

УДК 681.32

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА СЛОЖНОСТИ ДВУХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ РАЗМЕЩЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ

Л.И.Макаров

При разработке систем автоматизированного проектирования радиоэлектронной аппаратуры существенным этапом является создание или выбор быстродействующего алгоритма размещения элементов схемы проектируемого устройства на плате [1-3]. При этом обычно вычислительную сложность алгоритма оценивают количеством выполняемых им операций в худшем случае, а плату и элементы схемы считают прямоугольниками. В приведенной ниже постановке задачи размещения отсутствуют элементы, положение которых задано на плате заранее, и области платы, запрещенные для размещения элементов, поскольку их наличие на практике не влияет на порядок оценки сложности алгоритма.

Зададим схему F устройства в виде пары (E, S) , где $E = \{e_i\}$ - множество элементов, $i = \overline{1, n}$, и $S = \{s_j\}$ - система их соединений, $j = \overline{1, m}$. Каждый прямоугольник (элемент или плату) зададим на плоскости в собственной системе координат (X, Y) угловыми точками $(x', y'), (x'', y'')$ такими, что для всех точек (x, y) прямоугольника выполняются условия $x' \leq x \leq x'', y' \leq y \leq y''$, и при этом начало (репер) t координат также принадлежит прямоугольнику. Тогда ориентацией θ_i элемента e_i , $i = \overline{1, n}$, назовем угол поворота системы (X_i, Y_i) вместе с элементом e_i вокруг его репера t_i относительно системы координат (X_0, Y_0) платы P . Ниже рассматриваются только ориентации, кратные 90° .

Зададим на плоскости в системе координат (X_0, Y_0) платы целочисленную решетку. Расположение $T = \{T_i\}$, $T_i = (x_i, y_i, \theta_i)$ элементов e_i , $i = \overline{1, n}$, схемы считаем заданным, если для каждого элемента известны ориентация θ_i , координаты (x_i, y_i)

его репера t_i в системе (X_0, Y_0) и репер t_i совпадает с одной из точек решетки. Обозначим через H и H_i , $i = \overline{1, n}$, множества точек решетки, принадлежащих плате P и элементам e_i при некотором их расположении. Очевидно, что мощности $H = |H|$, $H_i = |H_i|$ этих множеств не зависят от расположения элементов. Расположение $T = \{T_i\}$ назовем распределением элементов по плате, если $t_i \in H$, $i = \overline{1, n}$, а размещением элементов на плате, если

$$H_E = \bigcup_{i=1}^n H_i \subseteq H, \quad H_i \cap H_r = \emptyset, \quad i \neq r; \quad i, r = \overline{1, n}.$$

Система соединений элементов схемы задается множеством связей $S = \{s_j\}$, $j = \overline{1, m}$. Каждая связь содержит множество тех точек (контактов) элементов, которые на плате должны быть соединены между собой, т.е. $s_j = \{(k, i)_1\}$, $1 = \overline{1, 1_j}$, где k - номер контакта элемента e_i , входящего в связку s_j , $1_j \geq 1$ - степень связки, при этом $s_j \cap s_r = \emptyset$, $j \neq r$; $j, r = \overline{1, m}$. Система соединений может быть задана и множеством $Z = \{z_i\}$, $i = \overline{1, n}$, $z_i = \{(k, j)\}$, $k = \overline{1, d_i}$, где k - номер контакта элемента e_i , входящего в связку s_j , $d_i \geq 1$ - степень (число контактов) элемента,

$$\sum_{i=1}^n d_i = \sum_{j=1}^m 1_j = D. \text{ Будем обозначать схему } F \text{ как } F = (E, S) \text{ или как}$$

$F = (E, Z)$. Фрагментом схемы F назовем схему $F' = (E', S') = (E', Z')$, где $E' \subseteq E$, $S' = \{s_j(E')\}$, $s_j(E') = \{(q, r) / (q, r) \in s_j \text{ \& } e_r \in E'\}$, $Z' = \{z_r(E')\}$, $z_r(E') = \{(q, j) / (q, j) \in z_r \text{ \& } e_r \in E' \text{ \& } s_j(E') \neq \emptyset\}$, т.е. фрагмент F' есть схема, образованная множеством элементов $E' \subseteq E$ и системой соединений их контактов. Для частного случая введем обозначения $E_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_1\}$, $s_j(i) = s_j(E_1)$, $S_1 = \{s_j(i)\}$, $z_r(i) = z_r(E_1)$, $Z_1 = \{z_r(i)\}$, $F_1 = (E_1, S_1) = (E_1, Z_1)$, $r = \overline{1, 1}$, $i = \overline{1, n}$, т.е. $E_1 = \{e_1\}$, $S_1 = \{s_j(1)\}$, $F_1 = F$.

