АНАЛИЗ РАЗНОТИПНЫХ ДАННЫХ
(Вычислительные системы)
1983 год Выпуск 99

УДК 518.74

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ "АКСИОМАТИЧЕСКОЙ МЕРЫ ПРОСТОТЫ" Н.ГУДМЕНА

Е.М.Черепанов

Работа Н.Гудмена "Аксиоматическая мера простоты" (AMS) [I] является наиболее далеко продвинутой и обнадеживающей среди множества подходов к изучению логической просты научных теорий. Оценивается значение сложности, как говорит Н.Гудмен, "базиса" теории или, иначе, примитивных терминов с их интерпретацией. Построенная мера простоты позволяет оценивать сверху значение сложности различных классов моделей через значение сложности специально построенных наименьших классов моделей, которые еще охватывают оцениваемые классы.

Целью настоящей работы является изучение свойств данной меры простоты относительно гомоморфных отображений, порожденных различного вида эквивалентностью, задаваемой на носители модели. Будет показано, что введение отношения эквивалентности на носителе модели, сохраняющего отношения модели - что мы будем понимать как "упрощение" исходной модели,- будет приводить к возрастанию значения сложности таким образом построенной модели, являющейся гомоморфным образом исходной модели. Для ясности изложения остановимся на некоторых, важных для данной работы, аспектах AMS.

I. Будем предполагать, что дан язык первого порядка $\mathcal{L}$ и $\Omega = \langle P_1^{m_1},\ldots,P_n^{m_n}\rangle$ - сигнатура языка. Пусть $\mathfrak{M}$ - класс моделей, интерпретирующих язык L . Для всякой конкретной интерпретации, модели $W = \langle U, P_1^{m_1},\ldots,P_n^{m_n}\rangle$ предикат $P_i^{m_i}$ будем понимать как имя соответствующего i-го m_i -местного отношения.

В основе AMS лежит интуитивно ясное предположение, что логическая сложность каждой модели класса $\mathfrak{M}$ определяется тем, насколько сложными являются предикаты модели. Возможность градуирования по степени сложности предикатов разных видов определяется через возможность выражения одних в терминах других. Поэтому вся информация о числе мест в каждом предикате, о количестве предикатов в "базисе" модели, о том, являются ли какие-то предикаты симметричными, рефлексивными, самополными и т.д., является релевантной или относящейся к сути рассматриваемого вопроса. Из этих соображений Н.Гудмен определяет релевантные классы моделей как необходимый инструментарий для оценки значения сложности любого другого класса моделей.

Прежде чем определить релевантный класс моделей, определим основные, необходимые в нашем рассмотрении свойства предикатов этого класса моделей, т.е. аксиомы релевантности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Будем говорить, что предикат $P(x_1,\dots,x_m)$ избыточный, если и только если $\forall x_1,\dots,x_m(P(x_1,\dots,x_m)\to x_1=\dots=x_m)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что предикат $P(x_1,\dots,x_m)$ иррефлексивный, если и только если $\forall x_1\dots x_m(P(x_1,\dots,x_m)\to x_1\neq\dots\neq x_m)$, где $x_1\neq\dots\neq x_m$ есть сокращение записи $(x_1\neq x_2)\,\&\,(x_1\neq x_3)\,\&\dots$ $\dots\&\,(x_{m-1}\neq x_m)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что предикат $P(x_1,\dots,x_m)$ симметричен[*)] относительно какого-то подразделения из S своих мест, если и только если $\forall x_1\dots x_m(P(x_1,\dots,x_m)\to P(x_1,\dots,x_{k-1},x'_k,\dots$ $\dots,x'_{k+s},x_{k+s+1},\dots,x_m))$, где $x'_k,\dots,x'_{k+s}$ есть произвольная перестановка $x_k,\dots,x_{k+s}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем говорить, что предикат $P(x_1,\dots,x_m)$ является самополным относительно всех своих мест, если и только если для всех $i=1,\dots,m$ $\forall x_1\dots x_m\,\forall y_1\dots y_m(P(x_1,\dots,x_m)\,\&$ $\&\,P(y_1,\dots,y_m)\to P(x_1,\dots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\dots,x_m))$.

Предикат, не являющийся самополным относительно всех своих мест, может быть самополным относительно исчерпывающей комбинации подразделений всех своих мест, что определяется аналогично.

ПРИМЕР I. Пусть $P(x_1,x_2,x_3)$ является самополным относительно 2-го и комбинации I и 3 мест, тогда он (2), (I,3) самополон и $\forall x_1x_2x_3\forall y_1y_2y_3(P(x_1,x_2,x_3)\,\&\,P(y_1,y_2,y_3)\to P(x_1,y_2,x_3))$.

Мы намеренно не касаемся некоторых других возможных свойств предикатов, таких как рефлексивность справа и слева, объединенная и

---

*) Предикат может быть также симметричным относительно двух или более подразделений из одинакового количества мест. Понимая симметричность более широко, можно сказать, что это свойство обеспечивает коэкстенсивность мест или нескольких одинаковых подразделений мест.

