МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ В ЧИСЛЕННОМ АНАЛИЗЕ
(Вычислительные системы)
1983 год Выпуск 98

УДК 519.651

О ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ СПЛАЙНАМИ НЕЧЕТНОЙ СТЕПЕНИ

Б.С. Киндалев

Введение

Пусть на отрезке $[a,b]$ в узлах разбиения $\Delta = \{x_i = a + ih, i=0,1,\dots,N;\ h = (b-a)/N\}$ заданы значения $f_i = f(x_i)$ достаточно гладкой $(b-a)$ - периодической функции $f(x)$. Через $S(x)$ обозначим $(b-a)$-периодический сплайн степени $2r+1$ $(r=1,2,\dots)$ дефекта I по разбиению Δ, интерполирующий в узлах разбиения Δ функцию $f(x)$, т.е.

а) $S(x)$ на каждом отрезке $[x_i,x_{i+1}]$, $i = 0,1,\dots,N-1$, является полиномом степени не выше $2r+1$;

б) $S(x) \in C^{2r}[a,b]$;

в) $S^{(p)}(a) = S^{(p)}(b)$, $p = 0,1,\dots,2r$;

г) $S(x_i) = f(x_i)$, $i = 1,2,\dots,N$.

Обозначим $S_i^{(p)} = S^{(p)}(x_i)$, $f_i^{(p)} = f^{(p)}(x_i)$, $S_{i\pm}^{(2r+1)} = S^{(2r+1)}(x_i \pm 0)$, $\beta_i = (S^{(2r+1)}(x_i+0) - S^{(2r+1)}(x_i-0))/h$, и пусть $\tilde{C}^k[a,b] = \tilde{C}^k$ $(k = 0,1,\dots;\ \tilde{C}^0 = \tilde{C})$ - класс $(b-a)$-периодических k раз непрерывно дифференцируемых на всей прямой функций. Сплайн $S(x)$ тоже можно считать функцией класса $\tilde{C}^{2r}[a,b]$, если узлы разбиения Δ и сплайн $S(x)$ продолжить по периодичности на всю прямую. Это будет подразумеваться всякий раз, когда в выражения будут входить значения сплайна $S(x)$ или функции $f(x)$ в узлах, выходящих за пределы отрезка $[a,b]$.

В настоящей работе получена асимптотика погрешности интерполяционного сплайна $S(x)$ и рассмотрено ее применение для повышения порядка точности приближения (результаты работы анонсированы автором на конференции [I]).

В первом параграфе найдены асимптотические разложения вида

$$S_i^{(p)} = \sum_{j=0}^{m} a_j(p)h^{2j}f_i^{(p+2j)} + O(h^{2m+2}) \quad (p = 1,2,\dots,2r),$$

$$S_{i\pm}^{(2r+1)} = \sum_{j=0}^{m} b_{j\pm}\, h^j\, f_i^{(2r+1+j)} + O(h^{m+1}),$$

$$\beta_i = \sum_{j=0}^{m} \bar{a}_j\, h^{2j}\, f_i^{(2r+2+2j)} + O(h^{2m+2}),$$

где m - произвольное целое положительное число, а коэффициенты $a_j(p)$, $b_{j\pm}$, $\bar{a}_j$ находятся по рекуррентным формулам.

Доказана теорема, характеризующая погрешность приближения достаточно гладкой функции сплайном, а именно: получено два члена (предложенная техника позволяет получать их произвольное число) асимптотического представления погрешности:

$$S^{(p)}(x) - f^{(p)}(x) = C_p(t)h^{2r+2-p}f^{(2r+2)}(x) +$$

$$+ D_p(t)h^{2r+3-p}\, f^{(2r+3)}(x) + O(h^{2r+4-p}), \quad p = 0,1,\dots,2r+1, \quad (1)$$

где $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $t = (x-x_i)/h$, а $C_p(t)$ и $D_p(t)$ являются полиномами по t степеней $2r+2-p$ и $2r+3-p$ соответственно и выражаются через полиномы Бернулли.

Первый член этой асимптотики был найден в работе [2]. Там же были указаны точки суперсходимости, в которых увеличивается порядок приближения производных. Для четного p на каждом интервале $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,1,\dots,N-1$, существует две точки суперсходимости, которые определяются двумя нулями полинома Бернулли $B_{2r+2-p}(t)$, $t \in [0,1]$; для нечетного $p < 2r+1$ точки суперсходимости расположены в узлах $\{x_i\}_{i=0}^{N}$ и в точках $\{x_i+h/2\}_{i=0}^{N-1}$, а для $p=2r+1$ - в точках $\{x_i+h/2\}_{i=0}^{N-1}$.

При этом естественно возникает задача оценки погрешности приближения в этих точках. Для производных нечетного порядка ($p<2r+1$) оценка в узлах $\{x_i\}_{i=0}^{N}$ была проведена в [3].

Получение асимптотики вида (I) дало возможность выписать главный член асимптотического представления погрешности во всех точках суперсходимости и оценить погрешность в этих точках. В частности, улучшена константа в оценке работы [3].

Отметим, что два члена асимптотики погрешности для кубического сплайна ($r=1$) получены в [4] ${}^{*)}$, для сплайна пятой степени ($r=2$) в [5] и (случай $p=0$) в [6] (в [6] нет строгого обоснования и асимптотика имеет отличный от (I) вид), для произвольного r (случай $p = 2r, 2r+1$) в [7].

