МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ В ЧИСЛЕННОМ АНАЛИЗЕ
(Вычислительные системы)
1983 год Выпуск 98

УДК 681.3:518.12

# ПРИМЕНЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА ЭВМ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ОЦЕНОК ПОГРЕШНОСТИ СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИИ НА НЕРЕГУЛЯРНОЙ СЕТКЕ

Б.Д.Баячорова

В книге [1] предложена методика применения ЭВМ для получения оценок погрешности одномерной сплайн-интерполяции и получен ряд таких оценок.

В настоящей работе нами по методу доказательных вычислений [3, 6] с помощью пакета программ [4, 5] улучшена одна оценка работы [1], найденная без помощи ЭВМ, и получена одна новая оценка погрешности на нерегулярной двумерной сетке.

Мы будем использовать обозначения работы [1, гл.2, §12]. Полученные в этом параграфе, а также в работе [2] оценки можно записать следующим образом:

Если $f(x, y) \in W^2_\infty(\Omega)$, то

$$\sigma(\Omega) \equiv \|S_1(x,y) - f(x,y)\|_C \le \alpha_{\mu\nu}\|\Omega\|^2_\mu \| D^2 f(x, y)\|_\nu , \qquad (1)$$

где $\Omega$ - некоторый невырожденный треугольник, $S_1(x,y)$ - интерполяционный сплайн первой степени, который в каждом из треугольников имеет вид: $S_1(x,y) = ax + by + c$, и совпадает со значениями $f(x,y)$ в вершинах треугольников, $\|\cdot\|_\mu$ - некоторый неотрицательный функционал на множестве треугольников и $\|\cdot\|_\nu$ - норма матрицы, составленной из вторых производных функции $f$. В соответствии со смыслом задачи функционал $\|\cdot\|_\mu$ должен быть однородным (при замене треугольника подобным значение функционала умножается на коэффициент подобия) и инвариантным при сдвиге и зеркальном отражении относительно осей координат, и $\|\cdot\|_\mu$, $\|\cdot\|_\nu$ должны быть симметричны относительно $x, y$.

Пусть $P_1, P_2, P_3$ – вершины треугольника $\Omega$. Обозначим для точки $P \in \Omega$

$$\left.\begin{aligned} &\phi(P) \equiv \phi(x,y) = f(x,y) - S_1(x,y), \\ &Q(P_i,P) = \frac{1}{2}(x_i-x)^2 \|D^{2,0}f(x,y)\|_\infty + \\ &+ \frac{1}{2}(y_i-y)^2\|D^{0,2}f(x,y)\|_\infty + |x_i-x|\,|y_i-y|\,\|D^{1,1}f(x,y)\|_\infty . \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Очевидно, $D^2f(x,y) = D^2\phi(x,y)$, $\phi(P_i) \equiv \phi(x_i,y_i)=0$ $(i=1,2,3)$.

Тогда из [I, с. 90, формула (9) и дальнейшая оценка ]и в силу того, что $\phi(P_i) = 0$ $(i = 1,2,3)$, получаем

$$\begin{aligned} |\phi(P_i)| &= |\phi(x,y)| = |(x_i-x)D^{1,0}\phi(x,y) + (y_i-y)D^{0,1}\phi(x,y) + \\ &+ \int_x^{x_i}(x_i-v)D^{2,0}\phi(v,y_i)dv + \int_y^{y_i}(y_i-v)D^{0,2}\phi(x,v)dv + \\ &+ (x_i - x)\int_y^{y_i} D^{1,1}\phi(x,v)dv| \le \\ &\le |(x_i-x)D^{1,0}\phi(x,y) + (y_i-y_0)D^{0,1}\phi(x,y)| + Q(P_i,P) \quad (i=1,2,3). \end{aligned}$$