встречная рефлексивность и т.д., потому что эти свойства являются логически эквивалентными (о чем речь пойдет далее) одним из перечисленных свойств.

Определим теперь класс моделей релевантного вида.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Будем называть непустой класс моделей $\mathfrak{M}$ классом моделей релевантного вида, если и только если выполнено хотя бы одно из условий:

а) $\mathfrak{M}$ - класс всех моделей фиксированной сигнатуры Ω ;

б) $\mathfrak{M}$ - класс всех моделей фиксированной сигнатуры Ω и на нем выполнима по крайней мере одна из аксиом релевантности;

в) $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$, где $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$- классы моделей релевантного вида;

г) $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \setminus \mathfrak{M}_2$, где $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ - классы моделей релевантного вида;

д) $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$, где $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ - классы моделей релевантного вида.

Выделение вышеуказанных свойств предикатов (избыточность, симметричность, иррефлексивность, самополнота) обусловлено тем, что, опираясь на эти свойства, Н.Гудмен получает возможность упорядочить всевозможного вида предикаты по степени их сложности, в зависимости от их местности и от того, каковы их свойства. Центральным моментом гудменовской теории является принцип заменяемости, выраженный первым постулатом.

PI. Если все модели релевантного класса $\mathfrak{M}_1$ могут быть заменены моделями релевантного класса $\mathfrak{M}_2$, то значение сложности класса $\mathfrak{M}_1$ меньше либо равно значению сложности класса $\mathfrak{M}_2$.

Здесь речь идет об интерпретируемости класса $\mathfrak{M}_2$ в классе моделей $\mathfrak{M}_1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Будем говорить, что класс моделей $\mathfrak{M}_2$ интерпретируем в классе моделей $\mathfrak{M}_1$, если и только если для всякой модели $A \in \mathfrak{M}_1$ существует модель $B \in \mathfrak{M}_2$, которая определима в A .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Модель $B = \langle U_2\ P_1^{m_1}, \dots, P_k^{m_k} \rangle$ определима в модели $A = \langle U_1\ Q_1^{n_1}, \dots, Q_l^{n_1} \rangle$, если и только если $U_1 = U_2$ и каждый предикат модели B определим в модели A .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Будем говорить, что n-местный предикат R определим в модели A, если и только если существует формула φ модели A такая, что свободными переменными формулы φ являются $x_1, \dots$ $\dots, x_n$ и для всякой n-ки $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ универсума U_1 удовлетворяющей φ $\langle a_1,\dots,a_n\rangle \in R$ или

$$\forall x_1\dots x_n(R(x_1,\dots,x_n) \leftrightarrow \varphi) \qquad (1)$$

выполнима на модели A.

Будем называть формулу (I) редукцией предиката R к предика - там модели A.

Благодаря таким образом понимаемому принципу заменяемости, выраженному постулатом PI, появляется возможность выразить некоторые предикаты, обладающие свойствами релевантных видов, в терминах предикатов, имеющих меньшее количество мест и никакими свойствами, допускающими дальнейшую замену на более "простые", не обладающими. Общая схема градуирования предикатов по степени их сложности такова: пусть $P(x_1,\dots,x_n)$ – произвольный n-местный предикат модели. $P(x_1,\dots,x_n)$ всегда определим через эквивалентное ему множество иррефлексивных предикатов, т.е. существует формула φ, в которую входят только иррефлексивные предикаты, так что справедливо (I). Так как каждый из иррефлексивных предикатов этого множества может быть определен из $P(x_1,\dots,x_n)$, в то время как $P(x_1,\dots,x_n)$ не может быть определен ни из одного отдельно взятого иррефлексивного предиката, то, следовательно, согласно посту - лату PI, сложность каждого иррефлексивного предиката меньше сложности $P(x_1,\dots,x_n)$.

ПРИМЕР 2. Пусть $P(x,y,z)$ – произвольный трехместный предикат. Определим

$$P_1(x,y,z) \overset{df}{=} P(x,y,z) \,\&\, (x\neq y\neq z),$$

$$P_2(x,y) \overset{df}{=} P(x,y,z) \,\&\, (x\neq y) \,\&\, (z=y),$$

$$P_3(x,z) \overset{df}{=} P(x,y,z) \,\&\, (x\neq z) \,\&\, (y=z),$$

$$P_4(y,z) \overset{df}{=} P(x,y,z) \,\&\, (y\neq z) \,\&\, (x=y),$$

$$P_5(x) \overset{df}{=} P(x,y,z) \,\&\, (x=y=z).$$

Тогда $\forall xyz(P(x,y,z) \leftrightarrow P_1(x,y,z) \,\&\, P_2(x,y) \,\&\, P_3(x,z) \,\&\, P_4(y,z) \,\&$ $\& \; P_5(x))$.