Во втором параграфе на основе асимптотики (I), используя параметры сплайна $S(x)$, в явном виде получены новые типы сплайнов, приближающих функцию $f(x)$ и ее производные с более высоким порядком по h, чем $S(x)$. Результаты численных экспериментов, приведенные в конце параграфа, демонстрируют повышенный порядок аппроксимации полученных сплайнов.

§I. Асимптотика погрешности приближения

Согласно [6] имеют место следующие линейные соотношения:

$$\frac{1}{(2r+1)!}\sum_{k=0}^{2r} C^{(0)}_{k,2r+1} S^{(p)}_{i-r+k} = \frac{h^{-p}}{(2r+1-p)!}\sum_{k=0}^{2r} C^{(p)}_{k,2r+1} S_{i-r+k}$$

$$(p = 1,2,\ldots,2r), \tag{2}$$

$$\frac{1}{(2r+1)!}\sum_{k=0}^{2r} C^{(0)}_{k,2r+1}\beta_{i-r+k} = \frac{1}{h^{2r+2}}\sum_{k=0}^{2r+2} C^{(2r+2)}_{k,2r+3} S_{i-r-1+k}, \tag{3}$$

где $C^{(s)}_{k,l} = \nabla^{l+1}(l-k)_+^{l-s}$, $s = 0,1,\ldots,l-1$. Здесь ∇ является оператором разности назад, а $z_+ = (z + |z|)/2$.

Следуя [3], положим для $j = 0,1,\ldots$

$$\gamma^{(s)}_{j,r} = \frac{1}{j!}\sum_{k=0}^{2r} C^{(s)}_{k,2r+1}(k-r)^j,\quad s=0,1,\ldots,2r, \tag{4}$$

и пусть коэффициенты $\alpha_{0,r} = 1$, $\alpha_{2,r}, \alpha_{4,r}, \ldots$ определяются из разложения $\operatorname{sh}^{2r+2}x = x^{2r+2}(\alpha_{0,r}+\alpha_{2,r}x^2 + \alpha_{4,r}x^4+\ldots)$. Тогда

$$\gamma^{(s)}_{j,r} = 0,\ \text{если}\quad j < s,\ \text{либо}\quad s + j\ \text{нечетно}, \tag{5}$$

$$\gamma^{(s)}_{s+2m,r} = \frac{(2r+1-s)!}{2^{2m}}\alpha_{2m,r}\qquad (m = 0,1,\ldots,q-1), \tag{6}$$

${}^{*)}$ В [4, с. 230, формула (6)] опечатка: в полиноме, стоящем при $f^{V}(x)$, пропущен множитель $u = t(1-t)$.

$$\gamma^{(s)}_{s+2m,r} = \frac{1}{2^{2m}}\left\{(2r+1-s)!\,\alpha_{2m,r} + \right.$$

$$\left. + (-1)^{s+1}\sum_{k=q}^{m}\frac{2^{2k}}{2k}B_{2k}\frac{\alpha_{2m-2k,r}}{(2k-2r-2+s)!}\right\} \quad (m = q,q+1,\dots), \qquad (7)$$

$$\gamma^{(2r+2)}_{2r+2+2m,r+1} = \frac{1}{2^{2m}}\alpha_{2m,r} \quad (m = 0,1,\dots), \qquad (8)$$

где $q = [(2r+3-s)/2]$ ($[\,w\,]$ – целая часть числа w), а B_n означает n-е число Бернулли [8].

Соотношения (5),(6) и (7) для $m=q$ доказаны в [3]. Справедливость (7) в случае $m>q$ легко устанавливается, если в формулах (2.35) и (2.36) в работе [3] не ограничиваться разложениями до членов $O(x^{2q+2})$ и $O(x^{s+2q+2})$ соответственно, а выписать разложения полностью. Соотношение (8) доказано автором в [7].

Определим в пространстве векторов $x = (x_1,x_2,\dots,x_N)^T$ норму $\|x\| = \max\limits_{1\le i\le N}|x_i|$ и согласованную с ней норму

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le N}\sum_{j=1}^{N}|a_{ij}|$$

в пространстве матриц $A=[a_{ij}]$. Введем векторы $\bar{s}^{(p)} = (s_1^{(p)}, s_2^{(p)},\dots, s_N^{(p)})^T$, $\bar{F} = (f_1,f_2,\dots,f_N)^T$, $\bar{\beta} = (\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_N)^T$ и обозначим через A, $A^{(p)}$, D матрицы-циркулянты порядка N, у которых первые строки имеют соответственно вид:

$$(c^{(0)}_{r,2r+1}, c^{(0)}_{r+1,2r+1},\dots,c^{(0)}_{2r,2r+1},0,\dots,0,c^{(0)}_{0,2r+1},\dots,c^{(0)}_{r-1,2r+1}),$$

$$(c^{(p)}_{r,2r+1}, c^{(p)}_{r+1,2r+1},\dots,c^{(p)}_{2r,2r+1},0,\dots,0,c^{(p)}_{0,2r+1},\dots,c^{(p)}_{r-1,2r+1}),$$

$$(c^{(2r+2)}_{r+1,2r+3}, c^{(2r+2)}_{r+2,2r+3},\dots,c^{(2r+2)}_{2r+2,2r+3},0,\dots,0,c^{(2r+2)}_{0,2r+3},\dots,c^{(2r+2)}_{r,2r+3}).$$