Если экстремальная для функции $\phi(P)$ на $\Omega$ точка $P_0$ находится внутри $\Omega$, то из необходимого условия экстремума имеем: $D^{1,0}\phi(x_0,y_0) = 0$, $D^{0,1}\phi(x_0,y_0) = 0$, и мы получаем $|\phi(P_0)| \le$ $\le Q(P_i,P_0)$ $(i=1,2,3)$, откуда следует, что

$$|\phi(P_0)| \le \min_{i=1,2,3} Q(P_i,P_0). \qquad (3)$$

Если точка $P_0$ находится на границе треугольника (на стороне $P_mP_n$), то производная $\phi$ по направлению этой стороны в точке $P_0$ должна быть равна 0. Эта производная пропорциональна выражению $(x_m-x_n)D^{1,0}\phi(x_0,y_0) + (y_m-y_n)D^{0,1}\phi(x_0,\ y_0)$. Поскольку векторы $\overrightarrow{P_0P_m}, \overrightarrow{P_0P_n}$ коллинеарны вектору $\overrightarrow{P_mP_n}$, то отсюда $(x_i - x_0)D^{1,0}\phi +$ $+ (y_i - y_0)D^{0,1}\phi=0$ $(i=m,n)$. Таким образом, если точка $P_0$ лежит на стороне $P_m P_n$, то

$$|\phi(P_0)| \le \min\,(Q(P_m, P_0), Q(P_n,P_0)) \quad ((m,n) = (1,2), (2,3), (3,1)). \qquad (4)$$

Из соотношений (2)-(4) получаем оценку для левой части (I) в виде:

$$\sigma(\Omega) \le \max\,(\tilde\sigma(\Omega),\ \tilde{\tilde\sigma}(\Omega)), \qquad (5)$$

$$\tilde\sigma(\Omega) = \sup_{P_0\in\Omega}\ \min_{i=1,2,3} Q(P_i,P_0) \qquad (6)$$

($\tilde\sigma$ соответствует случаю, когда точка $P_0$ находится внутри $\Omega$),

$$\tilde{\tilde\sigma}(\Omega) = \max_{(m,n)=(1,2),(2,3),(3,1)}\ \sup_{P_0\in P_mP_n} \min(Q(P_m,P_0),Q(P_n,P_0)) \qquad (7)$$

($\tilde{\tilde\sigma}$ соответствует случаю, когда точка $P_0$ находится на границе $\Omega$ ).

Для определения коэффициентов $\alpha_{\mu\nu}$ в выражении (I) находим максимумы отношений $\tilde\sigma$, $\tilde{\tilde\sigma}$ к выражениям вида $\|\Omega\|^2_\mu \ \| D^2f \|_\nu$. В тех случаях, когда эти выражения слишком сложны для получения конкретной оценки аналитическими методами, можно применять доказательные вычисления на ЭВМ [3].

В данном случае требуется определить максимум на множестве всевозможных треугольников. Используя вышеотмеченные свойства функционала $\|\cdot\|_\mu$, заменим это множество компактным подмножеством возможно меньшей размерности. Из свойств функционала $\|\cdot\|_\mu$, нормы $\|\cdot\|_\nu$ и соотношений (2)-(7) получаем, что при сдвиге, гомотетии, зеркальном отражении относительно осей x и y, перенумерации вершин треугольника, а также при замене x на y, y на x обе стороны соотношения (I) либо остаются неизменными, либо умножаются на одно и то же число, т.е. выражение для $\alpha_{\mu\nu}$ не изменится. Следовательно, не умаляя общности, можно считать, что в каждом треугольнике есть такая вершина, что весь треугольник лежит в одном квадранте от этой вершины; эту вершину условимся обозначать через $P_1=(0,0)$ и будем считать этот квадрант первым. Кроме того, можно считать, что самой большой проекцией $\Omega$ на оси координат будет проекция на ось x стороны треугольника $P_1P_2$, причем можно положить ее равной I.