Следующим этапом, в зависимости от того, какими из свойств релевантных видов обладают иррефлексивные предикаты, является возможность их "замены" в этом смысле на более "простые". В конечном итоге мы получаем эквивалентное множество иррефлексивных, без каких-либо свойств, и одноместных предикатов, каждому из которых, в зависимости от его местности, приписывается число. Соответствующие постулаты гудменовской теории приписывают одноместному предикату значение сложности, равное единице, а n-местному иррефлексивному – $2n-1$. Значение сложности модели есть сумма значений сложности ее предикатов, а значение сложности релевантного класса есть значение сложности наиболее сложного его представителя. Значение сложности произвольного класса моделей оценивается как значение сложности наименьшего релевантного класса моделей, в котором еще содержится оцениваемый класс.

2. Рассмотрим произвольную модель $W = \langle U\ P_1^{m_1}, \ldots, P_n^{m_n} \rangle$ и пусть $W \in \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ – класс моделей релевантного вида. Далее, пусть σ – произвольная эквивалентность, заданная на носителе U и сохраняющая отношение модели. Эквивалентность σ разбивает множество U на классы эквивалентности, порождая фактор-множество U/σ. Пусть φ – гомоморфное отображение множества U на U/σ.

Определим на фактор-множестве U/σ предикаты $P_i^{*m_i}$ так, что $P_i^{*m_i}(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_{m_i}))$ тогда и только тогда, когда $P_i^{m_i}(x_1, \ldots, x_{m_i})$. Тем самым мы задаем фактор-модель $W/\sigma = \langle U/\sigma, P_1^{*m_1}, \ldots, P_n^{*m_n} \rangle$,

являющуюся гомоморфным образом модели W. Гомоморфизм φ в силу данного определения является сильным. Проверим, принадлежит ли нашему релевантному классу $\mathfrak{M}$ модель W/σ. Для этого необходимо установить следующий факт. Будут ли выполнены на модели W/σ аксиомы избыточности, симметричности, иррефлексивности и самополноты, если они были выполнены для некоторых предикатов модели W? Все рассуждения будут проведены для простоты на примере двуместных предикатов, так как в случае n-местного предиката все рассуждения аналогичны.

Итак, пусть $P(x,y)$ – произвольный предикат модели W и $P^*(X,Y)$ – соответствующий ему предикат модели W/σ.

ЛЕММА I. Если $P(x,y)$ – избыточный, то и $P^*(X,Y)$ – избыточный предикат.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что это не так. Тогда $\exists X_0 Y_0$ такие, что $P^*(X_0,Y_0) \& (X_0 \neq Y_0)$[*]. По определению $P^*(X,Y)$ $\exists x_0 y_0$ такие, что $x_0 = \varphi^{-1}(X_0)$, $y_0 = \varphi^{-1}(Y_0)$ и $P(x_0,y_0) \& (x_0 \neq y_0)$, что противоречит нашему предположению. Значит, допущение неверно.

ЛЕММА 2. *Если $P(x,y)$ – симметричный, то и $P^*(X,Y)$ – симметричный предикат.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $P(x,y)$ – симметричный предикат, то

$$\forall xy(P(x,y) \to P(y,x)). \tag{2}$$

Допустим, что $P^*(X,Y)$ не является симметричным. Тогда $\exists X_0 Y_0$ такие, что

$$P^*(X_0,Y_0) \& \sim P^*(Y_0,X_0). \tag{3}$$

В силу определения $P^*(X,Y)$ $\exists x_0 y_0$ такие, что $x_0 = \varphi^{-1}(X_0)$, $y_0 = \varphi^{-1}(Y_0)$ и $P(x_0,y_0)$. Из (2) следует, что $P(y_0,x_0)$ и, по определению гомоморфизма φ, $P(y_0,x_0) \to P^*(\varphi(y_0),\varphi(x_0))$, что противоречит (3). Следовательно, наше допущение неверно.

ЛЕММА 3. *Если $P(x,y)$ – самополный, то и $P^*(X,Y)$ – самополный предикат.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $P(x,y)$ – самополный предикат, то

$$\forall x_1 x_2 \ \forall y_1 y_2 (P(x_1,x_2) \& P(y_1,y_2) \to P(x_1,y_2)). \tag{4}$$

Пусть $\exists X_1 X_2 \exists Y_1 Y_2 (P^*(X_1,X_2) \& P^*(Y_1,Y_2))$. По определению, P^* $\exists x_1 x_2 \exists y_1 y_2$ в U такие, что $x_1 = \varphi^{-1}(X_1)$, $x_2 = \varphi^{-1}(X_2)$, $y_1 = \varphi^{-1}(Y_1)$, $y_2 = \varphi^{-1}(Y_2)$ и $P(x_1,x_2) \& P(y_1,y_2)$. В силу (4) следует, что $P(x_1,y_2)$, а из определения гомоморфизма φ, $P(x_1,y_2) \to P^*(\varphi(x_1), \varphi(y_2))$, и, следовательно, $P^*(X_1,Y_2)$. Что и требовалось доказать.

