МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ В ЧИСЛЕННОМ АНАЛИЗЕ
(Вычислительные системы)
1983 год Выпуск 98

УДК 519.651

СГЛАЖИВАНИЕ КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ И МЕТОД ШТРАФОВ

Н.Н.Павлов

1. Пусть в узлах сетки Δ: $a = x_1 < \ldots < x_N = b$ известны значения некоторой функции z_i^0, $i = 1,\ldots,N$, заданные с погрешностями, по абсолютной величине не превышающими $\delta_i \geq 0$. Рассмотрим задачу сглаживания в следующей постановке: найти функцию, минимизирующую функционал

$$J(f) = \int_a^b [f''(x)]^2 dx, \tag{1}$$

при ограничениях

$$|f(x_i) - z_i^0| \leq \delta_i, \quad i = 1,\ldots,N. \tag{2}$$

В качестве множества допустимых функций возьмем класс $W_2^2[a,b]$, состоящий из функций, имеющих абсолютно непрерывную первую производную и интегрируемую с квадратом вторую производную и его подклассы $\tilde{W}_2^2[a,b]$ и $\bar{W}_2^2[a,b]$, где $\tilde{W}_2^2[a,b]$ состоит из периодических функций с периодом $b-a$, а $\bar{W}_2^2[a,b]$ из функций, удовлетворяющих условиям $f'(a)=z_1'$, $f'(b)=z_N'$ (z_1', z_N' - заданные числа).

В [1] показано, что решением этой задачи во всех трех случаях будет кубический сплайн из соответствующего класса, причем в случае класса $W_2^2[a,b]$ сплайн будет удовлетворять условиям $S''(a)=0$, $S''(b)=0$, в случае $\tilde{W}_2^2[a,b]$ - условиям $S^{(p)}(a) = S^{(p)}(b)$, $p=0,1,2$, и для класса $\bar{W}_2^2[a,b]$ - $S'(a)=z_1'$, $S'(b)=z_N'$. Там же изучен вопрос о единственности решения задачи.

Формулируемые ниже достаточные условия единственности в отличие от [1], где рассуждения ведутся в терминах разрывов стар -

ших производных сплайна, обладают достаточной наглядностью и могут служить в качестве практических критериев единственности.

ТЕОРЕМА I. Задача минимизации функционала (I) при ограничениях (2) имеет единственное решение в классе $\widetilde{W}_2^2[a,b]$, если среди функций, удовлетворяющих (2), не найдется ни одного многочлена нулевой степени, в классе $W_2^2[a,b]$ – ни одного многочлена степени ниже второй и в классе $\overline{W}_2^2[a,b]$ – многочлена степени ниже третьей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S(x)$ и $\widetilde{S}(x)$ – два кубических сплайна из одного и того же класса, дающие решение задачи в этом классе. Легко видеть, что они совпадают с точностью до многочлена первой степени, т.е. $\widetilde{S}(x) = S(x) + c_1 x + c_0$, $x \in [a,b]$, где c_0, c_1 – постоянные. Покажем, что во всех трех классах $c_0 = c_1 = 0$. Для функций из класса $\widetilde{W}_2^2[a,b]$ достаточно показать, что $c_0 = 0$, так как $c_1 = 0$ в силу условий периодичности. Предположим, что $c_0 \neq 0$. Пусть для определенности $c_0 > 0$. В силу ограниченности $S(x)$ существует такое $\beta > 0, \beta \leq 1$, что $0 \leq -\beta S(x) + c_0/2 \leq c_0$, $x \in [a,b]$. Прибавляя ко всем частям этого неравенства $S(x)$, получаем $S(x) \leq (1-\beta)S(x) + c_0/2 \leq \widetilde{S}(x)$, $x \in [a,b]$. Так как $S(x)$ и $\widetilde{S}(x)$ удовлетворяют ограничениям (2), то и сплайн $S^*(x) = (1-\beta)S(x) + c_0/2$ им тоже удовлетворяет. Имеем далее $J(S^*) = (1-\beta)^2 J(S)$, но $(1-\beta)^2 < 1$, а по условию теоремы $J(S) \neq 0$ (нулевого значения функционал $J(f)$ достигает на многочлене первой степени), следовательно, $J(S^*) < J(S)$, что противоречит предположению о том, что $S(x)$ доставляет минимум функционалу $J(f)$. Отсюда $c_0 = 0$.

