МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ В ЧИСЛЕННОМ АНАЛИЗЕ
(Вычислительные системы)

1983 год Выпуск 98

УДК 519.651

О ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ КУБИЧЕСКИМИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ СПЛАЙНАМИ. II

В.Л.Мирошниченко

Данная статья является продолжением работы [1]. Все основные обозначения сохранены, нумерация теорем и лемм продолжена.

Напомним, что в [1] установлены оценки погрешности приближения кубическим интерполяционным сплайном $S(x)$ второй производной $f''(x)$ функции $f(x) \in W^4_\infty[a,b]$ для четырех типов краевых условий. Теперь мы изучим вопрос о точности приближения $f(x)$ и $f'(x)$. Заметим, что для краевых условий типов I-III при $f(x) \in W^4_\infty[a,b]$ (или $f(x) \in C^2W^4_{\Delta,\infty}[a,b]$) в [2] найдены точные оценки

$$\|S(x) - f(x)\|_C \le \frac{5}{384} H^4 \|f^{IV}\|_\infty , \tag{1}$$

$$\|S'(x) - f'(x)\|_C \le \frac{1}{24} H^3 \|f^{IV}\|_\infty . \tag{2}$$

Поэтому здесь мы рассматриваем только граничные условия типа IV, т.е. когда $S'''(x_p+0) = S'''(x_p-0)$, $p=1, N-1$. Для этого случая в литературе отсутствуют оценки с постоянными независящими от сетки Δ. В [2] получены оценки с такими же постоянными, как в (1),(2), но при ограничениях $h_0/h_1 \le \gamma^*_r$, $h_{N-1}/h_{N-2} \le \gamma^*_r$, $\gamma^*_0 = 0.61803$, $\gamma^*_1 = 0.35321$ ($r = 0$ для оценки (1), $r = 1$ для (2)).

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть кубический сплайн $S(x)$ интерполирует в узлах сетки Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$, $N \ge 3$, функцию $f(x) \in W^4_\infty[a,b]$. Если $S(x)$ удовлетворяет краевым условиям типа IV, то

$$\|S(x) - f(x)\|_{C[x_i,x_{i+1}]} \le \frac{K_0(i,N)}{384} H^4 \|f^{IV}\|_\infty, \quad (3)$$

$$\|S'(x)-f'(x)\|_{C[x_i,x_{i+1}]} \le K_1(i,N)H^3 \|f^{IV}\|_\infty , \quad (4)$$

$$i = 0,1,\ldots,N-1,$$

где значения постоянных $K_r(i,N)$, $r = 0,1$, даны в табл. I,2.

Таблица I

Значения $K_0(i,N)$

i	N=3	N=4	N=5	N≥6
i=0,N-1	16	15,77	15,67	15,67
i=1,N-2	9	7,02	6,63	6,56
2≤i≤N-3	–	–	5,80	5,67

Таблица 2

Значения $K_1(i,N)$

i	N=3	N=4	N=5	N≥6
i=0,N-1	1/4	2/9	13/60	2/9
i=1,N-2	1/12	5/72	1/15	1/15
2≤i≤N-3	–	–	1/20	7/144

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сформулированной теоремы излагается в §2. В §I приводятся вспомогательные сведения. Отметим, что в ходе доказательства теоремы 2 используется ряд новых технических приемов, по сравнению с обычной техникой вывода оценок погрешности кубической сплайн-интерполяции [2].

Постоянные $K_r(i,3)$, $r=0,1$; $K_1(i,4)$, $K_1(i,5)$ в оценках (3), (4) неулучшаемы. Что касается остальных постоянных, то при каждом фиксированном N их можно улучшить, но очень незначительно. Из локальных свойств кубических сплайнов [2] следует, что при больших N для далеких от концов отрезка $[a,b]$ промежутков $[x_i, x_{i+1}]$ постоянные $K_0(i,N)$, $K_1(i,N)$ должны быть близки соответственно к 5 и I/24. Интересен следующий вопрос: можно ли при каких-либо N и i получить оценки (3), (4) с постоянными $K_0(i,N) = 5$, $K_1(i,N) = I/24$? В некоторой мере ответ на него дает

ТЕОРЕМА 3. Пусть сетка Δ равномерная с шагом $h=(b-a)/N$, где $N \ge 6$ четно. Тогда существует функция $\tilde{f}(x) \in W^4_\infty[a,b]$ такая, что

$$\|S(\tilde f;x) - \tilde f(x)\|_{C[x_i,x_{i+1}]} > \frac{5}{384} h^4 \|\tilde f^{IV}\|_\infty, \quad i=3,\dots,N-4, \tag{5}$$

$$\|S(\tilde f;x) - \tilde f(x)\|_{C[x_k,x_{k+1}]} > \frac{5.38}{384} h^4 \|\tilde f^{IV}\|_\infty, \quad k=2,N-3, \tag{5.1}$$

$$|S'(\tilde f;x_i) - \tilde f'(x_i)| > \frac{1}{24} h^3 \|\tilde f^{IV}\|_\infty, \quad i=3,\dots,N-3, \tag{6}$$

$$|S'(\tilde f;x_k) - \tilde f'(x_k)| > \frac{15}{13\cdot 24} h^3 \|\tilde f^{IV}\|_\infty, \quad k = 2,N-2, \tag{6.1}$$

где $S(\tilde f;x)$ - кубический сплайн, интерполирующий $\tilde f(x)$ в узлах $x_i \in \Delta$ и удовлетворяющий краевым условиям типа IУ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы излагается в §3. Оценки (5)-(6.I) дают нижние грани для постоянных $K_r(i,N)$, $2 \le i \le N-3$, которые не могут достигаться на классе $W^4_\infty[a,b]$. Их сравнение с данными в табл. I,2 показывает, на наш взгляд, нецелесообразность дальнейшей работы по уточнению постоянных в оценках (3), (4) при условии $f(x) \in W^4_\infty[a,b]$.