Допустим, что $P(x,y)$ - иррефлексивный предикат. Тогда выполнима аксиома иррефлексивности: $\forall xy(P(x,y) \to x \neq y)$. Ясно, что гомоморфизм φ не обязательно отображает все пары несовпадения в пары несовпадения, т.е. мы не можем гарантировать того, что если $P(x,y) \& (x \neq y)$, то и $P^*(\varphi(x),\varphi(y)) \& (\varphi(x) \neq \varphi(y))$, так как возможно будет не выполнено условие $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Что это может быть так, показывает следующий пример.

---

[*] Выражение $X \neq Y$ для классов эквивалентности из U/σ будем интерпретировать как $X \cap Y = \emptyset$, а $X = Y$ как $(X \cap Y = X) \& (X \cap Y = Y)$.

ПРИМЕР 3. Пусть $W = \langle\{a,b,c\},P\rangle$, где $P(x,y)$ - двуместный иррефлексивный предикат и пары $P(x,y)$ суть $\langle a,b\rangle$, $\langle b,a\rangle$, $\langle a,c\rangle$, $\langle b,c\rangle$. Группой автоморфизмов модели W являются перестановки: тождественная $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix}$ и переставляющая первые два элемента $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{vmatrix}$. Эта группа перестановок индуцирует эквивалентность, разбивающую множество $\{a,b,c\}$ на два смежных класса $A = \{a,b\}$ и $B = \{c\}$. Тем самым определена фактор-модель $W/\sigma = \langle\{\{a,b\},\{c\}\}, P^*\rangle$, которая является гомоморфным образом модели W. Видно, что пара $\langle A,A\rangle$ есть пара P^*. Аксиома иррефлексивности на модели W/σ невыполнима.

Таким образом, если $P(x,y)$ - иррефлексивный предикат, то соответствующий ему $P^*(X,Y)$ может и не быть иррефлексивным в модели W/σ.

3. Рассмотрим произвольную модель W, принадлежащую нашему релевантному классу $\mathfrak{M}$. Пусть G_W - группа автоморфизмов модели W. Обозначим через σ эквивалентность на множестве U, которая индуцируется группой автоморфизмов G_W, и пусть U/σ - фактор множество множества U по эквивалентности σ. Определим на U/σ предикат $P_i^{*m_i}$ следующим образом. Будем полагать, что $P_i^{*m_i}(X_1,\dots,X_{m_i})$ тогда и только тогда, когда существуют $x_j \in X_j$ такие, что $P_i^{m_i}(x_1,\dots$ $\dots,x_{m_i})$. Тем самым определена фактор-модель $W/\sigma = \langle U/\sigma, P_1^{*m_1},\dots$ $\dots,P_n^{*m_n}\rangle$, являющаяся гомоморфным образом модели $W = \langle U,P_1^{m_1},\dots$ $\dots,P_n^{m_n}\rangle$.

Покажем теперь, что если для каких-то предикатов фактор-модели W/σ выполнена одна из аксиом избыточности симметричности, иррефлексивности или самополноты, то либо эти же аксиомы будут выполнены и для соответствующих предикатов модели W, либо эти предикаты допускают редукцию к некоторым другим, для которых эти аксиомы выполнимы. Все рассуждения для простоты изложения будут приведены для двуместного предиката, так как для произвольного n-местного предиката рассуждения аналогичны.

Пусть $P(x,y)$ - произвольный предикат модели W и $P^*(X,Y)$ - соответствующий ему предикат модели W/σ, являющейся фактор-моделью модели W по эквивалентности σ, порожденной группой автоморфизмов G_W.

ЛЕММА 4. Если $P^*(X,Y)$ – симметричный, то и $P(x,y)$ – симметричный предикат.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $P^*(X,Y)$ симметричный, то

$$\forall XY(P^*(X,Y) \to P^*(Y,X)). \tag{5}$$

Допустим, что $P(x,y)$ не симметричный. Тогда $\exists xy$ такие, что

$$P(x,y) \tag{6}$$

и

$$\sim P(y,x). \tag{7}$$

Пусть X,Y – элементы из U/σ такие, что $x \in X$ и $y \in Y$. Тогда из (6) следует, что $P^*(X,Y)$, а из (5) – $P^*(Y,X)$. По определению, $P^*(X,Y)\ \exists x_0 \in X\ \exists y_0 \in Y$ такие, что $P(y_0,x_0)$. А так как $x,x_0 \in X$ и $y,y_0 \in Y$ одним и тем же классам фактор-множества U/σ, то по определению группы автоморфизмов G_W $(x\sigma x_0, y\sigma y_0)$ должно выполняться $P(y,x)$, что противоречит (7). Следовательно, наше допущение неверно.