При доказательстве единственности в классе $W_2^2[a,b]$ следует рассмотреть сплайн

$$S^*(x) = \begin{cases} (1-\beta)S(x) + \beta S(x^*) + \frac{1}{2}(c_1 x + c_0), & \text{если } x^* \in [a,b], \\ (1-\beta)S(x) + \frac{1}{2}(c_1 x + c_0), & \text{если } x^* \notin [a,b], \end{cases}$$

где $x^* = -c_0/c_1$ (x^* может принимать значения $\pm\infty$).

Доказательство единственности сглаживающего сплайна в классе $\overline{W}_2^2[a,b]$ будет опираться на утверждение теоремы характеризации (см. [I,2]), которое состоит в том, что для величин разрывов третьей производной сглаживающего сплайна $S(x)$, которые определяются формулами

$$D_i = \begin{cases} S'''(x_1 + 0), & i = 1, \\ S'''(x_i + 0) - S'''(x_i - 0), & i = 2, \dots, N-1, \\ -S'''(x_N - 0), & i = N, \end{cases}$$

выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} D_i \geq 0 \quad &\text{при} \quad S(x_i) = Z_i^0 - \delta_i \ , \\ D_i \leq 0 \quad &\text{при} \quad S(x_i) = Z_i^0 + \delta_i \ , \\ D_i = 0 \quad &\text{при} \quad Z_i^0 - \delta_i < S(x_i) < Z_i^0 + \delta_i \ . \end{aligned} \qquad (3)$$

В силу того, что среди допустимых сплайнов нет ни одного многочлена второй степени и ниже, элемент $S(x)$ имеет по крайней мере один неравный нулю разрыв. Но тогда и $\tilde{S}(x) = S(x) + c_0$ ($c_1 = 0$ в силу граничных условий) имеет в этой же точке такой же разрыв. Из теоремы характеризации следует, что оба сплайна в этой точке выходят на границу (левую или правую, что зависит от знака разрыва) и, следовательно, их значения совпадают. Отсюда $c_0 = 0$. Теорема доказана.

2. Рассмотрим теперь задачу построения сглаживающего кубического сплайна. Как показано в [I], она сводится к минимизации квадратичного относительно переменных $Z_i = S(x_i)$, неотрицательного функционала $F(Z) = J(S)$ (здесь $Z = (Z_1, \dots, Z_N)^T$) в параллелепипеде G: $|Z_i - Z_i^0| \leq \delta_i$, $i = 1, \dots, N$.

Решение будем искать при помощи метода штрафных функций. Впервые такой подход был предложен в [3]. Суть метода состоит в замене задачи на условный экстремум:

$$\left. \begin{array}{c} \text{минимизировать } F(Z) \\ Z \in G \end{array} \right\} \qquad (4)$$

последовательностью задач безусловной минимизации функционалов вида

$$I_L(Z) = F(Z) + V_L(Z), \qquad L = 1, 2, \dots \ . \qquad (5)$$

Функции штрафа $V_L(Z)$ выбираются выпуклыми и такими, что

$$\lim_{L\to\infty} V_L(Z) = \begin{cases} 0, \text{ если } & Z \in \mathrm{int}G, \\ +\infty, \text{ если } & x \notin G. \end{cases}$$

При этом, как показано в [4], имеет место сходимость последовательности точек минимума функционалов (5) – $\{Z^L\}$ к решению задачи (4). Очевидно, что функции

$$V_L(Z) = r_L^2 \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(Z_i), \tag{6}$$

где $\varphi_i(Z_i) = (Z_i - Z_i^0 - \delta_i)_+^3 + (Z_i^0 - Z_i - \delta_i)_+^3$, $r_L > 0$, $\lim\limits_{L\to\infty} r_L = +\infty$, удовлетворяют сформулированным условиям.

Интересен вопрос о скорости сходимости метода штрафов в рассматриваемой задаче. При ответе на него могут быть использованы общие результаты, приведенные в [4]. Подход, описанный ниже, позволил получить для одного частного случая задачи (4) оценку вида $\| Z^* - Z^L \| \le K/r_L$, где Z^* – решение задачи (4), K – вычисляемая константа, что позволяет за один шаг метода получить приближенное решение требуемой точности.

