МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ В ЧИСЛЕННОМ АНАЛИЗЕ
(Вычислительные системы)

1983 год Выпуск 98

УДК 519.65

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ СПЛАЙНАМИ КЛАССА C^2

Ю.С. Волков

Пусть на каждом интервале $[t_j, t_{j+1}]$ разбиения δ: $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N+1} = b$ отрезка $[a,b]$ в точках x_k^j, $t_j = x_0^j < x_1^j < \ldots < x_n^j < t_{j+1}$ известны значения f_k^j $(f_n^j = f_0^{j+1})$ функции $f(x)$.

В настоящее время для интерполяции обычно используют сплайны дефекта I, степени не выше третьей, а применение сплайнов более высоких степеней, как правило, ограничивается равномерной сеткой. Это связано с тем, что матрицы систем уравнений для вычисления коэффициентов сплайна уже в случае четвертой и пятой степеней получаются пятидиагональными и, вообще говоря, не имеют диагонального преобладания, гарантирующего устойчивость их решения. С дальнейшим увеличением степени сплайна количество диагоналей в системе растет, а диагонального преобладания нет даже при равномерной сетке. Мы предлагаем решать задачу интерполяции сплайнами не дефекта I, а дефекта n, если степень равна $n+2$.

Пусть $S_{n+2}(x)$ - сплайн степени $n+2$ по разбиению δ дефекта n, т.е. гладкости C^2 (см. [I, 2]). Потребуем, чтобы сплайн $S_{n+2}(x)$ удовлетворял условиям интерполяции $S_{n+2}(x_k^j) = f_k^j$, $k = 0,\ldots,n$; $j = 0,\ldots,N$. Нетрудно видеть, что для построения сплайна необходимы еще два условия. Считаем, что они заданы в виде краевых (граничных) условий $S_{n+2}^{(\nu)}(a) = f^{(\nu)}(a) = f_a^{(\nu)}$, $S_{n+2}^{(\nu)}(b) = f^{(\nu)}(b) = f_b^{(\nu)}$ при $\nu=1$ или $\nu=2$. Если $f_0^0 = f_n^N$, то краевые условия можно брать в виде $S_{n+2}^{(r)}(a) = S_{n+2}^{(r)}(b)$, $r = 1,2$ (периодический сплайн). Заметим, что в частном случае при $n = 1$ получается обычный кубический сплайн класса C^2. Задача построения сплайна S_{n+2} (вычисление его коэффициентов) сводится к решению системы уравнений с трехдиагональной матрицей. При произвольной неравномерной сетке матрица имеет диагональное преобладание для сплайнов степени не выше четвертой. Однако на равномерной сетке диагональное преобладание имеется для любого n .

В §I данной работы мы обсуждаем интерполирование сплайнами четвертой степени класса C^2, при этом показывается, что матрица системы для построения сплайна $S_4(x)$ имеет диагональное преобладание при любой неравномерной сетке. Основной результат этого параграфа (теорема 2) - функции из $W^5_\infty[a,b]$ приближаются с пятым порядком по H , где H - максимальный шаг разбиения отрезка $[a,b]$. Параграф завершается численными примерами, демонстрирующими эффективность интерполирования сплайнами четвертой степени, без увеличения вычислительных затрат по сравнению с кубическими сплайнами. В §2 исследуются сплайны произвольной степени на равномерной сетке. Матрица системы для вычисления коэффициентов сплайна $S_{n+2}(x)$ имеет трехдиагональную структуру с доминируемой главной диагональю. В теореме 3 приведены асимптотические формулы для $S_{n+2}(x)$ и производных в периодическом случае, которые дают представление о поведении погрешности приближения функции из класса C^{n+4} и ее производных.

