МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ В ЧИСЛЕННОМ АНАЛИЗЕ
(Вычислительные системы)
1983 год Выпуск 98

УДК 518.5:518.12

# ПРИБЛИЖЕНИЕ КРИВЫХ ПОЛЯРНЫМИ СПЛАЙНАМИ

С.К. Персидский

В работе [1] указано на возможность параметризации по полярному углу при построении сплайна,аппроксимирующего замкнутую кривую $L$, заданную в полярных координатах однозначной функцией $\rho = \rho(\varphi)$.

В настоящей статье рассматриваются вопросы параметризации по полярному углу при приближении сплайнами точечно-заданных плоских и некоторых пространственных кривых. Эти методы часто имеют ряд преимуществ по сравнению с другими способами параметризации,особенно в некоторых задачах построения и сглаживания каркасов поверхностей, построенных методом поперечных сечений.

## §1. Локальные одномерные сплайны

Пусть на некоторой кривой $L$ задана упорядоченная последовательность точек $A_1(x_1,y_1),\dots,A_N(x_N,y_N)$ и в них известен касательный вектор $\bar{\tau}_j = (x'_j, y'_j)$ (например, вектор $\bar{\tau}_j$ может быть найден приближенными методами). Рассмотрим один из возможных методов построения локальных полярных сплайнов ( $\rho$-сплайнов), основанный на использовании геометрического смысла производной от полярного радиуса по полярному углу.

Допустим, что в двух соседних точках $A_j$ и $A_{j+1}$ векторы $\bar{\tau}_j$, $\bar{\tau}_{j+1}$ неколлинеарны, тогда проведем через указанные точки нормали к кривой $L$, а точку их пересечения $O_j$ возьмем в качестве центра местной полярной системы координат.Пусть $\Psi_j$ - угол между указанными нормалями, который будем отсчитывать в направлении от точки $A_j$ до $A_{j+1}$. Введем на отрезке $[0,\Psi_j]$ непрерывную функцию $F(\varphi)$, удовлетворяющую следующим соотношениям:

$$F(\varphi) > 0 \qquad \forall\varphi \in (0, \Psi_j); \quad F(0) = F(\Psi_j) = 0. \tag{1}$$

Длины отрезков $O_jA_j$ и $O_jA_{j+1}$ обозначим соответственно через $\rho_j(0)$ и $\rho_j(\Psi_j)$ и рассмотрим в указанной выше полярной системе координат $\rho$-сплайн следующего вида:

$$\rho_j(\varphi) = a_j \int F(\varphi) d\varphi + b_j = a_j \Phi(\varphi) + b_j. \tag{2}$$

Этот сплайн аппроксимирует дугу $\smile{A_jA_{j+1}}$ кривой $L$ с заданными направлениями касательных в точках $A_j$ и $A_{j+1}$. Последнее утверждение вытекает из соотношений

$$\rho'_\varphi(0) = \rho'_\varphi(\Psi_j) = 0. \tag{3}$$

Действительно, из геометрического смысла производной радиуса-вектора по полярному углу следует, что при выполнении (3) радиусы-векторы $\rho_j(0)$ и $\rho_j(\Psi_j)$ ортогональны к касательным, проведенным к линии $L$ в соответствующих точках $A_j$ и $A_{j+1}$.

Коэффициенты $\rho$-сплайна (2) $a_j$ и $b_j$ подлежат определению из условия прохождения сплайновой кривой через начальную и конечную точки дуги $\smile{A_jA_{j+1}}$. При этом получаем систему уравнений

$$a_j\Phi(0) + b_j = \rho_j(0); \quad a_j\Phi(\Psi_j) + b_j = \rho_j(\Psi_j), \tag{4}$$

определитель которой $\Delta = \Phi(0) - \Phi(\Psi_j) \neq 0$ по определению функции $F(\varphi)$. Например, можно положить $F(\varphi) = \sin(\varphi \frac{\pi}{\Psi_j})$, тогда условия (I) будут выполнены, и мы получим локальный $\rho$-сплайн, аппроксимирующий дугу $\smile{A_jA_{j+1}}$ следующего вида:

$$\rho_j(\varphi) = \frac{\rho_j(0) - \rho_j(\Psi_j)}{2} \cos(\varphi \frac{\pi}{\Psi_j}) + \frac{\rho_j(0) + \rho_j(\Psi_j)}{2}. \tag{5}$$

Если же положить $F(\varphi) = \varphi(\Psi_j - \varphi)$, то придем к сплайну

$$\rho_j(\varphi) = 6\frac{\varphi^2}{\Psi_j^3}(\rho_j(\Psi_j) - \rho_j(0))(\frac{\Psi_j}{2} - \frac{\varphi}{3}) + \rho_j(0). \tag{6}$$

Таких сплайнов можно построить как угодно много.