Пусть в задаче (4) решение ищется среди сплайнов, для которых $S(a) = Z_1^0$, $S(b) = Z_N^0$, тогда число неизвестных уменьшается на два, а множество G будет определяться неравенствами: $|Z_i - Z_i^0| \le \delta_i$, $i = 2,\dots,N-1$. Всюду в этом пункте, говоря о задаче (4), будем иметь в виду эти замечания. Нетрудно видеть, что в этом случае для всех трех типов граничных условий функционал $F(Z)$ является строго выпуклым.

В целях упрощения выкладок все рассуждения этого пункта будем проводить для периодических сплайнов, однако выводы, с точностью до величин некоторых констант, будут справедливы и для остальных типов граничных условий.

Рассмотрим, как это делается в [4], вместо функций штрафа (6) их непрерывный аналог, для чего в выражении (6) заменим r_L на $1/t$, $t > 0$, $V(Z;t) = \frac{1}{t^2} \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_i(Z_i)$ и обозначим $I(Z;t) = F(Z) + V(Z;t)$. Пусть $Z(t)$ минимизирует $I(Z;t)$ и пусть последовательность $\{t_L\}$ такая, что $t_L > 0$, $\lim\limits_{L\to\infty} t_L = 0$, тогда, очевидно, $\lim\limits_{L\to\infty} Z(t_L) = Z^*$. Обозначим $Z(0) = Z^*$. Справедлива

ЛЕММА I. Решение $Z(t)$ единственным образом определено и непрерывно при $t \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу того, что функционал $I(Z;t)$ для любого $t>0$ является строго выпуклым, его минимум достигается в единственной точке; $Z(0)$ также определено единственным образом.

Покажем, что $Z(t)$ непрерывно при $t>0$. Пусть $t,\tilde{t}>0$, и им соответствуют решения $Z=Z(t)$, $\tilde{Z}=Z(\tilde{t})$. Формула Лагранжа для операторов применительно к $I'(Z;t)$ дает $(I'(\tilde{Z};t)-I'(Z;t),\ \Delta Z)=$ $=(I''(\hat{Z};t)\Delta Z,\Delta Z)$, где $\Delta Z=\tilde{Z}-Z$, $(x,y)=\sum\limits_{i=1}^{N} x_i y_i$ - скалярное произведение двух векторов. Учитывая, что $I'(\tilde{Z};\tilde{t})=0$, $I'(Z;t)=0$, получаем $(V'(\tilde{Z};t)-V'(\tilde{Z};\tilde{t}),\Delta Z)=(I''(\hat{Z};t)\Delta Z,\Delta Z)$. Но симметричная матрица $I''(\hat{Z};t)$ является положительно определенной, как сумма положительно определенной $F''(\hat{Z})$ и положительно полуопределенной $V''(\hat{Z};t)$ матриц. И, в силу того, что матрица $F''(Z)$ постоянна, существует $m>0$ такое, что $(I''(\hat{Z};t)\Delta Z,\Delta Z)=\Delta Z^{T}I''(\hat{Z};t)\Delta Z\geq m\|\Delta Z\|^2$, где $\|\Delta Z\|=\sqrt{(\Delta Z,\Delta Z)}$. Следовательно, $(V'(\tilde{Z};t)-V'(\tilde{Z};\tilde{t}),\Delta Z)\geq m\|\Delta Z\|^2$, или $\|V'(\tilde{Z};t)-V'(\tilde{Z};\tilde{t})\|\geq m\|\Delta Z\|$. Отсюда и из непрерывности $V'(Z;t)$ следует непрерывность $Z(t)$ при $t>0$. Непрерывность $Z(t)$ в точке $t=0$ очевидна. Доказательство закончено.

Введем обозначения: $J_0(Z)=\{j/1<j<N,\ D_j=0\}$, $J_-(Z)=\{j/1<j<$ $<N,\ D_j\neq 0\}$, $J_0^1=\{j\in J_0(Z^*)/|Z_j^*-Z_j^0|=\delta_j\}$, где $D_j=\frac{\partial}{\partial Z_j}F(Z)$ и, как легко проверить, совпадают с D_j, определенными формулами (3). Пусть $t>0$, тогда для $j\in J_-(Z)$ $|Z_j-Z_j^0|>\delta_j$. Действительно, необходимыми условиями минимума функционала $I(Z;t)$ будут соотношения

$$\frac{\partial}{\partial Z_j}I(Z;t)=\frac{\partial}{\partial Z_j}F(Z)+\frac{\partial}{\partial Z_j}V(Z;t)=0,\quad j=2,\dots,N-1.$$

Для $j\in J_-(Z)$ имеем $\frac{1}{t^2}\cdot\frac{\partial}{\partial Z_j}\varphi_j(Z_j)=-D_j$ или

$$\frac{3}{t^2}[(Z_j-Z_j^0-\delta_j)_+^2-(Z_j^0-Z_j-\delta_j)_+^2]=-D_j, \qquad (7)$$

откуда следует, что $|Z_j^0-Z_j|>\delta_j$.