§I. Сплайны четвертой степени

Обозначим $M_j = S_4''(t_j)$, $j=0,1,\dots,N+1$; $L_j = S_4^{IV}(t_j+0)$, $h_j = t_{j+1}-t_j$, $j=0,1,\dots,N$. Сплайн $S_4(x)$ при $x\in[t_j, t_{j+1}]$, $j=0,1,\dots,N$, можно представить в виде

$$S_4(x) = (1-t)f_0^j + tf_0^{j+1} - \frac{h_j^2}{6}\, t(1-t)[(2-t)M_j + (1+t)M_{j+1}] +$$

$$+ \frac{h_j^4}{24}\, t(1-t)(1+t-t^2)L_j, \tag{1.1}$$

где $t = (x-t_j)/h_j$. Из условия интерполяции $S_4(x_1^j) = f_1^j$ находим

$$L_j = \frac{4}{h_j^2(1+\lambda_j\mu_j)}\{(1+\lambda_j)M_j + (1+\mu_j)M_{j+1} - 6\Delta_j\} , \tag{1.2}$$

где $\mu_j=(x_1^j-t_j)/h_j$, $\lambda_j=1-\mu_j$, $\Delta_j=[(f_2^j-f_1^j)/\lambda_j-(f_1^j-f_0^j)/\mu_j]/h_j^2$. Условия непрерывности первой производной сплайна в узлах t_j вместе с краевыми условиями дают систему уравнений для определения M_j, $j=0,\dots,N$, следующего вида

$$\left.\begin{aligned} &M_0 - B_0 M_1 = D_0 , \\ &-\lambda_{j-1} A_j M_{j-1} + [(1+2\mu_{j-1}) A_j + (1+2\lambda_j) B_j] M_j - \mu_j B_j M_{j+1} = D_j , \\ &-A_{N+1} M_N + M_{N+1} = D_{N+1} . \qquad\qquad j=1,\dots,N, \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

Здесь

$$D_j = -\frac{6}{\lambda_{j-1}} A_j \Delta_{j-1} + \frac{6}{h_{j-1}+h_j}\left(\frac{f_2^j - f_0^j}{h_j} - \frac{f_2^{j-1} - f_0^{j-1}}{h_{j-1}}\right) - \frac{6}{\mu_j} B_j \Delta_j ,$$

$$A_j = \frac{\lambda_{j-1}}{1+\lambda_{j-1}\mu_{j-1}} \cdot \frac{h_{j-1}}{h_{j-1}+h_j} , \quad B_j = \frac{\mu_j}{1+\lambda_j \mu_j} \cdot \frac{h_j}{h_{j-1}+h_j} , \quad j = 1,\dots,N .$$

Для краевых условий с заданной первой производной ($\nu = 1$)

$$B_0 = \frac{\mu_0}{1+2\lambda_0} , \quad D_0 = \frac{1+\lambda_0\mu_0}{(1+2\lambda_0)\mu_0 h_0}\left(\frac{f_1^0 - f_0^0}{\mu_0 h_0} - f_a'\right) - \frac{\mu_0(1+\lambda_0)}{1+2\lambda_0}\Delta_0 ,$$

$$A_{N+1} = \frac{\lambda_N}{1+2\mu_N} , \quad D_{N+1} = \frac{1+\lambda_N\mu_N}{(1+2\mu_N)\lambda_N h_N}\left(f_b' - \frac{f_2^N - f_1^N}{\lambda_N h_N}\right) - \frac{\lambda_N(1+\mu_N)}{1+2\mu_N}\Delta_N ,$$

а для условий при $\nu = 2$: $B_0 = A_{N+1} = 0$, $D_0 = f_a''$, $D_{N+1} = f_b''$.

Матрицы в обоих случаях трехдиагональные, с доминируемой главной диагональю. Следовательно, справедлива следующая

ТЕОРЕМА I. Интерполяционный сплайн $S_4(x)$ всегда существует и единствен.

Перейдем теперь к исследованию погрешности интерполяции. Обозначим $f_j'' = f''(t_j)$, $j = 0,1,\dots, N+1$; $H = \max\limits_j \{\mu_j h_j , \lambda_j h_j\}$,

$\rho = \max\limits_j \{\lambda_j/\mu_j , \mu_j/\lambda_j\}$.