ЛЕММА 5. Если $P^*(X,Y)$ – иррефлексивный, то и $P(x,y)$ – иррефлексивный предикат.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что это не так. Тогда $\exists x,y \in U$ такие, что $P(x,y)\ \&\ (x=y)$. Так как $x\sigma y$, то $x,y \in X$ одному из классов U/σ. По определению P^* следует, что $P^*(X,X)$, что противоречит нашему предположению. Следовательно, наше допущение неверно.

ЛЕММА 6. Если $P^*(X,Y)$ – самополный, то и $P(x,y)$ – самополный предикат.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $P^*(X,Y)$ самополный, то

$$\forall X_1X_2\ \forall Y_1Y_2(P^*(X_1,X_2)\ \&\ P^*(Y_1,Y_2) \to P^*(X_1,Y_2)). \tag{8}$$

Допустим, что $P(x,y)$ не самополный. Тогда $\exists x_1x_2\ \exists y_1y_2$ в U такие, что

$$P(x_1,x_2)\ \&\ P(y_1,y_2) \tag{9}$$

и

$$\sim P(x_1,y_2). \tag{10}$$

Допустим, что $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, $y_1 \in Y_1$, $y_2 \in Y_2$. По определению гомоморфизма из (9) следует $P^*(X_1,X_2)\ \&\ P^*(Y_1,Y_2)$, а из (8) следует $P^*(X_1,Y_2)$. Из определения P^* следует, что $\exists x_0y_0$ в U такие, что $x_0 \in X_1$, $y_0 \in Y_2$ и $P(x_0,y_0)$. Но так как $x_0,x_1 \in X_1$, $y_0,y_1 \in Y_2$, то по определению группы автоморфизмов G_W должно быть выполнено $P(x_1,y_2)$, что противоречит нашему предположению (10). Значит, наше допущение неверно.

Допустим теперь, что P^* избыточный. Покажем, что если P не является избыточным, то он симметричный и самополный относительно всех своих мест.

ЛЕММА 7. Если $P(x,y)$ — иррефлексивный, а $P^*(X,Y)$ — избыточный предикаты, то $P(x,y)$ — симметричный и самополный относительно всех своих мест предикат.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, так как $P^*(X,Y)$ избыточный, то $\forall XY(P^*(X,Y) \to X = Y)$. Пусть $P^*(X,Y)$, тогда $\exists x,y$ в U такие, что $P(x,y)$ и $x \sigma y$, т.е. x эквивалентен y с точностью до перестановки относительно предиката P. Так как P - иррефлексивный предикат, то $\forall xy(P(x,y) \to P(y,x) \& (x \neq y))$. Самополнота следует из того, что предикат $P(x,y)$ включает в себя все возможные пары из элементов из X .

ЛЕММА 8. Если P^* — избыточный предикат модели W/σ, а для соответствующего ему предиката P модели W невыполнима ни одна из аксиом релевантного вида, то P допускает редукцию к избыточному предикату.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, P^* — m-местный предикат модели W/σ и пусть $P^*(X,X,X,\dots,X)$. В силу определения P^* $\exists x_1,\dots,x_m$ в X такие, что $P(x_1,\dots,x_m)$. Допустим, что среди всех возможных m-ок предиката P , состоящих из элементов X, $\exists x_{10}\dots x_{m0}$ такие, что $P(x_{10},\dots, x_{m0}) \& (x_{10}= \dots = x_{m0})$. Тогда, в силу определения гомоморфизма, индуцированного группой автоморфизмов G_W, предикат P определен на любой подстановке элементов из X , и, следовательно, P определен на всех m-ках совпадения, составленных из элементов X. Отсюда все остальные m-ки предиката P определяются через m-ки совпадения по формуле: $\forall x_1\dots x_m(P(x_1,\dots, x_m) \leftrightarrow P(x_1,\dots, x_1) \& \& P(x_2,\dots, x_2) \& \dots \& P(x_m,\dots,x_m))$.

Допустим теперь, что среди всех m-ок предиката P нет ни одной m-ки совпадения. Тогда произвольная m-ка предиката P определима через m-ки совпадения по формуле $\forall x_1\dots x_m(P(x_1,\dots,x_m) \leftrightarrow \leftrightarrow \sim P(x_1,\dots, x_1) \& \dots \& \sim P(x_m,\dots, x_m))$.

Дизъюнкция обеих формул дает формулу общего случая нашей леммы.

Таким образом, резюмируя все предыдущие рассуждения, отметим, что в случае гомоморфного отображения, индуцированного произвольной эквивалентностью, все свойства отношения гомоморфного прообраза, исключая иррефлексивность, переносятся на гомоморфный образ. В случае специально построенного гомоморфизма, индуцированного эквивалентностью, порожденной группой автоморфизмов, верно более сильное утверждение, что для всех предикатов, обладающих одним из свойств релевантных видов на гомоморфном образе, соответствующие им предикаты на гомоморфном прообразе либо обладают теми же самыми свойствами, либо для них справедливы некоторые дополнительные аксиомы релевантных видов, которые обеспечивают им возможность редукции к отношениям с указанными свойствами.