Отметим, что теорема 2 остается в силе, если вместо $f(x) \in W^4_\infty[a,b]$ потребовать $f(x) \in C^2W^4_{\Delta',\infty}[a,b]$, где $\Delta' = \Delta \setminus \{x_1, x_{N-1}\}$.

§I. Вспомогательные результаты

Обозначим $m_i = S'(x_i)$, $i = 0,\dots,N$. Согласно [2, с.98] эти величины удовлетворяют системе

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1^2 m_0 + (\lambda_1-\mu_1)m_1 - \mu_1^2 m_2 = c_0, \\ &\lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \mu_i m_{i+1} = c_i, \ i=1,2,\dots,N-1, \\ &-\lambda_{N-1}^2 m_{N-2} + (\mu_{N-1}-\lambda_{N-1})m_{N-1} + \mu_{N-1}^2 m_N = c_N, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где

$$c_0 = 2\left(\lambda_1^2 \frac{f_1-f_0}{h_0} - \mu_1^2 \frac{f_2-f_1}{h_1}\right),$$

$$c_i = 3\left(\mu_i \frac{f_{i+1}-f_i}{h_i} + \lambda_i \frac{f_i-f_{i-1}}{h_{i-1}}\right), \qquad i = 1,2,\ldots,N-1,$$

$$c_N = 2\left(\mu_{N-1}^2 \frac{f_N-f_{N-1}}{h_{N-1}} - \lambda_{N-1}^2 \frac{f_{N-1}-f_{N-2}}{h_{N-2}}\right).$$

Выполняя в (7) замену неизвестных по формуле $m_i = f_i' + q_i$, получаем

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1^2 q_0 + (\lambda_1-\mu_1)q_1 - \mu_1^2 q_2 = \tilde{c}_0, \\ &\lambda_i q_{i-1} + 2q_i + \mu_i q_{i+1} = \tilde{c}_i, \quad i=1,2,\ldots,N-1, \\ &-\lambda_{N-1}^2 q_{N-2} + (\mu_{N-1}-\lambda_{N-1})q_{N-1} + \mu_{N-1}^2 q_N = \tilde{c}_N, \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

где

$$\tilde{c}_0 = c_0 - \lambda_1^2 f_0' - (\lambda_1-\mu_1)f_1' + \mu_1^2 f_2',$$

$$\tilde{c}_i = c_i - \lambda_i f_{i-1}' - 2f_i' - \mu_i f_{i+1}', \quad i = 1,2,\ldots,N-1,$$

$$\tilde{c}_N = c_N + \lambda_{N-1}^2 f_{N-2}' - (\mu_{N-1}-\lambda_{N-1})f_{N-1}' - \mu_{N-1}^2 f_N'.$$

ЛЕММА 4. Если $f(x) \in W_\infty^4[a,b]$, то

$$\tilde{c}_0 = \frac{1}{6}\lambda_1^2 h_0^3 \int_0^1 \tau^2(3-2\tau) f^{IV}(x_0+\tau h_0)\,d\tau +$$

$$+ \frac{1}{6}\mu_1^2 h_1^3 \int_0^1 (1-\tau)^2(1+2\tau) f^{IV}(x_1+\tau h_1)\,d\tau,$$

$$\tilde{c}_i = \frac{1}{2}\lambda_i h_{i-1}^3 \int_0^1 \tau^2(1-\tau) f^{IV}(x_{i-1}+\tau h_{i-1})\,d\tau -$$

$$-\frac{1}{2}\mu_i h_i^3\int_0^1 \tau(1-\tau)^2 f^{IV}(x_i+\tau h_i)d\tau, \quad i=1,2,\dots,N-1,$$

$$\tilde{c}_N = \frac{1}{6}\lambda_{N-1}^2 h_{N-2}^3\int_0^1 \tau^2(2\tau-3)f^{IV}(x_{N-2}+\tau h_{N-2})d\tau -$$

$$-\frac{1}{6}\mu_{N-1}^2 h_{N-1}^3\int_0^1 (1-\tau)^2(1+2\tau)f^{IV}(x_{N-1}+\tau h_{N-1})d\tau.$$

Формула для $\tilde{c}_i$, $i=1,2,\dots,N-1$, выведена в [2, с.II2]. Таким же способом находятся формулы для $\tilde{c}_0$, $\tilde{c}_N$.