ТЕОРЕМА 2. Если $S_4(x)$ интерполирует функцию $f(x) \in W_\infty^5[a,b]$, то

$$\|S_4^{(r)} - f^{(r)}\|_C \le KH^{5-r}\|f^V\|_\infty , \quad r = 0,1,2, \tag{1.4}$$

причем К - константа, зависящая только от ρ.

ЛЕММА I. Если $S_4(x)$ интерполирует функцию $f(x) \in W_\infty^5[a,b]$, то

$$|M_j - f''_j| \leq \frac{2(3+\rho)}{45} H^3 \|f^V\|_\infty, \quad j = 0,1,\dots,N+1. \tag{1.5}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы I. Рассмотрим, например, случай граничных условий $\nu = 2$. Переходя в уравнениях (I.3) к неизвестным $Q_j = M_j - f''_j$, имеем

$$\left. \begin{aligned} & Q_0 = 0, \\ & -\lambda_{j-1} A_j Q_{j-1} + [(1+2\mu_{j-1})A_j + (1+2\lambda_j)B_j]Q_j - \mu_j B_j Q_{j+1} = d_j, \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad j=1,\dots,N, \\ & Q_{N+1} = 0, \end{aligned} \right\} \tag{1.6}$$

где $d_j = D_j + \lambda_{j-1} A_j f''_{j-1} - [(1+2\mu_{j-1})A_j + (1+2\lambda_j)B_j]f''_j + \mu_j B_j f''_{j+1}$. Используя формулу Тейлора в точке t_j, получаем

$$d_j = -\frac{A_j}{4}\mu^3_{j-1}\lambda_{j-1}h^3_{j-1}\int_0^1 \tau^2[2-\mu_{j-1}(1+\mu_{j-1})\tau^2]f^V(t_{j-1}+\tau\mu_{j-1}h_{j-1})d\tau -$$

$$-\frac{A_j}{4}\lambda^3_{j-1}h^3_{j-1}\int_0^1 \tau^2[(\lambda_{j-1}+\lambda^2_{j-1}\mu_{j-1}+1)\tau^2 - 4(1+\lambda_{j-1}\mu_{j-1})\tau +$$

$$+ 2(1+2\mu_{j-1})]f^V(t_j - \tau\lambda_{j-1}h_{j-1})d\tau + \frac{B_j}{4}\mu^3_j h^3_j \int_0^1 \tau^2[(\mu_j + \mu^2_j\lambda_j + 1)\tau^2 -$$

$$- 4(1+\mu_j\lambda_j)\tau + 2(1+2\lambda_j)]f^V(t_j + \tau\mu_j h_j)d\tau +$$

$$+\frac{B_j}{4}\lambda^3_j\mu_j h^3_j \int_0^1 \tau^2[2-\lambda_j(1+\lambda_j)\tau^2]f^V(t_{j+1}-\tau\lambda_j h_j)d\tau.$$

Применяя к интегралам неравенство Гёльдера, находим

$$|d_j| \leq \frac{1}{60}\{A_j\lambda_{j-1}(1+3\mu_{j-1})h^3_{j-1} + B_j\mu_j(1+3\lambda_j)h^3_j\}\|f^V\|_\infty.$$

Так как матрица системы (I.6) имеет диагональное преобладание, то в силу следствия Д.I из [2] имеем

$$|Q_j| \leq \frac{1}{180}\max_j \frac{A_{j-1}\lambda_{j-1}(1+3\mu_{j-1})h^3_{j-1} + B_j\mu_j(1+3\lambda_j)h^3_j}{A_{j-1}\mu_{j-1} + B_j\lambda_j}\|f^V\|_\infty \leq$$

$$\le \frac{1}{180}\max_j \left\{ \left(\frac{\lambda_{j-1}}{\mu_{j-1}} + 3\lambda_{j-1}\right)h^3_{j-1},\ \left(\frac{\mu_j}{\lambda_j} + 3\mu_j\right)h^3_j \right\} \|f^V\|_\infty \le \frac{2(3+\rho)}{45} H^3 \|f^V\|_\infty .$$