4. Пусть W - произвольная модель релевантного класса $\mathfrak{M}$ и пусть σ - произвольная эквивалентность на множестве U , сохраняющая предикаты модели W. Аналогично, как и в п.2, определим предикаты $P_i^{*n_i}$ и получим фактор-модель W/σ модели W по эквивалентности σ, являющуюся гомоморфным образом модели W. Допустим, что P^* - произвольный предикат модели W/σ и P - соответствующий ему предикат модели W. Допустим, что для P^* выполняется одна из аксиом релевантных видов, и проверим, будет ли это выполнено для предиката P.

ЛЕММА 9. Если $P^*(X,Y)$ – иррефлексивный, то и $P(x,y)$ – иррефлексивный предикат.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $P^*(X,Y)$ – иррефлексивный предикат, то

$$\forall XY(P^*(X,Y) \rightarrow X \neq Y). \qquad (11)$$

Допустим, что $P(x,y)$ не является иррефлексивным. Тогда $\exists xy$ такие, что $P(x,y) \,\&\, (x = y)$. В силу определения гомоморфизма $P(x,y) \rightarrow P(\varphi(x), \varphi(y))$ и так как $x = y$, то и $\varphi(x) = \varphi(y)$, что противоречит (II).

Покажем теперь, что если $P^*(X,Y)$ либо избыточный, либо симметричный, либо самополный, то утверждение, что и $P(x,y)$ таков, в общем случае неверно. Что это может быть так, показывают следующие примеры.

ПРИМЕР 4. Пусть $W = \langle\{a,b,c,d\}, P\rangle$, где P - двуместный иррефлексивный предикат и его пары суть $\langle a,c\rangle$, $\langle d,b\rangle$. Пусть σ-эквивалентность, разбивающая носитель модели на два класса $e = \{a,b\}$ и $f = \{c,d\}$. Гомоморфизм φ сопоставляет $\varphi(a) = \varphi(b) = e$ и $\varphi(c) = \varphi(d) = f$. Определяя предикат P^* на $\{e,f\}$, получаем его пары $\langle e,f\rangle$ и $\langle f,e\rangle$. Видим, что P^* симметричный, а P нет.

ПРИМЕР 5. Пусть $W = \langle\{a,b,c,d\}, P\rangle$,где P - двуместный иррефлексивный предикат и его пары суть $\langle a,b\rangle$, $\langle b,c\rangle$, и пусть эквивалентность σ разбивает носитель модели на два класса $e=\{a,b,c\}$ и $f=\{d\}$. Как и раньше, определим P^* и видим, что пара P^* суть $\langle e,e\rangle$ и он является избыточным предикатом, в то время как P нет.

ПРИМЕР 6. Пусть $W = \langle\{a,b,c,d\}, P\rangle$,где P - двуместный предикат и его пары суть $\langle a,b\rangle$, $\langle a,c\rangle$, $\langle b,d\rangle$, $\langle c,b\rangle$, $\langle c,c\rangle$, $\langle c,d\rangle$. Допустим, что эквивалентность σ разбивает носитель на классы $e = \{a,b\}$, $f=\{c\}$, $g=\{d\}$. Определим P^* и получим его пары $\langle e,f\rangle$, $\langle f,g\rangle$, $\langle e,g\rangle$, $\langle f,f\rangle$, $\langle f,e\rangle$, $\langle e,e\rangle$. Видим, что предикат P^* самополный, в то время как P таковым не является.

5. Рассмотрим два релевантных класса однотипных моделей $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$. Допустим, что существует гомоморфизм, отображающий класс $\mathfrak{M}_1$ на $\mathfrak{M}_2$. Это значит, что для всякой модели $W\in\mathfrak{M}_1$ существует модель $V\in\mathfrak{M}_2$, являющаяся гомоморфным образом модели W.

Покажем теперь, что если для предикатов модели W выполнены аксиомы релевантных видов, то утверждение о том, что эти аксиомы выполнимы для соответствующих предикатов модели V, в общем случае неверно. Что это может быть так, показывают следующие примеры.

ПРИМЕР 7. Пусть $W = \langle\{a,b,c\}, P\rangle$,где P - двуместный предикат и его пары суть $\langle a,b\rangle$, $\langle b,a\rangle$, и пусть $V = \langle\{e,f\}, Q\rangle$, где Q-двуместный предикат и его пары суть $\langle e,e\rangle$, $\langle e,f\rangle$. Гомоморфное отображение φ таково, что $\varphi(a)=\varphi(b)=e$ и $\varphi(c)=f$. Очевидно, что $\forall xy(P(x,y) \to Q(\varphi(x), \varphi(y))$, но Q в отличие от P не симметричный предикат.