ЛЕММА 5. Если $f(x)\in W_\infty^4[a,b]$, то

$$|q_i| \le K(i,N)H^3\|f^{IV}\|_\infty, \quad i=0,1,\dots,N; \quad N\ge 3, \tag{9}$$

где

$$K(i,N) = \begin{cases} K_1(i,N), & i=0,1,\dots,[N/2], \\ K_1(N-i,N), & i=[N/2]+1,\dots,N \end{cases}$$

($K_1(j,N)$ даны в табл. 2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $3\le N\le 5$ получение оценок (9) не встречает принципиальных затруднений, так как в этом случае величины q_i могут быть найдены в явном виде из системы (8). Рассмотрим в качестве примера случай $N=5$. При $N=3$, 4 рассуждения совершенно аналогичны, а выкладки более просты. В силу симметрии достаточно оценить $|q_i|$ при $i=0,I,2$. Из (8) для $N=5$ имеем $q_2 = \tilde{\Delta}_1^{-1}\{(2-\mu_3\lambda_4)[\tilde{c}_2-\lambda_2(\lambda_1\tilde{c}_1-\tilde{c}_0)] - \mu_2[\tilde{c}_3-\mu_3(\mu_4\tilde{c}_4-\tilde{c}_5)]\}$, где $\tilde{\Delta}_1 = (2-\mu_3\lambda_4)(2-\mu_1\lambda_2)-\mu_2\lambda_3$. Применяя лемму 4, находим

$$q_2 = \frac{1}{6\tilde{\Delta}_1}\Big\{(2-\mu_3\lambda_4)[\lambda_1^2\lambda_2 h_0^3\int_0^1 \tau^3 f^{IV}(x_0+\tau h_0)d\tau +$$

$$+\lambda_2 h_1^3\int_0^1 [3\tau^2(1-\tau)+\mu_1(1-\tau)^2(\mu_1+2\tau+\lambda_1\tau)]f^{IV}(x_1+\tau h_1)d\tau -$$

$$- 3\mu_2 h_2^3 \int_0^1 [(2-\mu_3\lambda_4)\tau(1-\tau)^2 + 3\mu_2\tau^2(1-\tau)] f^{IV}(x_2+\tau h_2)d\tau +$$

$$+ \mu_2\mu_3 h_3^3 \int_0^1 [3\tau(1-\tau)^2 + \lambda_4\tau^2(3-2\tau-\mu_4\tau)] f^{IV}(x_3+\tau h_3)d\tau +$$

$$+ \mu_2\mu_3\mu_4^2 h_4^3 \int_0^1 (1-\tau)^3 f^{IV}(x_4+\tau h_4)d\tau .$$

Отсюда, учитывая неотрицательность коэффициентов при $f^{IV}(x_i+\tau h_i)$ в подынтегральных выражениях, нетрудно получить

$$|q_2| \le \frac{1}{24}\|f^{IV}\|_\infty \tilde{r}_2(h_0,h_1,h_2,h_3,h_4), \tag{10}$$

где

$$\tilde{r}_2 = \tilde{\Delta}_1^{-1}[\lambda_2 h_1(2-\mu_3\lambda_4)(h_1^2+h_2^2+h_0h_1) + \mu_2\mu_3 h_3(h_2^2+h_3^2+h_3h_4)] ;$$

Так как $\dfrac{\partial\tilde{r}_2}{\partial h_0} \ge 0$ и $\dfrac{\partial\tilde{r}_2}{\partial h_4} \ge 0$, то

$$\tilde{r}_2(h_0,h_1,h_2,h_3,h_4) \le \tilde{r}_2(H,h_1,h_2,h_3,H).$$

Далее можно проверить, что

$$\tilde{r}_2(H,H,h_2,h_3,H) - \tilde{r}_2(H,h_1,h_2,h_3,H) \ge 0,$$

$$\tilde{r}_2(H,H,h_2,H,H) - \tilde{r}_2(H,H,h_2,h_3,H) \ge 0,$$

$$\tilde{r}_2(H,H,h_2,H,H) \le \tilde{r}_2(H,H,H,H,H) = 6H^3/5 .$$

Таким образом, $\tilde{r}_2(h_0,h_1,h_2,h_3,h_4) \le 6H^3/5$, что в совокупности с (10) дает требуемое значение $K(2,5) = 1/20$.

Вполне аналогично получаем

$$| q_i | \le \frac{1}{24}\|f^{IV}\|_\infty \tilde{r}_i(h_0,h_1,h_2,h_3,h_4), \qquad i = 0,1, \tag{11}$$

где

$$\tilde{r}_0(h_0,h_1,h_2,h_3,h_4) =$$

$$=h_0\{(h_0+h_1)^2 + \lambda_2\tilde{\Delta}_1^{-1}[(2-\mu_3\lambda_4)(h_1^2+h_2^2+h_0h_1) + \lambda_3(h_2^2 + h_3^2+h_3h_4)]\} \le$$

$$\le \tilde{r}_0(H,H,H,H,H)=26H^3/5,$$

$$\tilde{r}_1(h_0,h_1,h_2,h_3,h_4) =$$

$$=h_0\{h_1^2+\lambda_1\lambda_2\tilde{\Delta}_1^{-1}[(2-\mu_3\lambda_4)(h_1^2+h_2^2+h_0h_1) + \lambda_3(h_2^2 + h_3^2 + h_3h_4)]\} \le$$

$$\le \tilde{r}_1(H,H,H,H,H) = 8H^3/5 .$$

Поэтому из (II) имеем $K(0,5) = 13/60$, $K(1,5) = 1/15$, что и требовалось показать.