Таким же образом устанавливаются оценки (I.5) и для других граничных условий. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2. Воспользуемся стандартной техникой получения оценок погрешностей, развитой в [2] для кубических сплайнов. Из формул (I.I) и (I.2) для $x \in [t_j, t_{j+1}]$, $j = 0,\dots,N$, следует

$$|S''_4(x) - f''(x)| \le \left| \left\{1 - t - 2\frac{t(1-t)}{1+\lambda_j\mu_j}(1+\lambda_j)\right\}Q_j + \left\{t - 2t(1-t)\frac{1+\mu_j}{1+\lambda_j\mu_j}\right\}Q_{j+1} \right| +$$

$$+ \left| \frac{2t(1-t)}{1+\lambda_j\mu_j}[6\Delta_j - (1+\lambda_j)f''_j - (1+\mu_j)f''_{j+1}] + (1-t)f''_j + tf''_{j+1} - f''(x) \right| .$$

Применяя формулу Тейлора в точке t_j, а затем неравенство Гёльдера, получаем

$$|S''_4(x) - f''(x)| \le |Q_j| + |Q_{j+1}| + \frac{th_j^3}{6}\left[\frac{8}{5}(1-t) + 1 + t^2\right]\|f^V\|_\infty \le \frac{4\rho+27}{45}\|f^V\|_\infty$$

и, следовательно, с учетом леммы I выводим (I.4) при $r = 2$. Далее, используя теорему Ролля, устанавливаем оценки (I.4) для $r = 0, 1$. Доказательство закончено.

При выводе оценок (I.4) мы не стремились прийти к точной константе K, потому что нам не удалось получить в (I.5) константу, не зависящую от соотношения соседних шагов сетки ρ. Однако численные эксперименты для различных неравномерных сеток показывают, что в действительности зависимость от ρ наблюдается только в отклонениях третьей и четвертой производных.

В заключение параграфа приведем некоторые численные результаты, иллюстрирующие теоретические оценки погрешностей. В табл. I приведены погрешности интерполяции функций $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^{-10x}$, $f_3(x) = \sin(\pi x)$, $f_4(x) = 1/(1+100(x-0,5)^2)$ и их производных на отрезке $[0,1]$ при равномерном расположении узлов интерполяции с шагом h. В качестве граничных условий берется первая производная на концах отрезка $[0,1]$. Здесь обозначено $R_r = \max_{x\in\Delta}|f^{(r)}(x) - S_4^{(r)}(x)|$, $r = 0,1,2,3,4$, где Δ - равномерная сетка на $[0,1]$ с шагом $h/10$.

Таблица I

h	$f_1(x) = \exp(x)$ R$_0$	R$_1$	R$_2$	R$_3$	R$_4$	$f_2(x) = \exp(-10x)$ R$_0$	R$_1$	R$_2$	R$_3$	R$_4$
0.I	I.3·IO^{-7}	4.2·IO^{-6}	2.I·IO^{-4}	I.2·IO^{-2}	2.8·IO^{-1}	I.3·IO^{-3}	4.I·IO^{-2}	3.4	2I6	6.3·IO^{3}
0.05	4.5·IO^{-9}	3.0·IO^{-7}	2.8·IO^{-5}	3.I·IO^{-3}	I.5·IO^{-1}	7.5·IO^{-5}	4.6·IO^{-3}	6.5·IO^{-1}	78	4.0·IO^{3}
0.025	I.5·IO^{-10}	2.I·IO^{-8}	3.6·IO^{-6}	8.I·IO^{-4}	7.5·IO^{-2}	3.3·IO^{-7}	4.5·IO^{-4}	I.5·IO^{-2}	24	2.4·IO^{3}
0.0I25	5.I·IO^{-12}	I.4·IO^{-9}	4.5·IO^{-7}	2.I·IO^{-4}	3.8·IO^{-2}	I.3·IO^{-9}	3.6·IO^{-5}	2.0·IO^{-3}	6.7	I.3·IO^{3}