ЛЕММА 2. Для достаточно малых $t>0$ имеет место неравенство

$$\| Z^* - Z\| \le C\sqrt{\tfrac{1}{3}\|D\|}\, t \ , \tag{8}$$

где $C = 1+\frac{3}{2}\cdot\frac{b-a}{h}$, $h = \min\limits_{1\le i\le N-1} h_i$, $h_i = x_{i+1}-x_i$, $\|y\| = \max\limits_{1\le i\le N} |y_i|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу непрерывности $Z(t)$ можно указать такое $t>0$, что $J_-(Z)\supset J_-(Z^*)$, $J_-(Z)\setminus J_-(Z^*)\subset J_0^1$. Пусть $j\in J_-(Z)$ и пусть, для определенности, $Z_j > Z_j^0 + \delta_j$, тогда из (7) следует $(Z_j-Z_j^0-\delta_j)^2 = [(Z_j-Z_j^*)+(Z_j^*-Z_j^0)-\delta_j]^2 = (Z_j-Z_j^*)^2 = -\frac{t^2}{3}D$. Рассмотрев случай $Z_j < Z_j^0-\delta_j$, получаем

$$\max_{j\in J_-(Z)}{}^2 |Z_j^* - Z_j| \le \frac{t^2}{3}\|D\|. \tag{9}$$

Пусть $\tilde\Delta$ - подсетка сетки Δ, состоящая из узлов a, b, x_j, $j\in J_-(Z)$. Сплайны $\tilde S^*(x)$, $\tilde S(x)$, построенные на сетке $\tilde\Delta$ и интерполирующие значения Z_j^*, Z_j, $j\in J_-(Z)$, соответственно совпадут, очевидно, со сплайнами $S^*(x)$, $S(x)$ на сетке Δ. Пусть $\eta = \max\limits_{j\in J_-(Z)} |Z_j^* - Z_j|$. Рассмотрим сплайн $\hat S(x)=\tilde S^*(x) - S(x)$. Записав систему для определения сплайна через $m_j = S'(x_j)$ [5] на сетке $\tilde\Delta$ и проведя оценку для $\max\{|m_j|,|m_a|,|m_b|\}$, воспользовавшись тем, что норма обратной матрицы системы не больше единицы, можно показать, что для $\hat S(x)$ будет выполняться $\|\hat S(x)\|_{C[a,b]} \le (1+\frac{3}{2}\cdot\frac{\tilde H}{\tilde h})\eta \le (1+\frac{3}{2}\cdot\frac{b-a}{h})\eta$, здесь $\tilde h$ - минимальный, а $\tilde H$ - максимальный шаги сетки $\tilde\Delta$. Но тогда и

$$\| Z^* - Z\| \le C\eta \ , \tag{10}$$

так как $\|\tilde S(x)\|_{C[a,b]} \ge \|Z^* - Z\|$. Подставив (9) в (10), получаем (8). Лемма доказана.

Покажем, что на множестве $G'\supset G$, определенном неравенствами $|Z_i-Z_i^0|\le \delta_i+\varepsilon$, $i=2,\dots,N-1$ (здесь $\varepsilon>0$ - требуемая точность приближения решения), для нормы D справедлива оценка

$$\|D\| \le \frac{12}{h^2}\,\omega^0 \ , \tag{11}$$

где $\omega^0 = \max\limits_{1\le i\le N} |(Z_{i+1}^0-Z_i^0)/h_i - (Z_i^0-Z_{i-1}^0)/h_{i-1}| + 4(\delta+\varepsilon)/h$, $\qquad Z_0^0 =$

$= Z^0_{N-1}$, $Z^0_{N+1}=Z^0_2$, $h_0 = h_{N-1}$, $h_N = h_1$, $\delta = \max\limits_{1\le i\le N} \delta_i$. Действительно, в периодическом случае $D_i = \frac{1}{h_i}(M_{i+1}-M_i) - \frac{1}{h_{i-1}}(M_i - M_{i-1})$, $i = 1,\ldots, N$, где $M_i = S''(x_i)$, $M_0 = M_{N-1}$, $M_{N+1} = M_2$.