Для заданного расположения $T = \{T_i\}$, $T_i = (x_i, y_i, \theta_i)$ элементов схемы известны координаты (x_{k1}, y_{k1}) каждого k -го контакта i -го элемента, $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, d_i}$, в системе координат (X_0, Y_0) . Поэтому качество расположения элементов схемы обычно оценивается значением функции $r = f(T, Z)$, зависящей от положения контактов на плате и системы их соединений.

Задача размещения элементов схемы $F = (E, Z)$ на плате P формулируется так: на плате P найти такое размещение

$T^* = \{T_i^*\}$, $T_i^* = (x_i^*, y_i^*, \theta_i^*)$ элементов множества $E = \{e_i\}, i = \overline{1, n}$, имеющих систему соединений Z , что $f^* = f(T^*, Z) = \min_{T \in \tilde{T}} f(T, Z)$, где

$\tilde{T}$ - множество всех размещений элементов из E на плате P .

Поиск точного решения задачи размещения связан с перебором всех ее решений, поэтому для нахождения приближенного решения этой задачи применяют быстродействующие алгоритмы последовательного размещения на плате упорядоченного множества элементов схемы. В этих алгоритмах на i -м шаге располагается очередной i -й элемент, т.е. известно расположение элементов из E_i , и качество расположения элементов схемы F_i оценивается величиной $f_i = f(T(i), Z_i)$, где $T(i) = \{T_r\}$, $r = \overline{1, i}$, $i = \overline{1, n}$, $T(n) = T$.

Обычно для вычисления оценки качества f_i расположения элементов схемы F_i используют следующие модели соединений.

1. Полный граф. Контакт k элемента i из пары $(k, j) \in z_i(i)$ соединен отрезком прямой со всеми контактами связи $s_j(i) = \{(q, r)\}$. Тогда

$$f_i = f_{i-1} + \sum_{(k, j) \in z_i(i)} \sum_{(q, r) \in s_j(i)} \rho_{kq} = f_{i-1} + \Delta_i$$

где ρ_{kq} - расстояние между k -м контактом элемента e_i и q -м контактом элемента e_r , входящими в связку $s_j(i)$, $e_r \in E$; и для заданного расположения T значение величины

$$f = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{(k, j) \in z_i(i) \\ (q, r) \in s_j(i)}} \rho_{kq} = f_n = \sum_{i=1}^n \Delta_i$$

не зависит от упорядочения элементов схемы. Сложность $\omega(\Delta_i)$ вычисления величины Δ_i не превышает $\omega(\Delta_i) \leq c_1 \sum_{k=1}^{d_i} l_j^k$, l_j^k - степень связи s_j , содержащей (k, i) ; c_1 - константа. Далее в формулах константы обозначаются буквой c с индексами.

2. Дерево Прима. Контакт k элемента i из пары $(k, j) \in z_i(i)$ соединен отрезком прямой с ближайшим контактом связи $s_j(i) = \{(q, r)\}$. Тогда

$$f_i = f_{i-1} + \sum_{(k, j) \in z_i(i)} \min_{(q, r) \in s_j(i)} \rho_{kq} = f_{i-1} + \Delta_i$$

и для заданного расположения T $f \neq f_n$, так как f_n зависит от

упорядочения элементов. Сложность вычисления $\omega(\Delta_1) \leq c_2 \sum_{x=1}^{d_1} 1_j^k$. В аналогичных моделях соединений контакты из $z_1(i)$ соединяют с другими точками (например, ближайшими) множества отрезков связей из S_{1-1} , однако сложность вычислений при этом возрастает.