h	$f_3(x) = \sin(\pi x)$ R$_0$	R$_1$	R$_2$	R$_3$	R$_4$	$f_4(x) = 1/(100(x-0{,}5)^2)$ R$_0$	R$_1$	R$_2$	R$_3$	R$_4$
0.I	I.3·IO^{-5}	4.2·IO^{-4}	2.4·IO^{-2}	I.4	32	4.0 IO^{-2}	I.3	6I	4.7 IO^{3}	I.9·IO^{5}
0.05	5.2·IO^{-7}	3.4·IO^{-5}	3.2·IO^{-3}	3.6·IO^{-1}	I7	3.0·IO^{-3}	I.8·IO^{-1}	4I	5.5·IO^{3}	2.9·IO^{5}
0.025	I.8·IO^{-8}	2.5·IO^{-6}	4.I·IO^{-4}	9.3·IO^{-2}	8.5	2.7·IO^{-4}	3.4·IO^{-2}	9.8	2.2·IO^{3}	I.8·IO^{5}
0.0I25	5.9·IO^{-10}	I.6·IO^{-7}	5.I·IO^{-5}	2.3·IO^{-2}	4.3	I.2·IO^{-5}	3.4·IO^{-3}	I.I	4.7·IO^{2}	I.0·IO^{4}

Результаты интерполяции этих же функций кубическими сплайнами приведены в [2, табл. 2.6]. Сопоставление таблиц показывает существенное увеличение точности интерполяции сплайнами четвертой степени, в то время как вычислительные затраты примерно равны (в обоих случаях для решения системы используется алгоритм прогонки, причем в случае кубических сплайнов размерность матрицы в два раза больше).

§2. Сплайны произвольной степени на равномерной сетке

Пусть $m_j = S'_{n+2}(t_j)$, $j = 0,1,\dots, N+1$, $h = (b-a)/n(N+1)$. Тогда при $x \in [t_j, t_{j+1}]$ сплайн $S_{n+2}(x)$ можно записать

$$S_{n+2}(x) = Q_0^n(t)hm_j + Q_1^n(t)hm_{j+1} + \sum_{k=0}^{n} P_k^n(t) f_k^j , \tag{2.1}$$

где

$$Q_0^n(t) = \frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot n!} P^n(t)(t-n), \qquad Q_1^n(t) = \frac{1}{n\cdot n!} tP^n(t),$$

$$P_0^n(t) = \frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot n!}\left(\frac{1}{n} + H_n\right)\left(t + \frac{1}{\frac{1}{n}+H_n}\right)\frac{P^n(t)(t-n)}{t},$$

$$P_k^n(t) = \frac{(-1)^{n+1}}{k(n-k)n!}\binom{n}{k}\frac{tP^n(t)(t-n)}{(t-k)}, \qquad k = 1,2,\dots,n-1,$$

$$P_n^n(t) = -\frac{1}{n\cdot n!}\left(\frac{1}{n} + H_n\right)\left(t-n-\frac{1}{\frac{1}{n}+H_n}\right)\frac{tP^n(t)}{(t-n)},$$

$$P^n(t) = t(t-1)\cdot\ldots\cdot(t-n), \qquad H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}, \qquad t = \frac{x-t_j}{h}.$$

Система для определения m_j получается из требования непрерывности S''_{n+2} в узлах t_j:

$$\frac{(-1)^{n+1}}{2n} m_{j-1} + \left(\frac{1}{n} + H_n\right)m_j + \frac{(-1)^{n+1}}{2n} m_{j+1} = (-1)^{n+1}\left(\frac{2}{n} + H_n\right)\frac{f_0^{j+1} - f_0^{j-1}}{2nh} +$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\frac{n}{k(n-k)}\binom{n}{k}\frac{f_k^j-f_{n-k}^{j-1}}{2kh}, \quad j=1,\dots,N, \tag{2.2}$$