Используя условия периодичности и интерполяции, запишем линейные соотношения (2), (3) при $i=1,2,\dots,N$ в виде систем уравнений для определения $\bar{s}^{(p)}$ и $\bar{\beta}$:

$$\frac{1}{(2r+1)!}A\bar{s}^{(p)} = \frac{h^{-p}}{(2r+1-p)!}A^{(p)}\bar{F}, \quad p=1,2,\dots,2r, \qquad (9)$$

$$\frac{1}{(2r+1)!}A\bar{\beta} = \frac{1}{h^{2r+2}}D\bar{F}. \qquad (10)$$

Определим коэффициенты $a_j(p)$ $(p = 1,2,\dots,2r)$, $\bar{a}_j$, $j=0,1,\dots$ рекуррентными соотношениями:

$$a_0(p) \equiv 1, \quad a_j(p) = \frac{1}{(2r+1-p)!}\gamma^{(p)}_{p+2j,r} -$$

$$-\frac{1}{(2r+1)!}\sum_{\nu=0}^{j-1} a_\nu(p)\gamma^{(0)}_{2j-2\nu,r}, \quad j \ge 1, \tag{11}$$

$$\bar{a}_0=1, \ \bar{a}_j = \gamma^{(2r+2)}_{2r+2+2j,r+1} - \frac{1}{(2r+1)!}\sum_{\nu=0}^{j-1}\bar{a}_\nu\,\gamma^{(0)}_{2j-2\nu,r}, \ j \ge 1, \tag{12}$$

где $\gamma^{(s)}_{v,u}$ имеют вид (4).

ТЕОРЕМА I. Пусть $(b-a)$ - периодический сплайн $S(x)$ степени $2r+1$ дефекта I интерполирует $(b-a)$-периодическую функцию $f(x)$ в узлах разбиения Δ, тогда для любого целого $m \ge 0$ имеют место:

I) если $p = 1,2,\dots,2r$; $\alpha = 1,2$ и $f(x) \in \tilde{C}^{p+2m+\alpha}$, то

$$S^{(p)}_i = \sum_{j=0}^{m} a_j(p)h^{2j}f^{(p+2j)}_i + R_{p,m,i}, \tag{13}$$

где коэффициенты $a_j(p)$ определены формулой (II) и $\max_i |R_{p,m,i}| = O(h^{2m+\alpha})$;

2) если $f(x) \in \tilde{C}^{2r+2+m}$, то

$$S^{(2r+1)}_{i\pm} = \sum_{j=0}^{m} b_{j\pm}\, h^j\, f^{(2r+1+j)}_i + \tilde{R}_{m,i\pm}, \tag{14}$$

где

$$b_{j\pm} = (\pm1)^j \sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]} \frac{a_k(2r)}{(j+1-2k)!} \quad \text{и} \quad \max_i |\tilde{R}_{m,i\pm}| = O(h^{m+1});$$

3) если $f(x) \in \tilde{C}^{2r+2+2m}$, то

$$\frac{S^{(2r+1)}_{i+} - S^{(2r+1)}_{i-}}{h} = \sum_{j=0}^{m} \bar{a}_j h^{2j} f^{(2r+2+2j)}_i + \tilde{\tilde{R}}_{m,i}, \tag{15}$$

где коэффициенты $\bar{a}_j$ определены формулой (I2) и $\max_i |\tilde{\tilde{R}}_{m,i}| = O(h^{2m+2})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$R_{p,m,i} = S_i^{(p)} - \sum_{j=0}^{m} a_j(p)\, h^{2j} f_i^{(p+2j)}, \quad p=1,2,\ldots,2r,$$

где коэффициенты $a_j(p)$ имеют вид (II). В силу (9) получаем

$$\frac{1}{(2r+1)!} A\bar{R}_p = \bar{G}_p \,, \tag{16}$$

где $\bar{R}_p = (R_{p,m,1}, R_{p,m,2}, \ldots, R_{p,m,N})^T$, а вектор $\bar{G}_p = (G_{p,m,1}, G_{p,m,2}, \ldots, G_{p,m,N})^T$ имеет компоненты

$$G_{p,m,i} = \frac{h^{-p}}{(2r+1-p)!} \sum_{k=0}^{2r} C_{k,2r+1}^{(p)} f_{i-r+k} -$$

$$- \frac{1}{(2r+1)!} \sum_{k=0}^{2r} C_{k,2r+1}^{(0)} \sum_{j=0}^{m} a_j(p) h^{2j} f_{i-r+k}^{(p+2j)}, \quad i=1,2,\ldots,N. \tag{17}$$

Покажем, что

$$\|\bar{G}_p\| = O(h^{2m+\alpha}) \,. \tag{18}$$

Тогда в силу ограниченности нормы $\|A^{-1}\|_\infty$ константой, не зависящей от h (см., например, [3]), из (I6) будем иметь $\|\bar{R}_p\| = O(h^{2m+\alpha})$. Тем самым утверждение I теоремы I будет доказано. Таким образом, остается показать (I8).