Имеем далее $|D_i| \le \frac{4}{h} \max\limits_{1\le i\le N} |M_i| = \frac{4}{h}\|M\|$. Из оценки правой части системы для определения сплайна через моменты M_i [5] и того факта, что норма обратной матрицы системы не больше единицы,получаем $\|M\| \le \frac{3}{h}\omega^0$. Отсюда непосредственно следует (II). Таким образом,доказана

ТЕОРЕМА 2. Оценка скорости сходимости в задаче (4) метода штрафов с функцией штрафа (6) при достаточно больших r (=1/t) имеет вид

$$\| Z^* - Z\| \le K/r \ , \tag{12}$$

где $K = 2(1+ \frac{3}{2}\cdot\frac{b-a}{h})\sqrt{\omega^0}/h$.

3. Перейдем к описанию алгоритма отыскания решения. Выберем параметр штрафа r . Если требуется получить приближение решения такое, что $\|Z^*-Z\| \le \varepsilon$, то в соответствии с (I2) следует положить $r = K/\varepsilon$. Далее будем решать задачу минимизации функционала $I(Z)$. Для этой цели используем метод Ньютона, состоящий, как известно, в том, что на k+1-м шаге функционал в окрестности точки $Z^{(k)}$ (приближения решения, полученного на предыдущем шаге) аппроксимируется квадратичной функцией, точка минимума которой берется в качестве k+1-го приближения $Z^{(k+1)}$. В функционале $I(Z)$ первое слагаемое уже является квадратичной функцией,поэтому остается аппроксимировать слагаемое $V(Z)$. Разложение $\varphi_i(Z_i)$ в многочлен Тейлора в точке $Z_i^{(k)}$ дает

$$\varphi_i(Z_i) \cong \varphi_i(Z_i^{(k)}) + \varphi_i'(Z_i^{(k)})(Z_i - Z_i^{(k)}) + \frac{1}{2}\varphi_i''(Z_i^{(k)})(Z_i - Z_i^{(k)})^2 = \psi_i^{(k)}(Z_i).$$

Необходимые условия минимума функционала

$$I^{(k)}(Z) = F(Z) + r^2 \sum_{i=1}^{N} \psi_i^{(k)}(Z_i)$$

имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial Z_i} I^{(k)}(Z) = \frac{\partial}{\partial Z_i} F(Z) + r^2 \frac{\partial}{\partial Z_i} \Psi_i^{(k)}(Z_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

или, если положить $\tilde{\varphi}_i''(Z_i^{(k)}) = \max\{\alpha, \varphi_i''(Z_i^{(k)})\}$, где $\alpha > 0$ мало (например, $\alpha = 1/r^3$),

$$Z_i + \rho_i^{(k)} D_i = Z_i^{(k)} - A_i^{(k)}, \quad i = 1, \dots, N, \tag{13}$$

где

$$\rho_i^{(k)} = 1/r^2 \tilde{\varphi}_i''(Z_i^{(k)}) = \begin{cases} 1/6r^2(d_i - \delta_i), & d_i \ge \delta_i + \alpha, \\ 1/6r^2\alpha, & d_i < \delta_i + \alpha, \end{cases}$$

$$d_i = |Z_i^{(k)} - Z_i^0|,$$

$$A_i^{(k)} = \varphi_i'(Z_i^{(k)})/\varphi_i''(Z_i^{(k)}) = \frac{1}{2}[(Z_i^{(k)} - Z_i^0 - \delta_i)_+ - (Z_i^0 - Z_i^{(k)} - \delta_i)_+].$$