Пусть теперь $N \ge 6$. Тогда из (8) можно получить систему

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_1 q_2 - \mu_2\mu_3 q_4 = c_2^* , \\ &\lambda_i q_{i-1}+2q_i+\mu_i q_{i+1} = \tilde{c}_i, \quad i=3,4,\dots,N-3, \\ &-\lambda_{N-3}\lambda_{N-2}q_{N-4} + \Delta_{N-1}q_{N-2} = c_{N-2}^*, \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

где

$$\Delta_1 = 2(2-\mu_1\lambda_2) -\mu_2\lambda_3, \quad c_2^* = 2[\tilde{c}_2 - \lambda_2(\lambda_1\tilde{c}_1-\tilde{c}_0)] - \mu_2\tilde{c}_3,$$

$$\Delta_{N-1} = 2(2-\lambda_{N-1}\mu_{N-2}) - \lambda_{N-2}\mu_{N-3},$$

$$c_{N-2}^* = 2[\tilde{c}_{N-2}-\mu_{N-2}(\mu_{N-1}\tilde{c}_{N-1} - \tilde{c}_N)] - \lambda_{N-2}\tilde{c}_{N-3} ,$$

и уравнения

$$\Delta_1 q_1 = c_1^* - \mu_1\mu_2\mu_3 q_4, \qquad (13)$$

$$\Delta_{N-1}q_{N-1}=c_{N-1}^*-\lambda_{N-3}\lambda_{N-2}\lambda_{N-1}q_{N-4}, \qquad (14)$$

где

$$c_1^* = (4-\mu_2\lambda_3)(\lambda_1\tilde{c}_1-\tilde{c}_0) - 2\mu_1\tilde{c}_2 + \mu_1\mu_2\tilde{c}_3,$$

$$c^*_{N-1} = (4-\mu_{N-3}\lambda_{N-2})(\mu_{N-1}\tilde{c}_{N-1}-\tilde{c}_N) - 2\lambda_{N-1}\tilde{c}_{N-2} + \lambda_{N-2}\lambda_{N-1}\tilde{c}_{N-3}.$$

В самом деле, рассматривая первые четыре уравнения (8) как систему относительно неизвестных q_0, q_1, q_2, q_3 и разрешая ее, находим (13) и первое уравнение системы (12). Аналогичным образом из четырех последних уравнений (8) получаем (14) и последнее уравнение в (12).

Матрица системы (12) с диагональным преобладанием. Согласно [2, с. 334] имеем

$$|q_i| \le \max\left\{\frac{|c^*_2|}{\Delta_1-\mu_2\mu_3},\ \max_{3\le i\le N-3}|\tilde{c}_i|,\ \frac{|c^*_{N-2}|}{\Delta_{N-1}-\lambda_{N-3}\lambda_{N-2}}\right\},$$
$$i=2,3,\dots,N-2. \tag{15}$$

В [2, с. 113] имеется оценка

$$|\tilde{c}_i| \le \frac{1}{24}H^3\|f^{IV}\|_\infty. \tag{16}$$

Далее, используя лемму 4, находим

$$c^*_2 = \frac{1}{3}\lambda_1^2\lambda_2h_0^3\int_0^1\tau^3 f^{IV}(x_0+\tau h_0)d\tau +$$

$$+\frac{1}{3}\lambda_2h_1^3\int_0^1\{3\tau^2(1-\tau)+\mu_1(1-\tau)^2[\mu_1+(2+\lambda_1)\tau]\}\, f^{IV}(x_1+\tau h_1)d\tau -$$

$$-\frac{1}{2}\mu_2h_2^3\int_0^1\tau(1-\tau)[2(1-\tau)+\lambda_3\tau]f^{IV}(x_2+\tau h_2)d\tau +$$

$$+\frac{1}{2}\mu_2\mu_3h_3^3\int_0^1\tau(1-\tau)^2 f^{IV}(x_3+\tau h_3)d\tau .$$

Отсюда, оценивая каждый из интегралов, получаем

$$|c^*_2| \le \frac{1}{24}\|f^{IV}\|_\infty\{2(\mu_2h_2^3+\lambda_2h_1^3+\lambda_2h_0h_1^2) + \mu_2(\mu_3h_3^3+\lambda_2h_2^3)\}.$$

Учитывая, что $\Delta_1 - \mu_2\mu_3 = 3+(\lambda_1\lambda_2-\mu_1\lambda_2)$, имеем

$$\frac{|c_2^*|}{\Delta_1 - \mu_2\mu_3} \le \frac{1}{24} \|f^{IV}\|_\infty r_2(h_0,h_1,h_2,h_3) ,$$

где

$$r_2(h_0,h_1,h_2,h_3) = \frac{h_1h_2[2(h_2^2+h_1^2+h_0h_1) + \lambda_3(h_3^2 + h_2^2)]}{3h_1 + 2h_2(1+\lambda_1)} .$$

Легко видеть, что $r_2(h_0,h_1,h_2,h_3) \le r_2(H,h_1,h_2,H)$. Далее, можно проверить, что $r_2(H,h_1,h_2,H) \le r_2(H,h_1,H,H)$. Так как

$$r_2(H,h_1,H,H) = \frac{\alpha(1+\alpha)(3+2\alpha+2\alpha^2)H^3}{2+7\alpha+3\alpha^2} \le \frac{7H^3}{6} \quad \left(\alpha = \frac{h_1}{H}\right),$$

то в итоге имеем

$$\frac{|c_2^*|}{\Delta_1 - \mu_2\mu_3} \le \frac{7H^3}{144} \|f^{IV}\|_\infty. \tag{17}$$

Таким же образом устанавливается оценка

$$\frac{|c_{N-2}^*|}{\Delta_{N-1}-\lambda_{N-3}\lambda_{N-2}} \le \frac{7H^3}{144} \|f^{IV}\|_\infty . \tag{18}$$

Теперь из (I5)-(I8) вытекает (9) для $N \ge 6$, $i = 2,\ldots,N-2$.