В (I7) разложим f_{i-r+k} и $f_{i-r+k}^{(p+2j)}$ в точке x_i по формуле Тейлора. Перегруппировав члены, с использованием (4) получаем

$$G_{p,m,i} = \frac{h^{-p}}{(2r+1-p)!} \sum_{j=0}^{p+2m} h^j f_i^{(j)} \gamma_{j,r}^{(p)} -$$

$$- \frac{1}{(2r+1)!} \sum_{j=0}^{m} \Big(h^{2j} f_i^{(p+2j)} \sum_{\nu=0}^{j} a_\nu(p) \gamma_{2j-2\nu,r}^{(0)} +$$

$$+ h^{2j+1} f_i^{(p+2j+1)} \sum_{\nu=0}^{j} a_\nu(p)\, \gamma_{2j-2\nu+1,r}^{(0)} \Big) + O(h^{2m+\alpha}).$$

В силу (5) имеем

$$G_{p,m,i} = \frac{h^{-p}}{(2r+1-p)!} \sum_{j=0}^{m} h^{p+2j} f_i^{(p+2j)} \gamma_{p+2j,r}^{(p)} -$$

$$- \frac{1}{(2r+1)!} \sum_{j=0}^{m} h^{2j} f_i^{(p+2j)} \sum_{\nu=0}^{j} a_\nu(p)\, \gamma_{2j-2\nu,r}^{(0)} + O(h^{2m+\alpha}) \,.$$

Собирая члены при одинаковых степенях h, получаем

$$G_{p,m,i} = \sum_{j=0}^{m} \Big(\frac{1}{(2r+1-p)!} \gamma^{(p)}_{p+2j,r} -$$

$$- \frac{1}{(2r+1)!} \sum_{\nu=0} a_\nu(p) \gamma^{(0)}_{2j-2\nu,r} \Big) h^{2j} f_i^{(p+2j)} + O(h^{2m+\alpha}) .$$

Отсюда, в силу (6) и (II) следует (I8), что завершает доказательство утверждения I теоремы I.

Для доказательства утверждения 2 следует записать $S^{(2r+1)}(x_i+0)$ в виде $S^{(2r+1)}(x_i+0) = (S^{(2r)}_{i+1} - S^{(2r)}_i)/h$ и воспользоваться разложением (I3) при $p = 2r$. Аналогично получаем (I4) и для $S^{(2r+1)}(x_i-0)$.

Доказательство утверждения 3 проводится по схеме доказательства утверждения I с использованием системы (I0). Теорема полностью доказана.

Используя свойства (6)-(8), из (II)-(I2) можно получать явный вид коэффициентов $a_j(p), b_{j\pm}, \bar{a}_j$ в терминах чисел Бернулли. Ограничиваясь несколькими первыми членами разложений (I3)-(I5), приходим к следующему утверждению.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $(b-a)$ - периодический сплайн $S(x)$ степени $2r+1$ дефекта I интерполирует $(b-a)$ - периодическую функцию $f(x)$ в узлах разбиения Δ. Тогда

I) если $f(x) \in \tilde{C}^{2r+4}$, то

$$S_i^{(1)} = f_i^{(1)} + \frac{B_{2r+2}}{(2r+1)!} h^{2r+2} f_i^{(2r+3)} + R_{1,r+1,i}, \tag{19}$$

$$S_i^{(p)} = f_i^{(p)} + \frac{(-1)^{p+1} B_{2q}}{2q(2r+1-p)!} h^{2q} f_i^{(p+2q)} + R_{p,q,i} \tag{20}$$

$$(p=2,3,\dots,2r),$$

где $q = \left[\frac{2r+3-p}{2}\right]$, $\max_i |R_{1,r+1,i}| = O(h^{2r+3})$,

$$\max_i |R_{p,q,i}| = O(h^{2r+4-p});$$

$$S_{i+}^{(2r+1)} = f_i^{(2r+1)} - \frac{B_1}{1!} h f_i^{(2r+2)} + \frac{B_2}{2!} h^2 f_i^{(2r+3)} + \tilde{R}_{3,i+}, \tag{21}$$

$$S_{i-}^{(2r+1)} = f_i^{(2r+1)} + \frac{B_1}{1!} h f_i^{(2r+2)} + \frac{B_2}{2!} h^2 f_i^{(2r+3)} + \tilde{R}_{3,i-}, \quad (22)$$

где $\max_i |\tilde{R}_{3,i\pm}| = O(h^3)$;

2) если $f(x) \in \tilde{C}^{4r+8}$, то

$$\frac{S_{i+}^{(2r+1)} - S_{i-}^{(2r+1)}}{h} - f_i^{(2r+2)} =$$

$$= \frac{1}{(2r+1)!} \sum_{j=0}^{1} \frac{B_{2r+2+2j}}{(2r+2+2j)(2j)!} h^{2r+2+2j} f_i^{(4r+4+2j)} + \tilde{\tilde{R}}_{r+3,i}, \quad (23)$$

где $\max_i |\tilde{\tilde{R}}_{r+3,i}| = O(h^{2r+6})$.

Отметим, что главный член разложения (23) получен в [7].

Переходим к формулировке основного результата этого параграфа.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $(b-a)$-периодический сплайн $S(x)$ степени $2r+1$ дефекта 1 интерполирует в узлах разбиения Δ функцию $f(x) \in \tilde{C}^{2r+4}$. Если $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $t = (x - x_i)/h$ $(i = 0, 1, \ldots, N-1)$, то

$$S^{(p)}(x) - f^{(p)}(x) = C_p(t) h^{2r+2-p} f^{(2r+2)}(x) +$$

$$+ D_p(t) h^{2r+3-p} f^{(2r+3)}(x) + O(h^{2r+4-p}) \quad (p = 0, 1, \ldots, 2r+1) \quad (24)$$