Таким образом, в дальнейшем предполагается

$$P_1 = (0,0)\,,\ P_2=(1,y_2)\ \ (0\le y_2\le 1)\,,\ P_3=(x_3,y_3)\ \ (0\le x_3,y_3\le 1)\,. \qquad (8)$$

Рассмотрим два примера.

ПРИМЕР I. В работе [I, теорема 2.I0] получена оценка

$$\| S_1(x,y) - f(x,y)\|_C \le \frac{h^2}{3}\, \| D^2f(x,y)\|_\infty ,$$

где h – длина наибольшей стороны треугольника $\Omega$,

$$\|D^2 f(x,y)\|_\infty = \max_{r+s=2} \left\{ \| D^{r,s} f(x,y) \|_\infty \right\}, \tag{9}$$

т.е. в обозначениях (I) $\|\Omega\|_\mu = \max_{m,n=1,2,3} |P_m P_n|$, $\|\cdot\|_\nu = \|\cdot\|_\infty$, $\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{3}$. Имеем

$$\alpha_{\mu\nu} \le \max(\tilde{\alpha}, \tilde{\tilde{\alpha}}),$$

$$\tilde{\alpha} = \sup_\Omega \frac{\tilde{\sigma}(\Omega)}{\|\Omega\|_\mu^2 \, \| D^2 f(x,y)\|_\infty},$$

$$\tilde{\tilde{\alpha}} = \sup_\Omega \frac{\tilde{\tilde{\sigma}}(\Omega)}{\|\Omega\|_\mu^2 \, \|D^2 f(x,y)\|_\infty}.$$

Рассматривая $\Omega$ в области (8), из (2), (3), и (9) получаем

$$\tilde{\alpha} \le \frac{1}{2} \sup_{\substack{0 \le y_2, x_3, y_3 \le 1 \\ x_1 = y_1 = 0,\, x_2 = 1}} \frac{\sup\limits_{(x_0, y_0)\in\Omega} \min\limits_{i=1,2,3} (|x_i - x_0| + |y_i - y_0|)^2}{\max(1+y_2^2, x_3^2+y_3^2, (1-x_3)^2+(y_2-y_3)^2)}, \tag{10}$$

где $\Omega$ – (переменный) треугольник с вершинами $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $(x_3, y_3)$. Оценка для $\tilde{\tilde{\alpha}}$ записывается аналогично.

Обозначим $\|P_i - P_j\|_1 = |x_i - x_j| + |y_i - y_j|$ $(P_i = (x_i, y_i))$, $\Phi(P_0) = \min\limits_{i=1,2,3} \|P_i - P_0\|_1^2$.

ЛЕММА. Значение $\Psi(\Omega) = \sup\limits_{P_0\in\Omega} \Phi(P_0)$ достигается либо в точке, где

$$\|P_1 - P_0\|_1 = \|P_2 - P_0\|_1 = \|P_3 - P_0\|_1, \tag{11}$$

либо на границе $\Omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что экстремальная для $\Phi$ точка $\tilde{P}_0 = (\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ находится внутри $\Omega$, но (II) для нее не выполняется. Тогда возможны следующие два случая.

I) $\Phi(\tilde{P}_0) = \|P_i - \tilde{P}_0\|_1 < \|P_j - \tilde{P}_0\|_1 \le \|P_k - \tilde{P}_0\|_1$. В этом случае для точки $P_\varepsilon = (\tilde{x}_0 + \varepsilon(\tilde{x}_0 - x_i), \tilde{y}_0 + \varepsilon(\tilde{y}_0 - y_i))$, где $\varepsilon > 0$, получаем $\|P_i - P_\varepsilon\|_1 = (1+\varepsilon)(|\tilde{x}_0 - x_i| + |\tilde{y}_0 - y_i|) > \|P_i - \tilde{P}_0\|_1$. Следовательно, для достаточно малого $\varepsilon$ будет $\Phi(P_\varepsilon) > \Phi(\tilde{P}_0)$, что противоречит предположению об экстремальности точки $\tilde{P}_0$.