Оценку для q_1 получим из (I3). Используя лемму 4, находим

$$|c_1^*| \le \frac{1}{24}\|f^{IV}\|_\infty\mu_1[(4-\mu_2\lambda_3)(h_0+h_1)h_1^2+2\mu_2h_2^3+2\lambda_2h_1^3 + \mu_2\mu_3h_3(h_3^2+h_2^2)] .$$

Учитывая уже доказанную при $i = 4$ оценку (9), имеем

$$|q_1| \le \frac{1}{24}\|f^{IV}\|_\infty r_1(h_0,h_1,h_2,h_3), \tag{19}$$

где

$$r_1(h_0,h_1,h_2,h_3) = \Delta_1^{-1}\mu_1[7\mu_2\mu_3H^3/6 + (4-\mu_2\lambda_3)(h_0+h_1)h_1^2 +$$
$$+ 2\mu_2h_2^3 + 2\lambda_2h_1^3 + \mu_2\mu_3h_3(h_3^2 + h_2^2)].$$

Справедливы неравенства

$$r_1(h_0,h_1,h_2,h_3) \le r_1(H,h_1,h_2,h_3) \le r_1(H,h_1,h_2,H) \le$$
$$\le r_1(H,H,H,H) = 19H^3/12 < 24H^3/15 ,$$

которые вместе с (I9) дают (9) при $i = 1$. По соображениям симметрии это верно и для $i = N-1$.

При выводе оценок для q_i, $i=1,\dots,N-1$; $N \ge 6$ мы исходим из системы (8), связывающей величины q_i. Однако получить оценки для q_0, q_N при $N \ge 6$ с постоянными $K(0,N)$, $K(N,N)$, не зависящими от сетки, из этой системы не удается. Здесь требуется иной подход.

Имеем (см. [2, с. I00])

$$m_0 = (f_1-f_0)/h_0-h_0(2M_0+M_1)/6.$$

Отсюда

$$q_0 = (f_1-f_0)/h_0-f_0'-h_0(2f_0''+f_1'')/6 + h_0(2Q_0+Q_1)/6. \qquad (20)$$

Здесь $Q_i = M_i - f_i''$. Используя формулу Тейлора, нетрудно получить

$$\frac{f_1-f_0}{h_0} - f_0'-\frac{h_0}{6}(2f_0''+f_1'') = \frac{h_0^3}{6}\int_0^1[(1-\tau)^3-1+\tau]f^{IV}(x_0+\tau h_0)d\tau. \qquad (21)$$

Далее, учитывая соотношения (I0), (II) из [I], имеем

$$2Q_0 + Q_1 = \Delta_0^{-1}\{-3\lambda_2\lambda_3Q_4 + d_0[(3+\lambda_1)(4-\lambda_2\mu_3)-4\lambda_1\mu_2] +$$
$$+ \tilde{d}_1[(2+\lambda_1)(4-\lambda_2\mu_3)+4\mu_1\mu_2] - 6\tilde{d}_2+3\lambda_2\tilde{d}_3\} \qquad (22)$$

(величины $\Delta_0, d_0, \tilde{d}_i$, $i = 1,2,3$, определены в [I]). Принимая во внимание лемму I, из (20)-(22) находим

$$q_0 = \frac{h_0}{6\Delta_0}\{3\lambda_2\lambda_3Q_4+3\lambda_2\lambda_3h_3^2\int_0^1[1-\tau-(1-\tau)^3]f^{IV}(x_3+\tau h_3)d\tau +$$
$$+ 3\lambda_2h_2^2\int_0^1\tau(1-\tau)[2\tau+\mu_3(1+\tau)-4]f^{IV}(x_2 + \tau h_2)d\tau +$$
$$+ h_1^2\int_0^1\{3(1-\tau)(4-\lambda_2\mu_3)-\lambda_1[(2+\lambda_1)(4-\lambda_2\mu_3)+4\mu_1\mu_2](1-\tau)^3 -$$

$$- 6\mu_2(\tau-\tau^3)\} f^{IV}(x_1+\tau h_1)d\tau +$$

$$+ h_0^2\int_0^1 \tau^2[\Delta_0(3-\tau)-\tau\mu_1(2+\lambda_1)(4-\lambda_2\mu_3) - 4\mu_1^2\mu_2\tau] f^{IV}(x_0+\tau h_0)d\tau.$$