3. Звезда. Контакт k элемента i из пары $(k, j) \in z_1(i)$ соединен отрезком прямой с некоторым центром $a_j(i)$ системы контактов связи $a_j(i) = \{(q, r)\}$ [3]. Тогда

$$f_i = f_{i-1} + \sum_{(k,j) \in z_1(i)} \rho_k = f_{i-1} + \Delta_i,$$

где ρ_k - расстояние между k -м контактом элемента e_i и центром $a_j(i)$. Если положение центра $a_j(i)$ зависит от положения контактов на плате (например, для центров из $[3,4]$), то $f \neq f_n$; в частном случае, если центр системы контактов j -й связи задается всегда совпадающим с первым по порядку контактом этой системы, располагаемым на плате согласно очередности элементов, т.е. с контактом $q' \in (q', r') \in a_j$, $r' = \min_{(q,r) \in a_j} r$, то положение центра не

зависит от положения системы контактов, однако $f \neq f_n$, так как $\rho_k = \rho_{kq'}$ зависит от упорядочения элементов. Сложность вычисления

$\omega(\Delta_1) \leq c_3 \sum_{x=1}^{d_1} (c_a + c_k) \leq c_3 d_1$, где c_a - сложность вычисления координат центра $a_j(i)$ по известным координатам центра $a_j(i-1)$ связи $a_j(i-1)$, c_k - сложность вычисления величины ρ_k .

4. Габаритный прямоугольник. Прямоугольник Γ называют габаритным для системы из p точек с координатами (x_r, y_r) , $r=1, p$, если $\min x_r \leq x \leq \max x_r$, $\min y_r \leq y \leq \max y_r$ для всех точек $(x, y) \in \Gamma$. В этой модели функция качества расположения задается в виде $f_i = f_{i-1} + \sum_{(k,j) \in z_1(i)} \rho_{k\Gamma} = f_{i-1} + \Delta_i$, где $\rho_{k\Gamma}$ - расстояние между k -м контактом элемента e_i и габаритным прямоугольником $\Gamma_j(i-1)$ системы контактов связи $a_j(i-1)$. Для ортогональной метрики, в которой $\rho_{1,2} = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$, расстояние $\rho_{k\Gamma} = P_j(i) - P_j(i-1)$, где $P_j(i)$ - полупериметр $\Gamma_j(i)$, и в этом случае $f = f_n$. Сложность вычисления $\omega(\Delta_1) \leq c_4 d_1$.

Далее для анализа сложности алгоритмов выбраны модели соединений, для которых $\omega(\Delta_1) \leq c d_1$.

Упорядочение множества E элементов схемы обычно производится по критериям их "наибольшей связности". Алгоритм Π , основанный на одном из этих критериев, состоит в следующем.

1) В качестве первого по порядку назначается один из элементов $e_i \in E$, $i = \overline{1, n}$, например, имеющий $\max_i d_i$ или заранее размещенный на плате.

1) Пусть упорядочено множество E_{i-1} , $i = \overline{2, n}$, элементов схемы. Тогда в качестве i -го по порядку элемента среди $(n-i+1)$ неупорядоченных элементов $e_r \in E \setminus E_{i-1}$ выбирается один из элементов, имеющих $\max_r (2d_r^0 - d_r^0)$, где d_r^0 - количество контактов элемента e_r , входящих в связи системы соединений S_{i-1} .

Легко видеть, что вычислительная сложность алгоритма U $\omega_U \leq c_U n^2$, $d = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i = \frac{D}{n}$, а объем требуемой памяти $V_U \leq c_U n$.

Исходной информацией для алгоритмов размещения служат описание схемы $F = (E, S) = (E, Z)$, $E = \{e_i\}$, $i = \overline{1, n}$, $S = \{s_j\}$, $j = \overline{1, m}$, $Z = \{z_i\}$ и описание платы и элементов при заданной целочисленной решетке, т.е. $N, N_1, N_i \geq 1$, $N_E = \sum_{i=1}^n N_i$, $N_E = \sigma N$, $0 < \sigma \leq 1$. Выходной информацией являются размещение элементов $T = \{T_i\}$, $T_i = (x_i, y_i, \theta_i)$, $i = \overline{1, n}$, и оценка качества размещения $f(T, Z)$.