2) $\Phi(\tilde{P}_0) = \|P_i-\tilde{P}_0\|_1 = \|P_j-\tilde{P}_0\|_1 < \|P_k - \tilde{P}_0\|_1$. Рассмотрим множество точек (отрезок) $P_t = (\tilde{x}_0 + tk_1, \tilde{y}_0 + tk_2)$, $t \in [0,t_1]$, где $k_1 = 1$, если $\tilde{x}_0 - x_i \geq 0$; $k_1 = -1$, если $\tilde{x}_0 - x_i < 0$; $k_2 = 1$, если $\tilde{y}_0 - y_j \geq 0$; $k_2 = -1$, если $\tilde{y}_0 - y_j < 0$; $t_1$ такое, что точка $P_{t_1}$ лежит на границе $\Omega$. Очевидно, для любого $t \in [0,t_1]$ справедливы неравенства $\|P_t - P_i\|_1 \geq \|\tilde{P}_0 - P_i\|_1$, $\|P_t - P_j\|_1 \geq \|\tilde{P}_0 - P_j\|_1$. Далее возможны следующие подслучаи.

а) Для всех $t \in [0,t_1]$ имеем $\|P_k - P_t\|_1 > \Phi(\tilde{P}_0)$. Тогда $\Phi(P_{t_1}) \geq \Phi(\tilde{P}_0)$, $P_{t_1}$ находится на границе $\Omega$.

б) Существуют $t \in (0,t_1]$ такие, что $\|P_k - P_t\|_1 = \Phi(\tilde{P}_0)$. Пусть $t^* > 0$ - минимальное из них.

Если $\|P_{t^*} - P_i\|_1 = \|P_{t^*} - P_j\|_1 = \Phi(\tilde{P}_0)$, то мы получаем (II).

Если же хотя бы одна из этих двух норм, например, $\|P_{t^*} - P_i\|_1 > \Phi(\tilde{P}_0)$, то в достаточно малой левой окрестности $t^*$ будет $\|P_t - P_i\|_1 > \Phi(\tilde{P}_0)$ (по непрерывности) и $\|P_t - P_k\|_1 > \Phi(\tilde{P}_0)$ (по построению). Но тогда мы приходим к уже рассмотренному случаю I. Лемма доказана.

Если $\sup\limits_{P_0 \in \Omega} \Phi(P_0)$ достигается на границе $\Omega$, то правая часть (I0) оценивается величиной $\tilde{\tilde{\alpha}}$. Оценим величину $\tilde{\alpha}$, для этого рассмотрим случай, когда $\sup\limits_{P_0 \in \Omega} \Phi(P_0)$ достигается внутри $\Omega$. Обозначим эту точку $P=(x,y)$, тогда соотношение (II) с учетом (8) принимает вид:

$$x+y = 1-x+|y_2-y| = |x_3-x| + |y_3-y|. \tag{12}$$

Поскольку точка $(x,y) \in \Omega$, то координата $y \leq \max(y_2, y_3)$. Здесь возможны случаи: а) $y \leq y_2$, $0 \leq y_3 \leq 1$, б) $0 \leq y_2 \leq y \leq y_3 \leq 1$. В случае "а" из первого равенства в (I2) получаем, что $x + y = \frac{1}{2}(1 + y_2)$. В случае "б", найдя выражения для $x, y$ через $x_3, y_2, y_3$ из двух равенств в (I2), получаем, что

$$x + y = \frac{1}{2}\left( \left| x_3 - \frac{1-y_2}{2} \right| + y_3 + \frac{1-y_2}{2} \right).$$

Таким образом, оценка для величины $\tilde{\alpha}$ принимает вид:

$$\tilde{\alpha} \le \frac{1}{2} \sup_{0\le y_2, x_3, y_3 \le 1} \frac{\max\left(\frac{1}{4}(1+y_2)^2, \frac{1}{4}\left(\left|x_3-\frac{1-y_2}{2}\right| + y_3+\frac{1-y_2}{2}\right)^2\right)}{\max(1+y_2^2, x_3^2+y_3^2, (1-x_3)^2+(y_2-y_3)^2)}. \quad (13)$$