Отсюда, оценивая интегральные слагаемые и учитывая лемму 2, имеем

$$|q_0| \le \frac{1}{24}\|f^{IV}\|_\infty r_0(h_0,h_1,h_2,h_3), \qquad (23)$$

где

$$r_0(h_0,h_1,h_2,h_3) = \frac{h_0}{\lambda_2(1+\lambda_1)(4-\mu_3)+6\mu_2}\{ 2\lambda_2\lambda_3 H^2 +$$

$$+ h_0^2[(1+4\lambda_1+\lambda_1^2)(4-\lambda_2\mu_3) + 6\mu_2(\mu_1-\lambda_1)-4\mu_1^2\mu_2] +$$

$$+ h_1^2[(6-2\lambda_1-\lambda_1^2)(4-\lambda_2\mu_3)-4\mu_1\lambda_1\mu_2-5\mu_2] +$$

$$+ 3\lambda_2[h_2^2(1+\lambda_3) + \lambda_3 h_3^2]\}.$$

Нахождение $\max r_0(h_0,h_1,h_2,h_3)$ в области $0 < h_i \le H$, $i=0,1,2,3$, осуществляется следующим образом. Вначале убеждаемся, что

$$\frac{\partial r_0}{\partial h_3} = \frac{\partial r_0}{\partial\lambda_3}\,\frac{\partial\lambda_3}{\partial h_3} \ge 0.$$

Поэтому $r_0(h_0,h_1,h_2,h_3) \le r_0(h_0,h_1,h_2,H)$. Затем можно показать, что $\dfrac{\partial r_0(h_0,h_1,h_2,H)}{\partial h_0} \ge 0$. Следовательно, $r_0(h_0,h_1,h_2,h_3) \le$ $\le r_0(H,h_1,h_2,H)$. Далее непосредственная проверка показывает, что $r_0(H,h_1,H,H) - r_0(H,h_1,h_2,H) \ge 0$, и, наконец, имеем неравенство $r_0(H,h_1,H,H) \le r_0(H,H,H,H) = 236/45 < 48/9$, которое вместе с (23) дает требуемую оценку для $|q_0|$. Естественно, такая же оценка справедлива для $|q_N|$. Тем самым доказательство леммы закончено.

§2. Доказательство теоремы 2

Доказательство проводится методом, описанным в [2, гл.Ш, §3]. Введем кубический эрмитов сплайн $H(x)$, удовлетворяющий условиям $H(x_i) = f_i$, $H'(x_i) = f'_i$, $i = 0,1,\dots,N$. Тогда при $x \in [x_i,x_{i+1}]$ имеем

$$S(x)-f(x) = H(x)-f(x) + h_i t(1-t)[(1 - t)q_i - tq_{i+1}] , \tag{24}$$

где $t = (x-x_i)/h_i$. Так как [2, с. 67]

$$|H(x)-f(x)| \le \frac{1}{24} t^2(1-t)^2 h_i^4 \; \| f^{IV} \|_\infty, \quad x \in [x_i , x_{i+1}] ,$$

то, используя лемму 5, из (24) получаем

$$|S(x)-f(x)| \le \frac{1}{384} H^4 \| f^{IV} \|_\infty \; \varphi_0(i, N, t),$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i=0,\ldots,N-1; \; N \ge 3 ,$$

где

$$\varphi_0(i, N, t) = 16t(1-t)[t(1-t)+24(1-t)K(i, N)+24tK(i+1, N)] .$$

Следовательно,

$$\|S(x) - f(x)\|_{C[x_i, x_{i+1}]} \le \frac{H^4}{384} \| f^{IV} \|_\infty \max_{t\in[0,1]} \varphi_0(i, N, t).$$

Вычислив $K_0(i,N) = \max\limits_{t\in[0,1]} \varphi_0(i, N, t)$, получаем (3) с постоянными $K_0(i, N)$, $N \ge 4$, $i=0,1,\ldots,N-1$, и $K_0(1,3)$ совпадающими с величинами, указанными в табл.I (приближенные значения округлены в большую сторону). Если определить описанным способом $K_0(0,3)=K_0(2,3)$, то получится значение большее, чем в табл.I. Приведенная там величина найдена другим методом. А именно при $N = 3$ сплайн $S(x)$ совпадает с многочленом Лагранжа, построенным по четырем узлам: x_0 , x_1, x_2, x_3 . Записывая его в явном виде и используя методику получения оценок погрешности локальных сплайнов [2], нетрудно вывести (3) с постоянными $K_0(0,3) = K_0(2,3)$. Соответствующие выкладки мы опускаем.

Выведем теперь неравенства (4). Имеем

$$|S'(x) - f'(x)| \le$$

$$\le |H'(x) - f'(x)|+(1-t)|1-3t||q_i|+t|2-3t||q_{i+1}|, \quad x \in[x_i, x_{i+1}]. \tag{25}$$

В силу симметрии ограничимся рассмотрением промежутков $[x_i , x_{i+1}]$, $i = 0,1,\ldots,[(N-1)/2]$. При $x\in [x_i , x_i+ h_i/3]$ $(t \in[0,1/3])$ имеем $|H'(x)-f'(x)| \le \frac{1}{12} h_i^3 t(1-t)(1-2t)\|f^{IV}\|_\infty$ (см. [2, с.67]). Если учесть еще лемму 5 и неравенство $K(i, N) \ge K(i+1, N)$, то из (25) при $t \in [0,1/3]$ вытекает

$$|S'(x)-f'(x)| \le H^3(1-2t)[t(1-t)/12+K(i,N)]\|f^{IV}\|_\infty. \qquad (26)$$

Так как $K(i,N) - (1-2t)[t(1-t)/12 + K(i,N)] = t[24K(i,N) - (1-t)(1-2t)]/12 \ge t[24K(i,N)-1]/12$ и $K(i,N) > 1/24$, то максимум правой части в (26) при $t \in [0,1/3]$ равен $K(i,N)$. Следовательно,

$$|S'(x)-f'(x)| \le K(i,N)H^3\|f^{IV}\|_\infty, \quad x \in [x_i, x_i + h_i/3]. \qquad (27)$$