равномерно относительно x на $[a,b]$, где

$$C_p(t) = \begin{cases} -\dfrac{B_{2r+2}(t) - B_{2r+2}}{(2r+2)!}, & p = 0, \\[2ex] -\dfrac{B_{2r+2-p}(t)}{(2r+2-p)!}, & p = 1, 2, \ldots, 2r+1, \end{cases}$$

$$D_p(t) = \begin{cases} \dfrac{(2r+1)B_{2r+2}(t) + B_{2r+2}}{(2r+2)!}, & p = 1, \\[2ex] \dfrac{(2r+2-p)B_{2r+3-p}(t)}{(2r+3-p)!}, & p \in \{0, 1, \ldots, 2r+1\} \setminus \{1\}. \end{cases}$$

Здесь $B_n(t)$ - полином Бернулли n-й степени [8], $B_n = B_n(0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $t = (x-x_i)/h$. Разложим разность $E(x) = S(x)-f(x)$ в точке x_i по формуле Тейлора. Имеем

$$E(x) = S(x_i+th) - f(x_i+th) = \sum_{k=0}^{2r+1} \frac{(th)^k}{k!} S_i^{(k)} -$$

$$-\sum_{k=0}^{2r+3} \frac{(th)^k}{k!} f_i^{(k)} - \frac{1}{(2r+3)!} \int_{x_i}^{x} f^{(2r+4)}(\tau)(x-\tau)^{2r+3} d\tau.$$

В силу (I9)-(2I) получаем

$$E(x) = -\frac{1}{(2r+2)!}\left\{t^{2r+2} + \binom{2r+2}{1} B_1 t^{2r+1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{r} \binom{2r+2}{2k} B_{2k} t^{2r+2-2k}\right\} h^{2r+2} f_i^{(2r+2)} + \left\{ -\frac{1}{(2r+3)!} t^{2r+3} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{r} \frac{2k-1}{(2k)!(2r+3-2k)!} B_{2k} t^{2r+3-2k} + \frac{1}{(2r+1)!} B_{2r+2} t \right\} h^{2r+3} f_i^{(2r+3)} + R(x),$$

где

$$R(x) = \frac{th}{1!} R_{1,r+1,i} + \frac{(th)^2}{2!} R_{2,r,i} + \ldots + \frac{(th)^{2r}}{(2r)!} R_{2r,1,i} +$$

$$+ \frac{(th)^{2r+1}}{(2r+1)!} \tilde{R}_{3,i+} - \frac{1}{(2r+3)!} \int_{x_i}^{x} f^{(2r+4)}(\tau)(x-\tau)^{2r+3} d\tau.$$

Воспользовавшись соотношением

$$\frac{2r+2}{(2r+3)!}\binom{2r+3}{k} - \frac{1}{(2r+2)!}\binom{2r+2}{k} = \frac{k-1}{(2k+3)!}\binom{2r+3}{k}, k=0,1,\ldots,2r+2,$$

запишем

$$E(x) = -\frac{1}{(2r+2)!}\left\{ t^{2r+2} + \binom{2r+2}{1} B_1 t^{2r+1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{r} \binom{2r+2}{2k} B_{2k} t^{2r+2-2k} \right\} h^{2r+2} f_i^{(2r+2)} +$$

$$+\left\{\frac{2r+2}{(2r+3)!}\sum_{k=0}^{2r+3}\binom{2r+3}{k}B_k t^{2r+3-k}-\frac{1}{(2r+2)!}\left(t^{2r+3}+\binom{2r+2}{1}B_1 t^{2r+2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{k=1}^{r}\binom{2r+2}{2k}B_{2k}t^{2r+3-2k}\right)\right\}h^{2r+3}\,f_i^{(2r+3)}+R(x).$$

Так как полином Бернулли n-й степени имеет вид

$$B_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k t^{n-k}$$

(см., например, [8]), получаем

$$E(x)=-\frac{B_{2r+2}(t)-B_{2r+2}}{(2r+2)!}h^{2r+2}\,f_i^{(2r+2)}+$$

$$+\left\{\frac{(2r+2)B_{2r+3}(t)}{(2r+3)!}-\frac{B_{2r+2}(t)-B_{2r+2}}{(2r+2)!}t\right\}h^{2r+3}\,f_i^{(2r+3)}+R(x).\quad(25)$$

Учитывая, что $B_n'(t)=nB_{n-1}(t)$, продифференцируем по x (25) $2r+1$ раз. В полученных выражениях и в (25) разложим $f_i^{(2r+2)}$ и $f_i^{(2r+3)}$ в точке x по формуле Тейлора. Используя теорему о среднем для интеграла и проводя оценку (причем очевидно, что константу в оценке можно получить не зависящей от $x\in[a,b]$), устанавливаем требуемый результат. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Теорема остается справедливой и для сплайна $S(x)$ первой степени [4, с. 48].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из доказательства теоремы следует, что можно получать произвольное, наперед заданное число членов в асимптотическом представлении погрешности приближения (24). Для этого нужно лишь взять достаточное число членов в асимптотических разложениях узловых значений производных сплайна (теорема I).

Легко видеть, что если t^* является нулем полинома $B_{2r+2-p}(t)$ $(p=1,2,\ldots,2r+1)$ на $[0,1]$, то в точке $x=x_i+t^*h$ (точка суперсходимости) главным членом разложения (24) становится член $D_p(t^*)h^{2r+3-p}f^{(2r+3)}(x)$.

Следующие два следствия, справедливость которых легко устанавливается с помощью известных свойств полиномов Бернулли (см., например, [8-9]), дают оценки погрешности по норме и в точках суперсходимости.