Заметим, что на каждом отрезке $(0, \Psi_j)$ радиус-вектор $\rho_j(\varphi)$ любого $\rho$-сплайна меняется строго монотонно, в силу чего $\rho$-сплайны не могут образовывать петель, в отличие от кубических параметрических сплайнов [2]. Заметим также, что при $\rho_j(0) = \rho_j(\Psi_j) = R$ любой локальный $\rho$-сплайн интерполирует дугу $\smile{A_jA_{j+1}}$ дугой окружности радиуса $R$ с центром в точке $O_j$.

Множество локальных $\rho$-сплайнов, аппроксимирующих кривую $L$ с общими узлами интерполяции, образует выпуклое множество. Действительно, если $\rho_j^{(1)}(\varphi)$ и $\rho_j^{(2)}(\varphi)$ - любые $\rho$-сплайны, аппроксимирующие дугу $\smile A_jA_{j+1}$, то и выражение

$$\rho_j^{(3)}(\varphi) = \lambda\rho_j^{(1)}(\varphi) + (1-\lambda)\rho^{(2)}(\varphi), \qquad 0 \le \lambda \le 1, \tag{7}$$

также будет $\rho$-сплайном, аппроксимирующим эту дугу. При $\varphi = \Psi_j/2$ $\rho$-сплайны, определяемые соотношениями (5) и (6), принимают одно и то же значение $\rho_j(\Psi_j/2) = (\rho_j(0) + \rho_j(\Psi_j))/2$.

Для изменения "качества" интерполяции можно использовать следующий $\rho$-сплайн:

$$\rho_j(\varphi) = \frac{2\rho_j(0)\rho_j(\Psi_j)}{\rho_j(0) + \rho_j(\Psi_j) + (\rho_j(\Psi_j) - \rho_j(0))\cos(\varphi\frac{\pi}{\Psi_j})}, \tag{8}$$

который при $\varphi = \Psi_j/2$ принимает значение

$$\frac{2\rho_j(0)\rho_j(\Psi_j)}{\rho_j(0)+\rho_j(\Psi_j)} \neq (\rho_j(0) + \rho_j(\Psi_j))/2, \qquad \rho_j(0) \neq \rho_j(\Psi_j). \tag{9}$$

Комбинируя сплайны (5) и (8), согласно формуле (7), мы получаем новый $\rho$-сплайн, зависящий от величины $\lambda$. Изменяя этот параметр от нуля до единицы, мы можем несколько изменять форму и кривизну сплайновой линии.

Допустим, что векторы $\bar{\tau}_j, \bar{\tau}_{j+1}$ и $\overline{A_jA_{j+1}}$ коллинеарны, и будем интерпретировать дугу $\smile A_jA_{j+1}$ отрезком $A_jA_{j+1}$. Проведем через точку $A_j$ нормаль к кривой $L$ и отложим на ней от точки $A_j$ отрезок, равный любому положительному числу $P$ (например, можно положить $P = 1$). Примем его конец, противоположный точке $A_j$, за полюс полярной системы координат. В этом случае уравнение рассматриваемого отрезка принимает вид

$$\rho_j(\varphi) = P \sec\varphi, \tag{10}$$

где $0 \le \varphi \le \operatorname{arctg}\frac{|A_jA_{j+1}|}{P}$. Выражение (10) можно рассматривать как $\rho$-сплайн, согласованный с краевыми условиями задачи.

Пусть, далее, векторы $\bar{\tau}_j$ и $\bar{\tau}_{j+1}$ коллинеарны между собой, но неколлинеарны отрезку $A_jA_{j+1}$. Тогда разделим этот отрезок пополам точкой $C_j$ и, положив в ней $\bar{\tau}(C_j) = \overline{A_jA_{j+1}}$, построим $\rho$-сплайны на отрезках $A_jC_j$ и $C_jA_{j+1}$, что приводит к появлению в точке $C_j$ перегиба на сплайновой кривой.