Если в системе (10) перейти к переменным $M_i = S''(x_i)$, то она, как показано в [5], примет вид

$$\left.\begin{aligned} & a_1 M_1 + b_1 M_2 + c_1 M_3 = g_1, \\ & b_1 M_1 + a_2 M_2 + b_2 M_3 + c_2 M_4 = g_2, \\ & c_{i-2} M_{i-1} + b_{i-1} M_{i-1} + a_i M_i + b_i M_{i+1} + c_i M_{i+2} = g_i, \\ & \qquad\qquad\qquad i = 3, \dots, N-2, \\ & c_{N-3} M_{N-3} + b_{N-2} M_{N-2} + a_{N-1} M_{N-1} + b_{N-1} M_N = g_{N-1}, \\ & c_{N-2} M_{N-2} + b_{N-1} M_{N-1} + a_N M_N = g_N. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Коэффициенты системы даются формулами

$$\left.\begin{aligned} & a_i = \frac{1}{3}(h_{i-1} + h_i) + \frac{1}{h_{i-1}^2} \rho_{i-1}^{(k)} + \left(\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i}\right)^2 \rho_i^{(k)} + \frac{1}{h_i^2} \rho_{i+1}^{(k)}, \\ & \qquad\qquad i = 2, \dots, N-1, \\ & b_i = \frac{1}{6} h_i - \frac{1}{h_i}\left[\left(\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i}\right)\rho_i^{(k)} + \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}\right)\rho_{i+1}^{(k)}\right], \\ & \qquad\qquad i = 2, \dots, N-2, \\ & \vdots \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$c_i = \frac{1}{h_i h_{i+1}} \rho_{i+1}^{(k)}, \quad i = 2,\dots,N-3,$$

$$g_i = \frac{A_{i+1}^{(k)} - A_i^{(k)}}{h_i} - \frac{A_i^{(k)} - A_{i-1}^{(k)}}{h_{i-1}}, \quad i = 2,\dots,N-1.$$

Для случая, когда сплайн $S(x)$ удовлетворяет условиям $S''(a) = S''(b) = 0$, имеем $a_1 = a_N = 1$, $b_1 = c_1 = c_{N-2} = b_{N-1} = g_1 = g_N = 0$. Если $S(x)$ такой, что $S'(a) = Z_1'$, $S'(b) = Z_N'$, то

$$a_1 = \frac{h_1}{3} + \frac{1}{h_1^2}(\rho_1^{(k)} + \rho_2^{(k)}), \qquad g_1 = \frac{A_2^{(k)} - A_1^{(k)}}{h_1} - Z_1',$$

$$b_1 = \frac{h_1}{6} - \frac{1}{h_1}\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right)\rho_2^{(k)} - \frac{1}{h_1^2}\rho_1^{(k)}, \qquad c_1 = \frac{1}{h_1 h_2}\rho_2^{(k)},$$

$$a_N = \frac{h_{N-1}}{3} + \frac{1}{h_{N-1}^2}(\rho_{N-1}^{(k)} + \rho_N^{(k)}), \qquad g_N = Z_N' - \frac{A_N^{(k)} - A_{N-1}^{(k)}}{h_{N-1}},$$

$$b_{N-1} = \frac{h_{N-1}}{6} - \frac{1}{h_{N-1}}\left(\frac{1}{h_{N-1}} + \frac{1}{h_{N-2}}\right)\rho_{N-1}^{(k)} - \frac{1}{h_{N-1}^2}\rho_N^{(k)},$$

$$c_{N-2} = \frac{1}{h_{N-1} h_{N-2}} \rho_{N-1}^{(k)}.$$

Для периодического случая система имеет вид $c_{i-2}M_{i-2} + b_{i-1}M_{i-1} + a_iM_i + b_iM_{i+1} + c_iM_{i+2} = g_i$, $i = 1,\dots,N$, где все коэффициенты определяются формулами (15). Причем величины с индексами $N+L$ и $L+1$, $-2 \le L \le 2$, полагаются равными.

В [5] показано, что система (14) для всех трех случаев имеет единственное решение. Матрица системы имеет пятидиагональную структуру. Для решения системы с такой матрицей могут быть использованы алгоритмы монотонной и немонотонной прогонок [5]. После определения величин M_i, величины Z_i вычисляются по формулам (13), где

$$D_1 = \frac{1}{h_1}(M_2 - M_1),$$

$$D_i = \frac{1}{h_i}(M_{i+1} - M_i) - \frac{1}{h_{i-1}}(M_i - M_{i-1}), \quad i = 2,\dots,N-1,$$

$$D_N = \frac{-1}{h_{N-1}}(M_N - M_{N-1}).$$

В периодическом случае все D_i определяются средней формулой, где $i = 1,\dots,N$. Таким образом, отыскивается $k+1$-е приближение решения. Процесс прекращается, как только $\|Z^{(k+1)} - Z^{(k)}\|$ становится меньше некоторого $\varepsilon' > 0$. Точка $Z^{(k+1)}$ принимается за точку минимума функционала $I(Z)$.