СЛЕДСТВИЕ I (Шварц [2]). Пусть $(b-a)$-периодический сплайн $S(x)$ степени $2r+1$ дефекта I интерполирует в узлах разбиения Δ функцию $f(x) \in \tilde{C}^{2r+3}$. Тогда

$$\|S^{(p)}-f^{(p)}\|_{C[x_i,x_{i+1}]} = h^{2r+2-p}C_p^*\|f^{(2r+2)}\|_{C[x_i,x_{i+1}]} + O(h^{2r+3-p})$$

$$(p = 0,1,\dots,2r+1),$$

где

$$C_0^* = \frac{2|B_{2r+2}|(1-1/2^{2r+2})}{(2r+2)!} < \frac{4}{(2\pi)^{2r+2}(1-2^{-2r-1})},$$

а для $p \geq 1$

$$C_p^* = \begin{cases} \dfrac{|B_{2r+2-p}|}{(2r+2-p)!}, & p \text{ четное}, \\ \dfrac{\max\limits_{0\leq t\leq 1} |B_{2r+2-p}(t)|}{(2r+2-p)!}, & p \text{ нечетное}, \end{cases}$$

причем $C_p^* < 2/\{(2\pi)^{2r+2-p}(1-2^{-2r-1+p})\}$ $(p \geq 1)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $(b-a)$-периодический сплайн $S(x)$ степени $2r+1$ дефекта I интерполирует в узлах разбиения Δ функцию $f(x) \in \tilde{C}^{2r+4}$. Тогда

I) если p нечетное, то

а) $\max\limits_i |S_i^{(p)}-f_i^{(p)}| \leq |D_p(0)|h^{2r+3-p}\max\limits_i|f_i^{(2r+3)}| + O(h^{2r+4-p})$,

$$p = 1,3,\dots,2r-1,$$

где

$$D_p(0) = \begin{cases} B_{2r+2}/(2r+1)!, & p = 1, \\ (2r+2-p)B_{2r+3-p}/(2r+3-p)!, & p=3,5,\dots,2r-1; \end{cases}$$

б) $\max\limits_i |S^{(p)}(x_i+h/2) - f^{(p)}(x_i+h/2)| \leq$

$\leq |D_p(\tfrac{1}{2})|h^{2r+3-p}\max\limits_i|f^{(2r+3)}(x_i+h/2)| + O(h^{2r+4-p})$, $p=1,3,\dots,2r+1$,

где

$$D_p\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} (2^{-2r-1}(2r+1)-2r)B_{2r+2}/(2r+2)! & p=1, \\ (2r+2-p)(2^{p-2r-2}-1)B_{2r+3-p}/(2r+3-p)!, & p=3,5,\ldots,2r+1; \end{cases}$$

2) если p четное, то

$$\max_i |S^{(p)}(x_i + t_{p,k}h) - f^{(p)}(x_i + t_{p,k}h)| \le$$

$$\le |D_p(t_{p,k})| h^{2r+3-p} \max_i |f^{(2r+3)}(x_i + t_{p,k}h)| + O(h^{2r+4-p})$$

$$(p = 2,4,\ldots,2r; \ k = 1,2),$$

где $t_{p,k}$ – нули полинома Бернулли $B_{2r+2-p}(t)$ $(t \in [0,1])$, а $D_p(t_{p,k}) = (2r+2-p)B_{2r+3-p}(t_{p,k})/(2r+3-p)!$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При $p = 2r-2, 2r$ точки суперсходимости $x = x_i + t_{p,k}h$ $(i=0,1,\ldots,N-1;\ k=1,2)$ легко находятся, а для констант $|D_p(t_{p,k})|$ можно указать числовые значения. Имеем

$$t_{2r-2,k} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{30}}}, \quad |D_{2r-2}(t_{2r-2,k})| = \frac{(3+\sqrt{30})\sqrt{1-4/\sqrt{30}}}{5400};$$

$$t_{2r,k} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad |D_{2r}(t_{2r,k})| = \frac{\sqrt{3}}{108}.$$

При остальных четных p границы точек суперсходимости можно установить, используя асимптотическую оценку нулей $t_{p,k}$ $(k=1,2)$ полинома Бернулли $B_{2r+2-p}(t)$ [9].

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В [3] получена оценка погрешности для производных нечетного порядка только в узлах x_i , причем константа в главном члене асимптотической оценки завышена на множитель, равный $\|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty$.

Теорема 2 и ее следствия полностью (в асимптотическом смысле) характеризуют погрешность приближения достаточно гладкой функции сплайном $S(x)$, так как, кроме оценки по норме, позволяют оценить погрешность и в точках суперсходимости, в которых повышается порядок приближения производных.

§2. Повышение порядка аппроксимации

Асимптотическое представление погрешности приближения позволяет строить различные типы сплайнов, имеющих в отличие от $S(x)$ более высокий порядок приближения. Если записать (24) в виде $S^{(p)}(x) - C_p(t)h^{2r+2-p}f^{(2r+2)}(x) = f^{(p)}(x)+O(h^{2r+3-p})$ и аппроксимировать $f^{(2r+2)}(x)$ хотя бы с первым порядком по h, то получим приближение $f^{(p)}(x)$ с погрешностью $O(h^{2r+3-p})$, т.е. порядок аппроксимации по h увеличился на единицу. Таким образом, дело сводится к отысканию подходящих выражений для аппроксимации $f^{(2r+2)}(x)$.