Последовательный алгоритм размещения А

Этап 1. Упорядочение элементов схемы алгоритмом U . Вычислительная сложность этапа 1 не превышает величины $\omega_1 = c_U n^2$.

Этап 2. Последовательное размещение упорядоченных элементов.

1) На плате задается расположение $T_1 = (x_1, y_1, \theta_1)$ первого по порядку элемента $e_1 \in E$, $N_1 \leq N$. Если расположение первого элемента на плате не задается, то задается его расположение на плоскости и остальные элементы размещаются таким образом, чтобы их габаритный прямоугольник не превышал прямоугольник платы.

1) При заданном размещении множества элементов E_{i-1} , $i = \overline{2, n}$, для элемента e_i в области $\tilde{H}_{i-1} = H \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} H_j$ находится такое размещение $T_i = (x_i, y_i, \theta_i)$, при котором минимально приращение Δ_i^* оценки качества размещения, т.е. $\Delta_i^* = \min \Delta_i$ по всем значениям (x_i, y_i, θ_i) при $H_i \subseteq \tilde{H}_{i-1}$.

Вычислительная сложность этапа 2

$$\omega_2^n \leq c' \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\tilde{N}_{i-1}} (\omega(e_i) + \omega(\Delta_i) + \omega_0),$$

где $\tilde{N}_{i-1}$ - количество точек решетки N платы, не занятых элементами $e_x \in E_{i-1}$, $\tilde{N}_{i-1} = |\tilde{H}_{i-1}| = N - \sum_{x=1}^{i-1} N_x$, $i = \overline{2, n}$, $\tilde{N}_1 = N$; $\omega(e_i) \leq c_e N_i$ - сложность проверки условия $N_i \subseteq \tilde{H}_{i-1}$ для очередного расположения $T_i = (x_i, y_i, \theta_i)$; $\omega(\Delta_i) \leq c_\Delta d_i$ - сложность вычисления приращения Δ_i оценки качества; $\omega_0 = c_0$ - сложность процедур установки репера t_i в очередную k -ю точку области $\tilde{H}_{i-1}$ и сравнения вычисленного Δ_i с рекордным значением приращения для предыдущих точек $\tilde{H}_{i-1}$. Отсюда

$$\omega_2^n \leq c' \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\tilde{N}_{i-1}} (c_e N_i + c_\Delta d_i + c_0) = \omega_2'.$$

Для средних значений N_i и d_i , равных $\bar{N} = \frac{N_E}{n}$ и $d = \frac{D}{n}$, имеем $\omega_2' = c' \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\tilde{N}_{i-1}} (c_e \bar{N} + c_\Delta d + c_0) = c' c_A (nN - \frac{n(n-1)}{2} \bar{N}) \leq c_2 c_A nN = \omega_2$, $c_A = (c_e \bar{N} + c_\Delta d + c_0)$.

Таким образом, вычислительная сложность последовательного алгоритма A не превосходит величины $\omega_A = \omega_1 + \omega_2 = c_U n^2 + c_2 c_A nN$, а объем требуемой памяти не превосходит $V_A = c_V^A d n$.

Итеративно-последовательный алгоритм размещения В

Алгоритм, блок-схема которого приведена на рис. I, состоит из 4 этапов. Функционирование алгоритма определяется значениями его управляющих параметров $\bar{l} \geq 1$, $\bar{r} \geq 0$, $\bar{p} \geq 0$, $\bar{\alpha} \geq 2$, $\bar{\beta} \geq 1$, $\bar{\sigma} \leq 1$, а оптимальные (по быстродействию) значения управляющих параметров l' , r' , p' , α' , β' для каждого этапа вычисляются в блоке оптимизации параметров. Вопросы влияния управляющих параметров алгоритма на качество размещения элементов здесь не рассматриваются.

Этап 1. Упорядочение элементов схемы алгоритмом У. Вычислительная сложность этапа 1 не превосходит $\omega_1 = c_U n^2$.