При $t \in [1/3,1/2]$ имеем

$$|H'(x)-f'(x)| \le \frac{1}{12} h_i^3(1-t)\left[t(1-2t) + \frac{(1-3t)^4}{8t^3}\right]\|f^{IV}\|_\infty.$$

Поэтому из (25) и леммы 5 следует

$$|S'(x)-f'(x)| \le H^3\|f^{IV}\|_\infty \phi(t), \quad t \in [1/3, 1/2], \qquad (28)$$

где

$$\phi(t) = \frac{1}{12}(1-t)\left[t(1-2t) + \frac{(1-3t)^4}{8t^3}\right] + [6t(1-t)-1]K(i,N).$$

Так как

$$K(i,N)-\phi(t) = 2K(i,N)[1-4t(1-t)] + \frac{t(1-t)}{12}[24K(i,N)-1] + \frac{1}{96t^3}[16t^4 - (1-t)(1-3t)^4]$$

и $1-4t(1-t) \ge 0$, $K(i,N) > 1/24$, $16t^4-(1-t)(1-3t)^4 > 16t^4-(1-3t)^4 = (5t-1)(1-t)[4t^2+(1-3t)^2] > 0$ при $t \in [1/3,1/2]$, то $\phi(t) < K(i,N)$. Поэтому из (28) вытекает

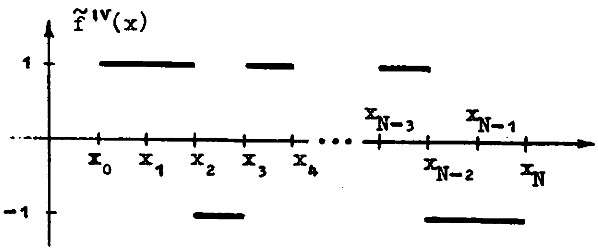
$$|S'(x)-f'(x)| < K(i,N)H^3\|f^{IV}\|_\infty, \quad x \in [x_i+h_i/3, x_i+h_i/2]. \qquad (29)$$

Оценки для промежутков $[x_i + h_i/2, x_i + 2h_i/3]$, $[x_i + 2h_i/3, x_{i+1}]$ можно вывести, заменив соответственно в (28), (26) t на $1-t$. Естественно при этом получатся оценки, совпадающие с (29) и (27). Тем самым завершены доказательства (4) и теоремы (2).

§3. Доказательство теоремы 3

Пусть $\tilde f(x) \in W^4_\infty[a,b]$ такая, что $\tilde f^{IV}(x)=1$ при $x \in [x_0, x_2]$ и $x \in [x_{2i+1}, x_{2i+2}]$, $i = 1,\dots,N/2-2$; $\tilde f^{IV}(x) = -1$ при $x \in [x_{N-2}, x_N]$ и $x \in [x_{2i}, x_{2i+1}]$, $i = 1,\dots,N/2-2$ (см. рисунок). Исключая из (8) неизвестные q_0, q_1, q_{N-1}, q_N, имеем

$$\left.\begin{aligned} 7q_2+2q_3 &= 4\tilde{c}_2-\tilde{c}_1+2\tilde{c}_0, \\ q_{i-1}+4q_i+q_{i+1} &= 2\tilde{c}_i, \quad i = 3,\dots,N-3, \\ 2q_{N-3}+7q_{N-2} &= 4\tilde{c}_{N-2}-\tilde{c}_{N-1}+2\tilde{c}_N . \end{aligned}\right\} \tag{30}$$



Согласно лемме 4 получаем $\tilde{c}_0 = \tilde{c}_N = h^3/24$, $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_{N-1} = 0$, $\tilde{c}_i = (-1)^i h^3/24$, $i = 2,3,\dots,N-2$. Поэтому, выполняя в (30) замену неизвестных

$$\tilde{q}_i = (-1)^i q_i, \quad i = 2,\dots,N-2, \tag{31}$$

приходим к системе

$$\left.\begin{aligned} 7\tilde{q}_2 - 2\tilde{q}_3 &= h^3/4, \\ -\tilde{q}_{i-1}+4\tilde{q}_i-\tilde{q}_{i+1} &= h^3/12, \quad i=3,\dots,N-3, \\ -2\tilde{q}_{N-3}+7\tilde{q}_{N-2} &= h^3/4 . \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Матрица системы (32) относится к классу матриц монотонного вида [2]. Поэтому из положительности правой части в (32) следует $\tilde{q}_i \geq 0$, $i = 2,\dots,N-2$, что в силу (31) означает

$$\tilde{q}_i = |q_i|, \quad i = 2,\dots,N-2. \tag{33}$$

Параллельно с (32) рассмотрим систему

$$
\left.\begin{aligned}
7u_2 - 2u_3, \qquad & = 5h^3/24, \\
-u_{i-1} + 4u_i - u_{i+1} & = h^3/24, \quad i=3,\dots,N-3, \\
-2u_{N-3} + 7u_{N-2} & = 5h^3/24,
\end{aligned}\right\} \tag{34}
$$