Используя разложение (24) при $p=2r$, нетрудно получить следующее утверждение.

ЛЕММА. Пусть $(b-a)$-периодический сплайн $S(x)$ степени $2r+1$ дефекта I интерполирует в узлах разбиения Δ функцию $f(x) \in \tilde{C}^{2r+4}$. Если $x = x_i+th$, $\tilde{x} = x_i+\tau h$ $(i = 0,1,\dots,N-1;\ t,\tau \in [0,1])$, то

$$\frac{\delta^2 S^{(2r)}(\tilde{x})}{h^2} = f^{(2r+2)}(x) + (\tau-t)hf^{(2r+3)}(x)+O(h^2)$$

равномерно относительно $x, \tilde{x}$ на $[a,b]$, где $\delta^2 S^{(2r)}(\tilde{x}) = S^{(2r)}(\tilde{x}+h) - 2S^{(2r)}(\tilde{x}) + S^{(2r)}(\tilde{x}-h)$.

Определим функции $S_{\tau,p}(x)$ $(p = 0,1,\dots,2r+2)$. Для $x \in [x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0,1,\dots,N-1)$ положим

$$S_{\tau,p}(x) = S^{(p)}(x) - C_p(t)h^{2r-p}\delta^2 S^{(2r)}(\tilde{x}),$$

где $\tilde{x} = x_i + \tau h$ $(\tau \in [0,1])$, $t = (x-x_i)/h$,

$$C_p(t) = \frac{d^p}{dt^p}\left(\frac{B_{2r+2} - B_{2r+2}(t)}{(2r+2)!}\right).$$

С помощью леммы и теоремы 2 устанавливается следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $(b-a)$-периодический сплайн $S(x)$ степени $2r+1$ дефекта I интерполирует в узлах разбиения Δ функцию $f(x) \in \tilde{C}^{2r+4}$. Если $x = x_i+th$, $\tilde{x} = x_i+\tau h$ $(i = 0,1,\dots,N-1;\ t,\tau \in [0,1])$, то

$$S_{\tau,p}(x) - f^{(p)}(x) = (D_p(t)+(t-\tau)C_p(t))h^{2r+3-p}f^{(2r+3)}(x) + O(h^{2r+4-p}) \quad (p = 0,1,\dots,2r+2) \tag{26}$$

равномерно относительно $x, \tilde{x}$ на $[a,b]$, где $C_p(t)$, $D_p(t)$ $(p=0,1,\dots,2r+1)$ совпадают с коэффициентами в разложении погрешности (24) и $C_{2r+2}(t) \equiv 1$, $D_{2r+2}(t) \equiv 0$.

СЛЕДСТВИЕ. В условиях теоремы имеет место $S_{t,2r+2}(x) - f^{(2r+2)}(x) = O(h^2)$ равномерно относительно x на $[a,b]$.

В силу доказанной теоремы порядок аппроксимации увеличивается на единицу, если при приближении функции $f^{(p)}(x)$ вместо $S^{(p)}(x)$ использовать $S_{\tau,p}(x)$ (τ - произвольное $0 \le \tau \le 1$). При этом заметим, что $S_{\tau,p}(x)$ строятся по явным формулам с использованием параметров исходного сплайна $S(x)$.

Рассмотрим некоторые способы выбора параметра τ.

Пусть τ - фиксированное. В этом случае $S_{\tau,0}(x)$ это сплайн степени $2r+2$, интерполирующий функцию $f(x)$ в узлах разбиения Δ и принадлежащий классу $C^1[a, b]$. Заметим, что $S^{(p)}_{\tau,0}(x) \equiv S_{\tau,p}(x)$ $(p = 0,1,\dots,2r + 2)$. У сплайна $S_{\tau,0}(x)$ в отличие от $S(x)$ при p четном $(2 \le p \le 2r)$ в узлах x_i терпят разрыв производные $S^{(p)}_{\tau,0}(x)$. Этого недостатка лишен другой способ выбора τ.

Если положить $\tau = t$, то тогда при каждом фиксированном p функция $S_{t,p}(x)$ будет сплайном (интерполяционным при $p=0$) степени $2r+3-p$, непрерывным в узлах x_i при любом p $(p = 0,1,\dots$ $\dots, 2r+2)$.

Повышение порядка приближения можно продолжить. Если в (26) перенести выражение с производной $f^{(2r+3)}(x)$ в левую часть равенства и аппроксимировать $f^{(2r+3)}(x)$ по формуле

$$\frac{S^{(2r)}(\tilde{x}+2h)-2S^{(2r)}(\tilde{x}+h)+2S^{(2r)}(\tilde{x}-h)-S^{(2r)}(\tilde{x}-2h)}{2h^3}=f^{(2r+3)}(x)+O(h),$$

то получим приближение $f^{(p)}(x)$ с погрешностью $O(h^{2r+4-p})$, т.е. порядок аппроксимации по h увеличился на два по сравнению с порядком аппроксимации сплайном $S^{(p)}(x)$.

Вообще говоря, можно строить приближения произвольного порядка, если имеется достаточное число членов в асимптотическом представлении погрешности.