В некоторых задачах иногда удобнее выбирать вектор $\vec{\tau}(C_j)$ неколлинеарным $A_jA_{j+1}$. Например, в задаче о сопряжении двух параллельных прямых монотонной сплайновой линией с непрерывным изменением кривизны $K$ (причем в точках сопряжения с прямыми $K=0$) удобно рассматривать направление вектора $\vec{\tau}(C_j)$ как параметр, зависящий от расстояния между прямыми и положений центров местных полярных систем координат.

Заметим также, что кривая $L$ не обязательно должна быть всюду гладкой. Она может иметь точки самопересечения, а также точки излома. Точки излома должны быть заданы как узлы сплайна со значениями в них правосторонних и левосторонних производных.

В рассмотренной выше методике построения локальных $\rho$-сплайнов на каждом участке интерполяции выбирается свой центр местной полярной системы координат. При использовании традиционных методов построения сплайновых линий во многих случаях может быть указана одна полярная система координат, в которой производится аппроксимация всей линии $L$.

## §2. Построение $\rho$-сплайнов с одним центром полярной системы

Пусть решается задача интерполяции гладкой кривой $L$, рассмотренной в предыдущем параграфе. Возьмем некоторую точку $O$ за центр полярной системы $(\varphi, \rho)$ и обозначим через $\rho_1, \dots, \rho_N$ расстояния от точек $A_j$ до полюса. Углы, образованные отрезком $OA_1$ с отрезками $OA_2, \dots, OA_N$ обозначим через $\varphi_2, \dots, \varphi_N$. Пусть точка $O$ выбрана таким образом, что имеют место неравенства:

$$0 < \varphi_2 < \varphi_3 < \dots < \varphi_N \,. \tag{11}$$

Тогда в декартовой прямоугольной системе координат $\varphi, \rho$ по точкам $(0, \rho_1), \dots, (\varphi_N, \rho_N)$ всегда можно построить сплайн дефекта I, определенный на каждом отрезке $[\varphi_j, \varphi_{j+1}]$ соотношением вида

$$\rho_j(\varphi) = \sum_{s=0}^{3} a_{sj} \left( \frac{\varphi - \varphi_j}{h_j} \right)^s \,, \tag{12}$$

где $h_j = \varphi_{j+1} - \varphi_j$ $(\varphi_1 = 0)$, с краевыми условиями того или иного типа. В частности, если $\rho(0) = \rho(\varphi_N)$, где $\varphi_N = 2\pi$, то можно использовать периодические краевые условия.

Обратим внимание на то, что краевые условия $\rho'_\varphi(0) = M_1$ и $\rho'_\varphi(\varphi_N) = M_N$ зависят не только от направления радиусов-векторов $\rho(0)$ и $\rho(\varphi_N)$ по отношению к кривой L, но и от их длин. Действительно, хорошо известно, что

$$\rho'_\varphi(\varphi) = \rho(\varphi)\,\mathrm{ctg}\,\mu\ , \tag{13}$$

где $\mu$ - угол между направлением радиуса-вектора и касательной к кривой L в данной точке. В частности, если $\mu = \frac{\pi}{4}$, то $\rho'_\varphi = \rho(\varphi)$. Указанное выше обстоятельство может приводить к большим значениям чисел $M_1$ и $M_N$, что существенным образом влияет на точность интерполяции и даже на возможность построения $\rho$-сплайна. Поэтому, если это возможно, центр полярной системы следует выбирать либо из условия ортогональности векторов $\rho(0)$ и $\rho(\varphi_N)$ к линии L, либо из условия минимальности правых частей формулы (13) при $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_N$. Так, в случае замкнутой кривой L в качестве начальной точки интерполяции удобно выбирать такую точку на линии, в которой угол $\mu = \frac{\pi}{2}$.

В качестве примера рассмотрим выбор краевых условий кубического $\rho$-сплайна при интерполяции эллипса с полуосями a и b. Поместим центр $\rho$-сплайна в центр эллипса и возьмем в качестве начальной точки одну из его вершин. В этом случае краевые условия принимают вид $\rho'_\varphi(0) = \rho'_\varphi(2\pi) = 0$ .