Этап 2. Если $l = 1$, то переход к этапу 3. Если $2 \leq l \leq \bar{l}$, то плата разбивается на l одинаковых областей $Q_j \subset H$, $|Q_j| = \frac{N}{l}$ и в каж-

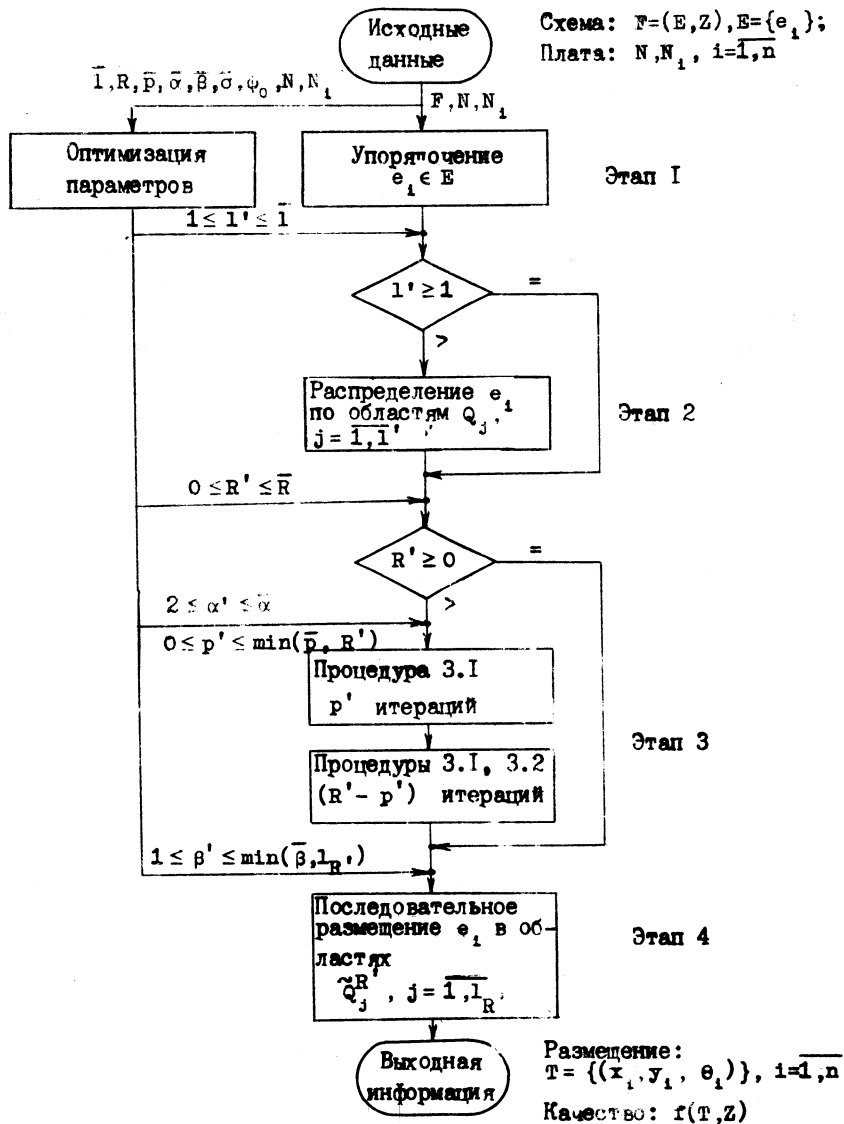


Рис. I. Блок-схема итеративно-последовательного алгоритма.

дой области выделяется центр $q_j \in Q_j$, $j=1, \dots, l$. В установленном порядке элементы $e_i \in E$ последовательно распределяются по множеству $\{q_j\}$ центров областей, т.е. для каждого e_i задается такое распределение $T_i = (x_i, y_i, e_i)$, при котором его репер $t_i \in \{q_j\}$, $i=1, n$. При этом, если задано распределение множества E_{i-1} , то для элемента e_i находится такое распределение T_i , $t_i \in \{q_j\}$, при котором минимально приращение оценки качества по всем распределениям, удовлетворяющим ограничению для плотности:

$$\sigma_j^i \leq \bar{\sigma}, \quad \sigma_j^i = \sigma_j^{i-1} + \frac{N_i}{|Q_j|} = \frac{1}{N} \left(\sum_{e_r \in E_j} N_r + N_i \right),$$

где σ_j^i - плотность заполнения области Q_j элементами $e_r \in E_j \subset E_{i-1}$ и элементом e_i ; E_j - множество элементов из E_{i-1} , распределенных в область Q_j ; $\bar{\sigma}$ - наибольшая допустимая плотность заполнения областей.