ПРИМЕР 8. Пример 7 показывает, что если P - иррефлексивный предикат, то Q нет.

ПРИМЕР 9. Пусть $W = \langle\{a,b,c\},P\rangle$,где P - избыточный двуместный предикат и его пары суть $\langle a,a\rangle$, $\langle c,c\rangle$, и пусть $V = \langle\{e,f\}, Q\rangle$, где Q - двуместный предикат и его пары суть $\langle e,e\rangle$, $\langle e,f\rangle$. Гомоморфизм φ такой,что $\varphi(a)=\varphi(c)=e$ и $\varphi(b)=f$. Ясно,что предикат Q модели V не избыточный.

ПРИМЕР IO. Пусть $W = \langle\{a,b,c,d\}, P\rangle$,где P - двуместный самополный и его пары суть $\langle a,b\rangle$, $\langle c,d\rangle$, $\langle a,d\rangle$, $\langle c,b\rangle$, и пусть $V = \langle\{e,f,g\}, Q\rangle$,где Q - двуместный предикат и его пары суть $\langle e,e\rangle$, $\langle f,g\rangle$, $\langle e,g\rangle$, $\langle f,e\rangle$, $\langle e,f\rangle$.Гомоморфизм φ таков, что $\varphi(a)=\varphi(b)=e$, $\varphi(c)=f$, $\varphi(d)=g$. Ясно, что предикат Q самополным не является.

Покажем теперь, что если какой-нибудь предикат модели V обладает одним свойством релевантных видов, то соответствующий ему предикат гомоморфного прообраза может этим свойством не обладать. Что это может быть так для всех свойств, исключая иррефлексивность, было показано в п.4. В общем случае это неверно и для свойства иррефлексивности.

ПРИМЕР II. Пусть $W = \langle\{a,b,c\}, P\rangle$, где P - двуместный предикат, ложный на всех парах множества $\{a,b,c\}$, и $V = \langle\{e,f\}, Q\rangle$, где Q - двуместный предикат и его пары суть $\langle e,f\rangle$. Ясно, что Q - иррефлексивный предикат. Пусть гомоморфизм φ такой, что $\varphi(a) = \varphi(b) = e$ и $\varphi(c) = f$. Ясно, что $\forall xy(P(x\ y) \to P(\varphi(x), \varphi(y))$, но P не является иррефлексивным предикатом.

Таким образом, рассмотрены все интересующие нас случаи гомоморфных отображений. Показано, что гомоморфизм, индуцированный эквивалентностью, задаваемой на носителе исходной модели, не изменяет релевантного вида класса моделей, исключая классы моделей, на которых выполнима аксиома иррефлексивности. В случае гомоморфизма специального вида, порожденного группой автоморфизмов исходной модели, обратное отображение сохраняет все свойства релевантных видов. В случае произвольного гомоморфизма между классами однотипных моделей ни одно из этих утверждений в общем случае неверно.

6. Введем некоторые необходимые в дальнейшем понятия и определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Будем называть степенью самополноты (SC) предиката число минимальных подразделений мест, относительно которых он самополон, минус единица.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ IO. Будем называть степенью симметричности (SY) предиката, симметричного относительно подразделения из k своих мест, число $k-1$, или, если он симметричен внутри нескольких подразделений своих мест, сумму степеней симметричности каждого из подразделений мест.

Обозначим через v[n-мест] значение сложности n-местного предиката. Введем сокращения для свойства иррефлексивности - ирр., избыточности - изб., рефлексивности - рефл.

Для аксиоматической меры простоты Н.Гудмена справедливы следующие теоремы [2]:

TI. v[n-мест.; ирр.]$= 2n-1$.

T2. v[n-мест.; ирр.; SC=m] $= 2n-1-m$.

T3. v[n-мест.; ирр.; SY=k] $= 2n-1-k$.

T4. $v[n\text{-мест.};\ \text{ирр.};\ SC=m;\ SY=k] = 2n-1-m-k$.

T5. $v[n\text{-мест.};\ \text{изб.}] = 1$.

T6. $v[n\text{-мест.}] = v[n\text{-мест.};\ \text{ирр.}] + h_1 \cdot v[(n-1)\text{-мест.};\ \text{ирр.}] + \ldots + h_{n-2} v[2\text{-мест.};\ \text{ирр.}] + I =$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \frac{(2k-1)(k-r)^n}{r!(k-r)!},$$

где h_i - число $(n-i)$-местных иррефлексивных предикатов и

$$h_i = \sum_{r=0}^{n-i} (-1)^r \frac{(n-i-r)^n}{(n-i-r)!r!}.$$

Рассмотрим теперь произвольную модель $W = \langle U, P_1^{m_1}, \ldots, P_n^{m_n} \rangle$, $W \in \mathfrak{M}$. Пусть G_W – группа автоморфизмов модели W и пусть $W/\sigma =$ $= \langle U/\sigma,\ P_1^{*m_1}, \ldots, P_n^{*m_n} \rangle$ – фактор-модель модели W по эквивалентности σ, индуцированной группой автоморфизмов G_W.