Отметим, что получить асимптотическое представление погрешности приближения, а следовательно, повысить порядок аппроксимации удается и в случае, когда на концах интервала $[a,b]$ для сплайна $S(x)$ заданы краевые условия специального вида. В [2] получен главный член асимптотического представления погрешности приближения, когда заданы краевые условия вида $S^{(2k+1)}(x_j) = f^{(2k+1)}(x_j)$ $(j = 0,N;\ k = 0,1,\dots, r-1)$. В этом случае порядок приближения повышается на единицу, если потребовать, чтобы $f(x) \in C^{2r+3}[a,b]$ и аппроксимировать $f^{(2r+2)}(x)$ для $x \in [x_i, x_{i+1}]$ $(i=1,2,\ldots,N-2)$ по формуле $\delta^2 S^{(2r)}(\tilde{x})/h^2 = f^{(2r+2)}(x)+O(h)$, где $\tilde{x} \in [x_i, x_{i+1}]$. В крайних же интервалах $[x_0, x_1]$, $[x_{N-1}, x_N]$ можно рекомендовать аппроксимацию $f^{(2r+2)}(x)$ выражениями $\delta^2 S^{(2r)}(x_1)/h^2$ и $\delta^2 S^{(2r)}(x_{N-1})/h^2$ соответственно.

Для $r = 1$ примеры краевых условий, при которых возможно асимптотическое представление погрешности, рассмотрены в [4,10]; имеется пример и для $r=2$ [5].

Проиллюстрируем численно повышение порядка приближения на примере периодического кубического ($r=1$) сплайна $S(x)$, интерполирующего с шагом h функцию $f(x) = \sin(\pi x)$ на отрезке $[0,2]$.

Таблица

h	p	$S^{(p)}(x)$	$S_{0,p}(x)$	$S_{\frac{1}{2},p}(x)$	$S_{t,p}(x)$
0.1	0	$0.26\cdot10^{-4}$	$0.44\cdot10^{-5}$	$0.15\cdot10^{-5}$	$0.25\cdot10^{-5}$
	1	$0.78\cdot10^{-3}$	$0.17\cdot10^{-3}$	$0.17\cdot10^{-3}$	$0.17\cdot10^{-3}$
	2	$0.81\cdot10^{-1}$	$0.25\cdot10^{-1}$	$0.13\cdot10^{-1}$	$0.49\cdot10^{-2}$
	3	$0.49\cdot10$	$0.13\cdot10$	0.51	0.26
	4	-	$0.30\cdot10^{2}$	$0.15\cdot10^{2}$	$0.12\cdot10$
0.05	0	$0.16\cdot10^{-5}$	$0.14\cdot10^{-6}$	$0.46\cdot10^{-7}$	$0.76\cdot10^{-7}$
	1	$0.98\cdot10^{-4}$	$0.11\cdot10^{-4}$	$0.11\cdot10^{-4}$	$0.11\cdot10^{-4}$
	2	$0.20\cdot10^{-1}$	$0.32\cdot10^{-2}$	$0.16\cdot10^{-2}$	$0.61\cdot10^{-3}$
	3	$0.24\cdot10$	0.32	0.13	$0.64\cdot10^{-1}$
	4	-	$0.15\cdot10^{2}$	$0.76\cdot10$	0.30

В третьем столбце таблицы приведен максимум абсолютной погрешности приближения сплайном $S^{(p)}(x)$, а в четвертом-шестом - сплайнами $S_{\tau,p}(x)$ при τ, равных $0, 1/2, t$ соответственно. Максимум вычисляется по точкам разбиения отрезка $[0,2]$ с шагом $h/10$.

Сравнение приведенных результатов показывает, что наряду с увеличением порядка приближения производных $f^{(p)}(x)$, выбором параметра τ можно добиваться и уменьшения константы в главном члене погрешности, что также повышает точность приближения.

Пользуясь случаем, автор выражает благодарность В.Л.Мирошниченко и Ю.С.Волкову за полезные обсуждения.

Литература

1. КИНДАЛЕВ Б.С. Асимптотическое представление погрешности приближения интерполяционными сплайнами нечетной степени.-В кн.: Международная конференция по теории приближения функций,СССР,Киев, 30 мая - 6 июня 1983 г. Тезисы докладов, Киев, 1983, с. 94.

2. SWARTZ. O(h^{2n+2-1}) bounds on some spline interpolation errors.-Bull.Amer.Math.Soc.,1968,v.74,N 6,p.1072-1078.

3. ALBASINY E.L., HASKINS W.D. Explicit error bounds for periodic splines of odd order on a uniform mesh. - J.Inst.Math.Appl. 1973,v.12,N 3,p.303-318.

4. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. - 352 с.

5. КИНДАЛЕВ Б.С. Асимптотические формулы для сплайна пятой степени и их применение. -В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 87). Новосибирск, 1981, с. 18-24.

6. FYFE D.I. Linear dependence relations connecting equal interval N-th degree splines and their derivatives. - J.Inst. Math. Appl.,1971,v.7,p.398-406.

7. КИНДАЛЕВ Б.С. Асимптотические формулы для сплайнов нечетной степени и аппроксимация производных высокого порядка. В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 93). Новосибирск, 1982, с. 39-52.

8. АБРАМОВИЦ М., СТИГАН Н. Справочник по специальным функциям. -М.: Наука, 1979. - 832 с.

9. LEHMER D.H. On the maxima and minima of Bernoulli polynomials.- Amer.Math.Manthly,1940,v.47,p.533-538.

10. LUCAS T.R. Error bounds for interpolating cubic splines under various end conditions.- SIAM J.Numer.Anal.,1974,v.11, N 3, p.569-584.

Поступила в ред.-изд.отд.
23 августа 1983 года