которая имеет очевидное решение $u_i = h^3/24$, $i = 2,\dots,N-2$. Вычитая из уравнений (32) соответствующие уравнения (34) и обозначая $\varepsilon_i = |q_i| - u_i$, имеем

$$
\left.\begin{aligned}
7\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3 \qquad & = h^3/24, \\
-\varepsilon_{i-1} + 4\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} & = 0, \qquad i = 3,\dots,N-3, \\
-2\varepsilon_{N-3} + 7\varepsilon_{N-2} & = h^3/24.
\end{aligned}\right\} \tag{35}
$$

Отсюда

$$
\varepsilon_i \geq 0, \quad i = 2,\dots,N-2. \tag{36}
$$

Покажем, что в (36) знак равенства не возможен. Предположим $\varepsilon_2 = 0$, но тогда из первого уравнения (35) следует $\varepsilon_3 < 0$, что противоречит (36). Таким образом, $\varepsilon_2 > 0$. Аналогично $\varepsilon_{N-2} > 0$. Если же для какого-либо $3 \leq k \leq N-3$ имеет место $\varepsilon_k = 0$, то из k-го уравнения (35) следует $\varepsilon_{k-1} + \varepsilon_{k+1} = 0$, что в сочетании с (36) влечет $\varepsilon_{k-1} = \varepsilon_{k+1} = 0$. Теперь из $(k-1)$-го уравнения получаем $\varepsilon_{k-2} = 0$ и т.д. В конце концов имеем $\varepsilon_2 = 0$, что противоречит установленному выше неравенству $\varepsilon_2 > 0$. Следовательно, $\varepsilon_i > 0$, $i = 2,\dots,N-2$, или

$$
|q_i| = \varepsilon_i + h^3/24 > h^3/24, \quad i = 2,\dots,N-2. \tag{37}
$$

Учитывая, что $\|\tilde{f}^{IV}\|_\infty = 1$, получаем (6). Далее из системы имеем $\varepsilon_2 = (h^3/6 + 2\varepsilon_4)/26$, $\varepsilon_3 = (h^3/24 + \varepsilon_4)/26$, откуда в силу того, что $\varepsilon_4 > 0$, приходим к неравенствам

$$
|q_2| > \frac{15h^3}{13\cdot 24}, \qquad |q_3| > \frac{27h^3}{26\cdot 24}. \tag{38}
$$

Тем самым доказано (6.I).

Для промежутка $[x_{2i+1}, x_{2i+2}]$, $i=1,\dots,N/2-2$, из (24) имеем

$$
S(\tilde{f};x) - \tilde{f}(x) = H(\tilde{f};x) - \tilde{f}(x) + ht(1-t)[(1-t)q_{2i+1} - tq_{2i+2}]. \tag{39}
$$

Согласно [2, с.67, формула (20)] находим

$$H(\tilde{f};x) - \tilde{f}(x) = -t^2(1-t)^2h^4/24. \qquad (40)$$

Кроме того, из (31), (33) вытекает $q_i = (-1)^i|q_i|$ и поэтому из (37) следует

$$q_{2i+1} = -h^3/24 - \varepsilon_{2i+1}, \quad q_{2i+2} = h^3/24 + \varepsilon_{2i+2}. \qquad (41)$$

Подставляя (40), (41) в (39), получаем $S(\tilde{f};x)-\tilde{f}(x)=-t(1-t)h^4[1 + t(1-t)]/24 - ht(1-t)[(1-t)\varepsilon_{2i+1} + t\varepsilon_{2i+2}]$. Отсюда при $t = 1/2$ имеем $|S(\tilde{f};x_{2i+1} + h/2) - \tilde{f}(x_{2i+1} + h/2)| = 5h^4/384 + h(\varepsilon_{2i+1} + \varepsilon_{2i+2})/8 > 5h^4/384$. Точно также рассматриваются промежутки $[x_{2i}, x_{2i+1}]$, $i=1,\dots,N/2-2$. Таким образом, неравенство (5) доказано. Что касается (5.1), то при $k=2$ оно следует из равенства $S(\tilde{f};x)-\tilde{f}(x) = t^2(1-t)^2h^4/24 + ht(1-t)[(1-t)q_2-tq_3]$, $x \in [x_2, x_3]$ и вытекающих из (38) соотношений

$$q_2 = \frac{15h^3}{13\cdot 24} + \alpha, \quad q_3 = -\frac{27h^3}{26\cdot 24} - \beta, \quad \alpha>0, \ \beta>0.$$

Коэффициент 5.38 в (5.1) представляет собой округленное в меньшую сторону значение величины $\max\limits_{t\in[0,1]} 16t(1-t)[t(1-t) + 15(1-t)/13 + 27t/26]$. При $k = N-3$ (5.1) верно в силу симметрии.

Литература

1. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. О погрешности приближения кубическими интерполяционными сплайнами. I. -В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 93). Новосибирск, 1982, с. 3-29.

2. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980. - 352 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
28 апреля 1983 года