Поскольку наибольший элемент схемы должен быть меньше любой области с учетом ограничения для плотности, то $\sigma_j^1 = \frac{1N_x}{N} \leq \bar{\sigma}$, $N_x = \max_i N_i$, т.е. $1 \leq \frac{\bar{\sigma}N}{N_x} = l_E, l_E$ - допустимое количество областей. Величина $\bar{\sigma}$ может быть задана из соотношений $\bar{\sigma} \geq 1$, $\sigma \leq \bar{\sigma} \leq \sigma + \alpha_x$, $\sigma = \frac{N_E}{N}$, $\alpha_x = \frac{1N_x}{N}$. При $\bar{\sigma} = \sigma + \alpha_x$ для наибольшего элемента всегда найдется область, в которую он может быть распределен без нарушения ограничения по плотности.

Вычислительная сложность этапа 2

$$\omega_2'' \leq c_2' \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l (\omega(\Delta_i) + \omega_0'),$$

где $\omega(\Delta_i) \leq c_{\Delta} d_i$; $\omega_0' = c_0' = c_0 + c_{\sigma}$ - сложность процедур установки репера t_i в очередной центр q_j , сравнения Δ_i с рекордным значением и проверки условия $\sigma_j^1 \leq \bar{\sigma}$. Отсюда

$$\omega_2'' \leq c_2' \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l (c_{\Delta} d_i + c_0') = c_2' c_B \ln = \omega_2, \quad c_B = (c_{\Delta} d + c_0').$$

Этап 3. Если $R=0$, то переход к этапу 4. Если $\bar{R} > 1$, то этап состоит из R итераций, $1 \leq R \leq \bar{R}$, при этом каждая из R итераций, $0 \leq p \leq R$, содержит только процедуру разбиения областей, а каж-

дая из оставшихся ($R-p$) итераций содержит процедуру разбиения областей и процедуру перекрытия зон.

Процедура 3.1 - разбиение областей.

В каждой r -й итерации, $r = \overline{1, R}$, каждая из 1_{r-1} областей Q_j^{r-1} , $j = \overline{1, 1_{r-1}}$, разбиения платы в предыдущей $(r-1)$ -й итерации разбивается на α одинаковых областей Q_{jk}^r , $k = \overline{1, \alpha}$, $\alpha \geq 2$. Каждый из множества E_j^{r-1} элементов, распределенных в область Q_j^{r-1} , $|E_j^{r-1}| = n_j^{r-1}$, в установленном порядке распределяется (с помощью алгоритма этапа 2) в один из множества $\{q_{jk}\}$ центров областей Q_{jk}^r , при этом распределение элементов остальных областей считается заданным. Таким образом, для каждого элемента $e_i \in E$, $i = \overline{1, n}$, находится такое распределение t_i из α возможных, при котором удовлетворяется ограничение для плотности заполнения областей Q_{jk}^r : $\sigma_{jk}^i \leq \bar{\sigma}$ и приращение оценки качества минимально. Затем области Q_{jk}^r , $j = \overline{1, 1_{r-1}}$, $k = \overline{1, \alpha}$, переобозначаются как Q_j^r , $j = \overline{1, 1_r}$, $1_r = \alpha \cdot 1_{r-1}$, $r = \overline{1, R}$, $1_0 = 1$, при этом должно выполняться ограничение для числа областей $1_R \leq 1_g = \frac{\bar{\sigma} N}{N_x}$.

Вычислительная сложность процедуры 3.1

$$\omega_p' \leq c_p' \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\alpha} (\omega(\Delta_i) + \omega_0') = c_p' c_B \alpha n = \omega_p'.$$

Процедура 3.2 - перекрытие зон.