В случае, когда кривая L замкнута, легко находится площадь Q фигуры, ограниченной $\rho$-сплайновой кривой, аппроксимирующей линию L. Действительно, пусть на отрезке $[\varphi_j, \varphi_{j+1}]$ сплайн задан соотношением вида (12). Тогда

$$Q = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N-1}\int_{\varphi_j}^{\varphi_{j+1}} \rho_j^2(\varphi)\,d\varphi\ . \tag{14}$$

Аналогичные формулы можно использовать при интерполяции замкнутой кривой локальными $\rho$-сплайнами. При использовании локальных сплайнов, рассмотренных в §I вида (5), (6) и (8), интегралы в выражении (14) берутся в конечном виде.

Формула (14) может быть использована для получения информации о точности интерполяции $\rho$-сплайном линии L, заданной аналитически. В качестве примера был взят эллипс с отношением полуосей 2:1, который интерполировался кубическим $\rho$-сплайном дефекта 1 с шагом интерполяции $h = \frac{1}{20}\pi$ . Центр $\rho$-сплайна совпадал с центром эллипса. При этом относительная погрешность интерполяции площади эллипса по формуле (I4) имела порядок $10^{-3}$%. Перемещение центра по одной из полуосей эллипса не изменило порядка относительной ошибки.

Заметим, что на замкнутых кривых построение кубического $\rho$-сплайна иногда удобно проводить в виде

$$\rho(\varphi) = \sum_{i=-1}^{N+1} a_i B_i(\varphi) \qquad (15)$$

с использованием его представления через B-сплайны.

Построение кубических $\rho$-сплайнов с одним центром практически осуществляется в декартовой прямоугольной системе координат $\varphi O \rho$. Предположим, что и линия описана в полярной системе координат с центром в точке O уравнением вида $\rho = \mathscr{G}(\varphi)$ и известна информация о степени гладкости функции $\mathscr{G}$. Тогда для оценки точности интерполяции можно воспользоваться соответствующими оценками погрешностей интерполяции линий и непараметрическими кубическими сплайнами. Такие оценки в декартовой прямоугольной системе координат достаточно хорошо разработаны. А в нашем случае в указанных оценках достаточно заменить $x$ на $\varphi$ и $y$ на $\rho$.

В некоторых случаях можно воспользоваться несколько иной схемой интерполяции кривой L с параметризацией по углу $\varphi$. Пусть выбран центр полярной системы координат и выполнено условие (II), тогда по следующим дискретным данным: $(\varphi_1, x_1), \ldots, (\varphi_N, x_N)$; $(\varphi_1, y_1), \ldots, (\varphi_N, y_N)$ можно построить два кубических сплайна дефекта I, описывающих изменение координат $x$ и $y$ в зависимости от изменения угла $\varphi$.

Плоские $\rho$-сплайновые кривые удобно использовать при построении каркаса поверхности методом поперечных сечений. В этом случае на поперечных сечениях, описанных $\rho$-сплайнами с согласованными шагами параметризации, не происходит ее нарушения на этапах сглаживания каркаса.

В заключение параграфа заметим, что аналогично изложенному выше можно проводить аппроксимацию $\rho$-сплайнами некоторых точечно-заданных пространственных линий. Действительно, пусть пространственная линия задана набором точек $A_1(x_1, y_1, z_1), \ldots, A_N(x_N, y_N, z_N)$ таких, что $x_j \neq x_{j+1}$ $(j=\overline{1, N-1})$. Рассмотрим проекции этих точек на плоскости XOY и XOZ: $a_1(x_1, y_1), \ldots, a_N(x_N, y_N)$; $b_1(x_1, z_1), \ldots, (x_N, z_N)$. Нетрудно видеть, что для аппроксимации линии L достаточно построить два $\rho$-сплайна $\rho^{(1)}(\varphi)$ и $\rho^{(2)}(\alpha)$, того или иного типа, по соответствующим наборам точек $\{a_j\}$ и $\{b_j\}$. Затем по заданному значению $x=\bar{x}$ можно найти значения параметров $\varphi=\bar{\varphi}$ и $\alpha=\bar{\alpha}$ и восстановить значения величин $y=\bar{y}$ и $z=\bar{z}$.

## Литература


1. АЛЬБЕРГ Дж., НИЛЬСОН Э., УОЛШ Дж. Теория сплайнов и ее приложения. -М.: Мир, 1972.

2. СКОРОСПЕЛОВ В.А. Интерполяция плоских кривых. -В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 68).Новосибирск, 1976, с. 33-44.



Поступила в ред.-изд.отд.
15 сентября 1983 года