ТЕОРЕМА I. $v(W) \leq v(W/\sigma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было показано в леммах I-3, таким образом построенный гомоморфизм сохраняет свойства избыточности, симметричности и самополноты предикатов и на фактор-модели, что касается иррефлексивности, то это в общем случае неверно, как это было показано в примере 3. С другой стороны, было показано, что если предикат фактор-модели избыточный, или симметричный, или иррефлексивный, или самополный, то соответствующие предикаты прообраза обладают теми же самыми свойствами (см. леммы 4-6). Доставляющее беспокойство затруднение вызывает тот факт, что любой предикат исходной модели может на гомоморфном образе стать избыточным, и тогда сложность его согласно T5 равна I.

Покажем, что и в этом случае значение сложности, соответствующего предиката прообраза равно I. Лемма 7 показывает, что если предикат прообраза является иррефлексивным, то он будет также симметричным и самополным относительно всех своих мест. Согласно T4, получаем $v[n\text{-мест.};\ \text{ирр};\ SC=n-1;\ SY=n-1] = 2n-1-n+1-n+1 = 1$. Если же исходный предикат не удовлетворяет ни одной из аксиом релевантных видов, а его гомоморфный образ является избыточным, то, как было показано в лемме 8, он допускает редукцию к избыточному предикату, и тогда его сложность равна I.

Таким образом, для всякого иррефлексивного предиката исходной модели значение сложности соответствующего ему предиката гомоморфного образа будет больше на величину:

$$v[\text{n-мест.}] - v[\text{n-мест.; ирр.}] = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \frac{(2k-1)(k-r)^n}{r!(k-r)!} + (2n-1)\left(\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{(n-r)^n}{r!(n-r)!} - 1 \right).$$

А так как $v(W/\sigma) - v(W) = \sum_{i=1}^{n} (v(P_i^{*n_i}) - v(P_i^{n_i}))$, то для иррефлексивных предикатов исходной модели мы можем получить ненулевую разность, следовательно: $v(W) \leq v(W/\sigma)$.

СЛЕДСТВИЕ I. Если Г - группа автоморфизмов модели W/σ, тогда для фактор-модели $W/\sigma/\gamma$, где γ - эквивалентность, индуцируемая Г, $v(W/\sigma/\gamma) = v(W/\sigma)$.

Действительно, $W/\sigma/\gamma = W/\sigma$, так как Г - тождественная перестановка на V/σ, в противном случае она должна была бы входить в G_W.

Итак, показано, что таким образом построенный гомоморфизм, который можно понимать как "упрощение" исходной модели, выводит гомоморфный образ из нашего класса моделей, так как на нем не выполняется аксиома иррефлексивности и значение сложности более "простой" фактор-модели возрастает. Таким образом построенный класс моделей будет иметь значение сложности большее, чем исходный.

7. Рассмотрим, как и в п.2, произвольную эквивалентность σ на произвольной модели класса $\mathfrak{M}$. Пусть W/σ - фактор-модель модели W по эквивалентности σ. Обозначим через TS теорию простоты Н.Гудмена. Пусть TS'-та же теория, но без аксиомы иррефлексивности. Тогда для теории TS' справедлива:

ТЕОРЕМА 2. $v(W) \geq v(W/\sigma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, как было показано в леммах I-3, если на модели W выполнимы аксиомы избыточности, симметричности, самополноты, то они выполнимы и на модели W/σ. С другой стороны, если аксиомы теории TS' выполнимы на модели W/σ, то утверждение о выполнимости их на модели W, вообще говоря, неверно, что показывают примеры 4,5,6. Следовательно, $v(W) \geq v(W/\sigma)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $W \in \mathfrak{M}$ и G_W – группа автоморфизмов модели W. Тогда для фактор-модели W/σ модели W по эквивалентности σ, индуцированной G_W в теории TS', справедливо $v(W) = v(W/\sigma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из лемм I–8.

Таким образом, показано, что предложенная Н.Гудменом мера простоты не является устойчивой к таким образом понимаемому "упрощению" исходной модели, приводя к возрастанию значения сложности модели, являющейся гомоморфным образом исходной.

Литература

I. GOODMAN N. Axiomatic Measurement of Simplicity.– The Journal of Philosophy,1955,v.LII,N 24,p.709–722.

2. GOODMAN N. The Structure of Appearance.– Harvard:University Press,1951. – 319 p.

3. MONTAQUE R. Interpretability in Terms of Models.– Indagations Mathematicae,1964,p.467–476.

4. МАЛЬЦЕВ А.И. Алгебраические системы. –М.: Наука, 1970. – 392 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
20 июня 1983 года