Для конкретной оценки $\tilde{\alpha}$ по формуле (I3) применен алгоритм поиска глобального экстремума [5] с помощью пакета программ [4], который дал результат: $\tilde{\alpha} \in [0{,}25;\ 0{,}28]$. Оценка величины $\tilde{\tilde{\alpha}}$ имеется в формулах, приведенных в [I, с. 92]: $\tilde{\tilde{\alpha}} = 0{,}25$.

Для уточнения полученного результата был применен алгоритм поиска доказательства неравенства в конечномерной ограниченной области INEQPR [4]. Вычисления на ЭВМ ЕС-I033 с применением этого алгоритма показали, что $\tilde{\alpha} < 0{,}26$.

ТЕОРЕМА I. Имеет место неравенство:

$$\| S_1(x,y) - f(x,y)\|_C \le h^2\, 0.26\, \| D^2 f(x, y)\|_\infty .$$

Этот результат улучшает вышеприведенную оценку работы [I].

ПРИМЕР 2. Рассмотрим задачу. Найти оценки для величин $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ в выражении

$$\sigma(\Omega) \le (\alpha_1 \| D^{2,0} f\|_\infty + \alpha_2 \|D^{1,1} f\|_\infty + \alpha_3 \| D^{0,2} f\|_\infty)\, \| \Omega \|^2_\mu, \quad (14)$$

где

$$\| \Omega \|^2_\mu = |P_1P_2|^2 + |P_2P_3|^2 + |P_1P_3|^2. \quad (15)$$

В силу симметрии, $\alpha_1 = \alpha_3$. Обозначим $\tilde{\alpha}_i, \tilde{\tilde{\alpha}}_i$ $(i=1,2,3)$ коэф - фициенты для множеств функций $f$, у которых экстремальная точка $P_0$ находится внутри и на границе $\Omega$, соответственно. Тогда имеем:

$$\alpha_1 = \max(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\tilde{\alpha}}_1), \quad \alpha_2 = \max(\tilde{\alpha}_2, \tilde{\tilde{\alpha}}_2). \quad (16)$$

В случае, когда точка $P_0$ лежит внутри $\Omega$, сопоставляя соот - ношения (2), (3) и (I4), получаем выражение для $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2$ в виде

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1 &= \frac{1}{2} \sup_{P_1,P_2,P_3} \left( \|\Omega\|_\mu^{-2} \sup_{(x_0,y_0)\in\Omega} \min_{i=1,2,3} (x_i-x_0)^2\right), \\ \tilde{\alpha}_2 &= \sup_{P_1,P_2,P_3} \left( \|\Omega\|_\mu^{-2} \sup_{(x_0,y_0)\in\Omega} \min_{i=1,2,3} |(x_i-x_0)(y_i-y_0)|\right). \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

В случае, когда точка $P_0$ лежит на границе $\Omega$ (на стороне $P_m P_n$) из (2), (4), (I4) получаем аналогично (I7) выражения для $\tilde{\tilde{\alpha}}_1$, $\tilde{\tilde{\alpha}}_2$.

В этом случае величина следующего вида вычисляется непосредственно:

$$\sup_{P_0 \in P_m P_n} \min_{i=m,n} |x_i - x_0| \, | y_i - y_0| = \frac{1}{4} \, | x_m - x_n | \, | y_m - y_n | ,$$

и, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\tilde{\alpha}}_1 &= \frac{1}{2} \sup_{P_1, P_2, P_3} \left( \|\Omega\|_\mu^{-2} \frac{1}{4} \max_{i,j=1,2,3} |x_i - x_j|^2 \right), \\ \tilde{\tilde{\alpha}}_2 &= \sup_{P_1, P_2, P_3} \left( \|\Omega\|_\mu^{-2} \frac{1}{4} \max_{i,j=1,2,3} |x_i - x_j| \, |y_i - y_j| \right). \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

