_i(\tau)d\tau,$$

получаем соотношение

$$M'_{n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{h}\sum_i\Big(-nh\int_x^{\xi_i^{n-1}}\phi_i^{n-1}(\tau)d\tau + \int_{\xi_i-\frac{h}{2}}^{\xi_i+\frac{h}{2}}\phi_i(\tau)d\tau\Big)B_{n-1}^{i}(x). \quad (4)$$

Вычислим интегралы с постоянными пределами, входящие в соотношение (4). Разлагая функцию $\phi_i(\tau)$ в окрестности точки ξ_i по формуле Тейлора, получем

$$\bar{c}_n = \int_{\xi_i-\frac{h}{2}}^{\xi_i+\frac{h}{2}}\phi_i(\tau)d\tau = \sum_{\alpha=0}^{n}\frac{\phi_i^{(n-\alpha)}(\xi_i)}{(n-\alpha+1)!}\Big(\frac{h}{2}\Big)^{n-\alpha+1}[1-(-1)^{n-\alpha+1}].$$

Если $\xi_i = \frac{1}{n}(x_{i+1}+\ldots+x_{i+n})$ и сетка узлов x_j равномерная с шагом h, то величины $\phi_i^{(n-\alpha)}(\xi_i) = r_\alpha$ независимо от индекса i и, кроме того, $r_\alpha = 0$ для α нечетных. Выражение в квадратных скобках обращается в нуль, если число $n-\alpha+1$ четное, и равно 2 – в противоположном случае. Следовательно, для нечетных n интегралы равны нулю независимо от индекса i.

Для случая четных n сделаем замену переменной интегрирования по формуле $\sigma = \frac{1}{h}(\tau - \xi_i)$. Тогда

$$\bar{c}_n = h\int_{-1/2}^{1/2} \phi_0(\sigma h+\xi_0)d\sigma = h^{n+1}\int_{-1/2}^{1/2}\left(\sigma^2-\frac{1}{4}\right)\left(\sigma^2-\frac{9}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sigma^2-\frac{(n-1)^2}{4}\right)d\sigma.$$

Окончательно получаем $M'_{n+1}(x) = (n+1)\left(M_n(x) - \frac{\bar{c}_n}{h}\right)$, где $\bar{c}_n = 0$, если n нечетное. Таким образом, производные моносплайна степени $n+1$ до порядка $n-1$ включительно являются непрерывными периодическими функциями с периодом h. Производная порядка n равна $M_{n+1}^{(n)}(x) = (n+1)!M_1(x) = (n+1)!(x-\xi_j^0)$, $x_j \le x \le x_{j+1}$.

Напомним некоторые свойства многочленов Бернулли (см. [3]):

$$\beta_{n+1}(t) = t^{n+1} + \ldots, \qquad 0 \le t \le 1,$$
$$\beta_{n+1}^{(r)}(0) = \beta_{n+1}^{(r)}(1), \qquad 0 \le r \le n-1,$$
$$\beta_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \text{ если } n \text{ четное.}$$

Этими условиями многочлен нечетной степени $n+1$ со старшим коэффициентом единица, очевидно, определяется единственным образом.

Отсюда вытекает, что для четных n

$$M_{n+1}(x) = h^{n+1}\beta_{n+1}(t), \quad x_j \le x \le x_{j+1}, \quad t = \frac{x-x_j}{h}. \tag{5}$$

Отметим еще, что $\beta'_{n+1}(t) = (n+1)\beta_n(t)$. Используя полученное ранее соотношение для производной моносплайна $M_{n+1}(x)$ и равенство (5) находим для четных n:

$$M_n(x) = h^n\beta_n(t) + \frac{\bar{c}_n}{h}, \quad x_j \le x \le x_{j+1}.$$

Предположим, что точки τ_{ir} расположены симметрично относительно точки ξ_i единообразно для всех i. Тогда

$$\frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\phi_i^{(n-p)}(\xi_i)\omega_i^{(p)}(\xi_i) =$$

$$=\frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\,\phi_{i-1}^{(n-p)}(\xi_i-h)\omega_{i-1}^{(p)}(\xi_i-h) =$$

$$=\frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\phi_{i-1}^{(n-p)}(\xi_{i-1})\omega_{i-1}^{(p)}(\xi_{i-1}) = \tilde{a}_n \quad \forall i.$$

Следовательно, $V_{n+1}(x) = \tilde{a}_n \sum_i B_n^i(x) = \tilde{a}_n$ независимо от x. Если при этом n четное, то в силу разной четности функции $\phi_i(x)$ и $\omega_i(x)$ относительно точек ξ_i имеем $\tilde{a}_n = 0$. При n нечетном, если $\tau_{ir} = x_{i+1}+rh$, $r = 0,1,\dots,n-1$, $\tau_{in} = \xi_i$, то $\omega_i(x) = (x-\xi_i)\,\phi_i(x)$. Следовательно, $\omega_i^{(p)}(\xi_i) = p\,\phi_i^{(p-1)}(\xi_i)$. Делая замену $\sigma = \frac{1}{h}(x-\xi_i)$ и учитывая четность функции $\phi_i(x)$ относительно точки ξ_i, нетрудно вычислить, что

$$\tilde{a}_n = \frac{h^{n+1}}{n!}\sum_{p=2,4,\dots,n-1} p\,\tilde{\phi}_0^{(n-p)}(0)\,\tilde{\phi}_0^{(p-1)}(0). \qquad (6)$$

Ранее [I] было доказано, что при таком расположении точек τ_{ir}, $r = 0,1,\dots,n-1$, коэффициенты α_{in} в (I) равны нулю. Следовательно, на самом деле точки τ_{in} в формулу (I) не входят, и их расположение можно выбирать из соображений удобства при вычислении величины $\tilde{a}_n$ из (6).

Итак, мы доказали, что справедлива следующая

ТЕОРЕМА. *В случае равномерной сетки между остаточными членами приближения мономов x^{n+1} по формуле (I) и многочленами Бернулли имеется зависимость, которая выражается формулой (2).*

Литература

I. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. -М.: Наука, 1980. - 352 с.

2. ШУМИЛОВ Б.М. Локальная аппроксимация сплайнами, точная на многочленах по заданной системе функционалов. -В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 87). Новосибирск, 1981, с. 25-34.

3. КОРНЕЙЧУК Н.П. Экстремальные задачи теории приближений. -М.: Наука, 1976. - 320 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
13 мая 1983 года