Рассмотрим вместо условия $\|Z^* - Z\| < \varepsilon$, налагаемого на приближение решения, условие $\|Z - Z^0\| \le \|\delta\| + \varepsilon$. Для определения такого приближения может быть использован следующий алгоритм. Пусть найдено Z^L, соответствующее значению параметра штрафа r_L. Если для него справедливо $\|Z^L - Z^0\| \le \|\delta\| + \varepsilon$, то процесс прекращается, в противном случае r_{L+1} вычисляется по формуле $r_{L+1} = \frac{1}{\varepsilon q}\sqrt{\frac{1}{3}\|D\|^L}$, где $0 < q < 1$, и т.д. Описанный алгоритм может быть использован в самом общем случае задачи (4) для трех типов граничных условий.

Таблица

x_i	Z_i^0	$S(x_i)$	$S(x_i) - Z_i^0$
-55.245	-135.257	-135.3570	-0.10005
-50.634	-123.455	-123.5550	-0.10005
-46.110	-111.621	-111.7133	-0.09231
-41.671	-99.758	-99.8171	-0.05912
-37.319	-87.862	-87.8785	-0.01652
-33.053	-75.937	-75.9042	0.03276
-28.875	-63.983	-63.9098	0.07318
-24.783	-52.000	-51.8999	0.10006
-20.778	-39.989	-39.8888	0.10017
-16.856	-27.952	-27.8808	0.07118
-12.991	-15.899	-15.8250	0.07394
-9.177	-3.831	-3.7305	0.10047
-5.413	8.252	8.3529	0.10091
-1.668	20.369	20.2680	-0.10098
2.370	32.454	32.3534	-0.10057
6.783	44.406	44.4177	0.01176
11.567	56.211	56.2956	0.08470
16.721	67.857	67.9572	0.10028
22.239	79.331	79.4311	0.10011
28.118	90.616	90.7161	0.10012
34.353	101.702	101.8020	0.10008
40.937	112.573	112.6731	0.10011
47.865	123.218	123.3181	0.10011

Остановимся на вопросе сходимости метода Ньютона. Хотя описанный выше алгоритм во всех примерах показал сходимость, в общем случае он ее не гарантирует. Поэтому рекомендуется использовать так называемый метод Ньютона с регулировкой шага [6], который, кроме описанной выше процедуры получения решения, на каждом шаге требует проверки выполнения условий

$$I(Z^{(k+1)}) - I(Z^{(k)}) \leq \tau\sigma\,(I'(Z^{(k)}),\ Z^{(k+1)} - Z^{(k)}), \tag{16}$$

где $0 < \tau < \frac{1}{2}$, $\sigma \leq 1$. Если (I6) выполняется при $\sigma = 1$, то в качестве k+1-го приближения решения берется точка $Z^{(k+1)}$, если же нет, то точка $Z^{(k)} + \sigma(Z^{(k+1)} - Z^{(k)})$, где σ такое, что условие (I6) выполнено.

В таблице приведены результаты сглаживания линии сечения профиля лопатки ГТД. Упомянутые выше величины имели значения: $\delta_1 = \delta = 0{,}I$, $\varepsilon = 0{,}01\delta$, $\varepsilon' = 0{,}1\varepsilon$. Параметр r, при котором была достигнута точность выполнения ограничений ε, равнялся 67. Суммарное число итераций составило 26.

Литература

I. ВЕРШИНИН В.В. О сглаживающих сплайнах и их производных. - Новосибирск, В.и., I980. -20 с. - (Препринт/ИМ СО АН СССР).

2. ЛОРАН П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. - М.: Мир, I975. - 496 с.

3. FLORENCIO I. Utreras. On computing robust splines and applications. - SIAM J. on Scient.and Stat Computing, 1981, v. 2, p.153-163.

4. ГРОССМАН К., КАПЛАН А.А. Нелинейное программирование на основе безусловной минимизации. -Новосибирск.: Наука, I98I.-I8I с.

5. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. -М.: Наука, I980. - 352 с.

6. ПШЕНИЧНЫЙ Б.Н., ДАНИЛИН Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. -М.: Наука, I975. - 3I9 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
7 июня I983 года