С учетом условия (8) числитель для $\tilde{\alpha}_1$ можно найти в явном виде

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{2} \sup_{0 \le y_2, x_3, y_3 \le 1} \frac{\frac{1}{4} \max \left( x_3^2, (1 - x_3)^2 \right)}{1 + y_2^2 + x_3^2 + y_3^2 + (1 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \max_{\frac{1}{2} \le x_3 \le 1} \frac{\left( \frac{1}{2} x_3 \right)^2}{1 + x_3^2 + (1 - x_3)^2} = \frac{1}{16}. \tag{19}$$

При двух фиксированных вершинах треугольника минимум нормы (I5) достигается, когда третья вершина находится посередине этой фиксированной стороны. Обозначая через $x, y$ проекции той стороны, для которой достигается максимум в числителе первой или второй формул (I8), получаем

$$\tilde{\tilde{\alpha}}_1 = \frac{1}{8} \sup_{x,y} \frac{x^2}{x^2 + y^2 + 2\left( \left( \frac{x}{2} \right)^2 + \left( \frac{y}{2} \right)^2 \right)} = \frac{1}{12}, \tag{20}$$

$$\tilde{\tilde{\alpha}}_2 = \frac{1}{4} \sup_{x,y} \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2 + 2\left( \left( \frac{x}{2} \right)^2 + \left( \frac{y}{2} \right)^2 \right)} = \frac{1}{12}. \tag{21}$$

Поскольку непосредственно получить оценку для $\tilde{\alpha}_2$, что является здесь основной задачей, аналитическими методами по формулам (8), (I5), (I7) трудно, применим доказательные вычисления на ЭВМ.

Из соотношений (I6), (2I) следует, что для получения точного значения $\alpha_2$ достаточно доказать неравенство:

$$\tilde{\alpha}_2 < \frac{1}{12} = \approx\!\!\!\alpha_2 , \qquad (22)$$

которое в силу (I5) записывается в виде

$$\frac{1}{12} - \frac{\min (x_0 y_0, (1-x_0)|y_2-y_0|, |x_3-x_0||y_3-y_0|)}{1+y_2^2+x_3^2+y_3^2 + (1-x_3)^2 + (y_2-y_3)^2} > 0 \qquad (23)$$

в области $0 \le y_2, x_3, y_3 \le 1$, точка $(x_0, y_0)$ принадлежит треугольнику $\Omega$ с вершинами в (8). Для приведения области значений $(x_0, y_0)$ к прямоугольной введем замену переменных по формулам

$$x_0 = u + (1-u)vx_3$$
$$(0 \le u \le 1, \quad 0 \le v \le 1),$$
$$y_0 = uy_2 + (1-u)vy_3 .$$

Тогда соотношение (23) переписывается в виде

$$F(y_2, x_3, y_3, u, v) > 0, \qquad (24)$$

$$0 \le y_2, x_3, y_3, u, v \le 1, \qquad (25)$$

где

$$F = \frac{1}{12} - \frac{\min(A_1, A_2, A_3)}{A_L},$$

$$A_1 = (u+(1-u)vx_3)(uy_2+(1-u)vy_3),$$

$$A_2 = (1-u)^2(1-vx_3)|y_2-vy_3|,$$

$$A_3 = |(1-(1-u)v)x_3 - u| \cdot |(1-(1-u)v)y_3-uy_2|,$$

$$A_L = 1+y_2^2+x_3^2 + y_3^2 + (1-x_3)^2 + (y_2-y_3)^2.$$

К (24)-(25) был применен алгоритм поиска доказательства неравенства в конечномерной ограниченной области INEQPR [4]. Доказательные вычисления на ЭВМ ЕС-I033 с применением этого алгоритма (на 7647 шаге) доказали неравенства (24)-(25), а следовательно, и (22).