и уравнений

$$m_0+a_0m_1=d_0, \qquad a_{N+1}m_N+m_{N+1}=d_{N+1}, \tag{2.3}$$

где коэффициенты a_0, a_{N+1}, d_0, d_{N+1} определяются краевыми условиями. Матрица системы (2.2), (2.3) имеет трехдиагональную структуру с доминируемой главной диагональю. Следовательно, сплайн $S_{n+2}(x)$ на равномерной сетке при любом n существует и единствен.

Исследуем точность приближения такими сплайнами. Предварительно приведем несколько комбинаторных тождеств, которые нам потребуются.

ЛЕММА 2. При $n\geq 1$ справедливы тождества

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^p\binom{n}{k}=0, \quad p=0,1,\dots,n-1,$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}k^n\binom{n}{k}=n!,$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(\frac{n-k}{n}\right)^p\frac{1}{k}\binom{n}{k}=H_n-\frac{p}{n}, \quad p=0,1,\dots,n; \; H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Считаем, что $0^0=1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этих тождеств нетрудно получить методом индукции. В первых двух тождествах индукция ведется по n, а последнее доказывается индукцией по p. Некоторые частные случаи ($p=0,1$) этих тождеств приведены в [3, с.18].

ТЕОРЕМА 3. Пусть $S_{n+2}(x)$ и $f(x)$ периодические с периодом $b-a$. Тогда если $f(x)\in C^{n+4}(-\infty,\infty)$, то

$$S_{n+2}^{(r)}(x)=f^{(r)}(x)+\varphi_n^{(r)}(t)h^{n-r+3}f^{(n+3)}(x)+O(h^{n-r+4}), r=0,\dots,n+2, \tag{2.4}$$

где

$$\varphi_n(t)=\begin{cases}-\frac{1}{(n+3)!}tP^n(t)(t-n), & n \text{ нечетно},\\ \frac{1}{(n+3)!}\left[\frac{n}{H_n}-t(t-n)\right]P^n(t), & n \text{ четно},\end{cases}$$

$$P^n(t) = t(t-1)\cdot\ldots\cdot(t-n), \quad t = (x-t_j)/h, \quad 0 \le t \le n \, .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуя [2, с. 229-230], методом неопределенных коэффициентов находим

$$m_j = f'(t_j) + \alpha_n h^{n+2} f^{(n+3)}(t_j) + O(h^{n+3}) \qquad (2.5)$$

с коэффициентом

$$\alpha_n = \begin{cases} 0, & n \text{ нечетно,} \\ \dfrac{n \cdot n!}{H_n(n+3)!}, & n \text{ четно.} \end{cases}$$

Используя (2.I), (2.5), разложение Тейлора в точке $x = t_j + th$ и лемму 2, устанавливаем (2.4).

Теорема 3 дает исчерпывающую характеристику погрешности приближения периодическим сплайном $S_{n+2}(x)$. Заметим, что с увеличением n величина главного члена погрешности приближается к величине погрешности при интерполяции многочленами Лагранжа степени $n+2$ [4]. Поэтому рассмотренная нами конструкция сплайна наиболее эффективна при сравнительно небольших n. При этом погрешность интерполяции будет существенно меньше по сравнению с интерполяцией Лагранжа.

Автор выражает признательность В.Л.Мирошниченко за полезные обсуждения результатов данной работы.

Литература

I. SCHUMAKER L.L. Spline Function.Basic Theory.- New York: Wiley,1981.- 553 p.

2. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. -М.: Наука, 1980. - 352 с.

3. ГРАДШТЕЙН И.С., РЫЖИК И.М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. -М.: Физматгиз, 1963. - 1100 с.

4. БАХВАЛОВ Н.С. Численные методы. -М.: Наука, 1973. - 631 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
20 мая 1983 года