Из соотношений (I6),(I9)-(22) получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Справедлива оценка

$$\|S_1(x,y) - f(x,y)\|_C \leq$$

$$\leq \frac{1}{12}\left(\|D^{2,0}f\|_\infty + \|D^{1,1}f\|_\infty + \|D^{0,2}f\|_\infty\right)\left(|P_1P_2|^2 + |P_1P_3|^2 + |P_2P_3|^2\right),$$

где $P_1, P_2, P_3$ - вершины треугольника $\Omega$, в котором определена функция $f(x,y)$.

Приведем примеры, показывающие, что этот результат точный. Пусть $\varepsilon$ - малое число. Положим $f(x,y) = x(1-y) - \frac{(1+2\varepsilon)^2}{8\varepsilon}(x-y)$, $\Omega$: $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1,1)$, $P_3 = (1/2+\varepsilon, 1/2-\varepsilon)$. Тогда $f(P_1) = f(P_2) = f(P_3) = 0$, $S_1 \equiv 0$, $\|D^{2,0}f\| = \|D^{0,2}f\| = 0$, $\|D^{1,1}f\| = 1$, $|P_1P_2|^2 + |P_1P_3|^2 + |P_2P_3|^2 = 3 + 4\varepsilon^2$. Следовательно, в силу теоремы 2 имеем $\|S_1 - f\| \leq 1/4 + \varepsilon^2/3$. Покажем, что на $\Omega$ можно найти точку $P = (x,y)$, в которой значение функции $f(x,y)$ равно 1/4. Действительно, для $P = (1/2, 1/2)$: $f(x,y) = 1/4$, и тем самым $\|S_1 - f\| \geq 1/4$, что показывает точность найденной оценки для $\alpha_2$.

Для проверки точности коэффициентов $\alpha_1$, $\alpha_3$ положим $f(x,y) = x(1-x) - \frac{1}{4\varepsilon}y$, $\Omega$: $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1,0)$, $P_3 = (1/2, \varepsilon)$. Тогда $f(P_1) = f(P_2) = f(P_3) = 0$, $\|D^{1,1}f\| = \|D^{0,2}f\| = 0$, $\|D^{2,0}f\| = 2$, $|P_1P_2|^2 + |P_1P_3|^2 + |P_2P_3|^2 = 3/2 + 2\varepsilon^2$; и по теореме 2 $\|S_1 - f\| \leq 1/4 + \varepsilon^2/3$. Для точки $P = (1/2, 0)$: $f(x,y) = 1/4$, следовательно, $\|S_1 - f\| \geq 1/4$, откуда вытекает точность найденной оценки для $\alpha_1$. По соображениям симметрии точным является и значение коэффициента $\alpha_3$.

## Литература


1. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. -М.: Наука, 1980. - 350 с.

2. ШУМИЛОВ Б.М. Локальные приближения линейными сплайнами двух переменных. -В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 75). Новосибирск, 1978, с. 23-35.

3. ПАНКОВ П.С. Доказательные вычисления на электронных вычислительных машинах. -Фрунзе: Илим, 1978. - 185 с.

4. ПАНКОВА Г.Д. Комплекс программ для доказательных вычислений на ЕС ЭВМ. -Фрунзе, 1980. -57 с. Деп. ВИНИТИ, №2392-80.

5. ПАНКОВА Г.Д. Пакет программ для доказательных вычислений и его применение к построению эффективного алгоритма поиска глобального экстремума. -В кн.: Математические методы в исследовании операций: Тез докл. международной конференции. София, 1980, с.72-73.

6. БАЯЧОРОВА Б.Д. Экстремальные задачи в теории функций и применение доказательных вычислений на ЭВМ для их решений.-В кн.: Математические методы в исследовании операций. Тез. докл. международной конференции. София, 1980, с. 19-20.

Поступила в ред.-изд.отд.
23 августа 1982 года