При использовании в алгоритме только этапа 2 и процедуры 3.1 каждый элемент, распределенный в некоторую область, остается в ней до завершения работы алгоритма. При случайном распределении элемента $e_i \in E$ (например, при одинаковых минимальных значениях Δ_i для нескольких областей) это может привести к низкому качеству размещения. Поэтому в процедуре 3.2 для создания возможности перехода элементов из одной области в другую плата покрывается системой частично перекрывающихся зон, состоящих из областей разбиения очередной итерации. Для системы зон задается конечная последовательность их бесповторного обхода и в соответствии с ней элементы очередной зоны распределяются по областям этой зоны. Влияние способа задания системы зон и последовательности их обхода на качество размещения здесь не рассматривается.

Итак, процедура 3.2: в r -й итерации, $r = \overline{p+1, R}$, плата покрывается системой из 1_r перекрывающихся зон R_s^r , $s = \overline{1, 1_r}$, каждая из которых содержит g_r областей Q_{js}^r , $(js) = \overline{1, g_r}$, полученных в

процедуре 3.1, $j = \overline{1, l_x}$. Пусть в каждую область Q_{js}^x распределено множество E_{js}^x из n_{js}^x элементов. В соответствии с выбранной последовательностью обхода все $n_s^x = \sum_{(js)=1}^{g_x} n_{js}^x$ элементов очередной зоны R_s^x распределяются (с помощью алгоритма этапа 2) по g_x областям этой зоны, при этом распределение элементов остальных зон считается заданным.

Вычислительная сложность процедуры 3.2

$$\omega_{II}^i \leq c_{II}^i \sum_{s=1}^{L_x} \sum_{h=1}^{n_s^x} \sum_{(js)=1}^{g_x} (\omega(\Delta_h) + \omega_0^i) \leq c_{II}^i \sum_{s=1}^{L_x} \sum_{h=1}^{n_s^x} \sum_{(js)=1}^{g_x} (c_{\Delta} d_h + c_0^i) = \omega_{II}.$$

Если $\bar{n}_j^x$ и $\bar{n}_{js}^x$ - средние количества элементов в одной области разбиения r -й итерации, взятые по всем l_x областям платы и по всем $g_x l_x$ областям, содержащимся в L_x зонах, совпадают, т.е.

$$\bar{n}_j^x = \frac{1}{l_x} \sum_{j=1}^{l_x} n_j^x = \frac{n}{l_x}$$

равно

$$\bar{n}_{js}^x = \frac{1}{g_x l_x} \sum_{s=1}^{L_x} \sum_{(js)=1}^{g_x} n_{js}^x = \frac{1}{g_x l_x} \sum_{s=1}^{L_x} n_s^x = \frac{n^x}{g_x l_x},$$

то суммарное число элементов во всех зонах $n^x = \frac{g_x l_x}{1} n$. Предположим, что средняя степень $\bar{d}$ элемента по всем n^x элементам всех зон равна d , т.е.

$$\bar{d} = \frac{1}{n^x} \sum_{s=1}^{L_x} \sum_{(js)=1}^{g_x} d_{js} = d.$$

Тогда для $\bar{n}_j^x = \bar{n}_{js}^x$ и $\bar{d} = d$ имеем

$$\omega_{II} = c_{II}^i (c_{\Delta} d + c_0^i) g_x n^x = c_{II}^i c_B \phi_x n, \quad \phi_x = g_x^2 \frac{L_x}{l_x}.$$

Вычислительная сложность этапа 3

$$\omega_3^i \leq c_3^i \left(\sum_{r=1}^R \omega_r + \sum_{r=p+1}^R \omega_{II}^i \right) = c_3^i c_B (c_p^i \alpha n R + c_{II}^i \phi_0 n (R-p)) = \omega_3, \quad \phi_0 = \frac{1}{R-p} \sum_{r=p+1}^R \phi_r.$$

Значения величины $\phi_x = g_x^2 \frac{L_x}{l_x}$ зависят от способа задания системы перекрывающихся зон и могут быть легко найдены только для простых регулярных способов, например, для случая постоянного, не зависящего от r числа областей в каждой зоне [3]. Пусть $\alpha \leq g_x =$

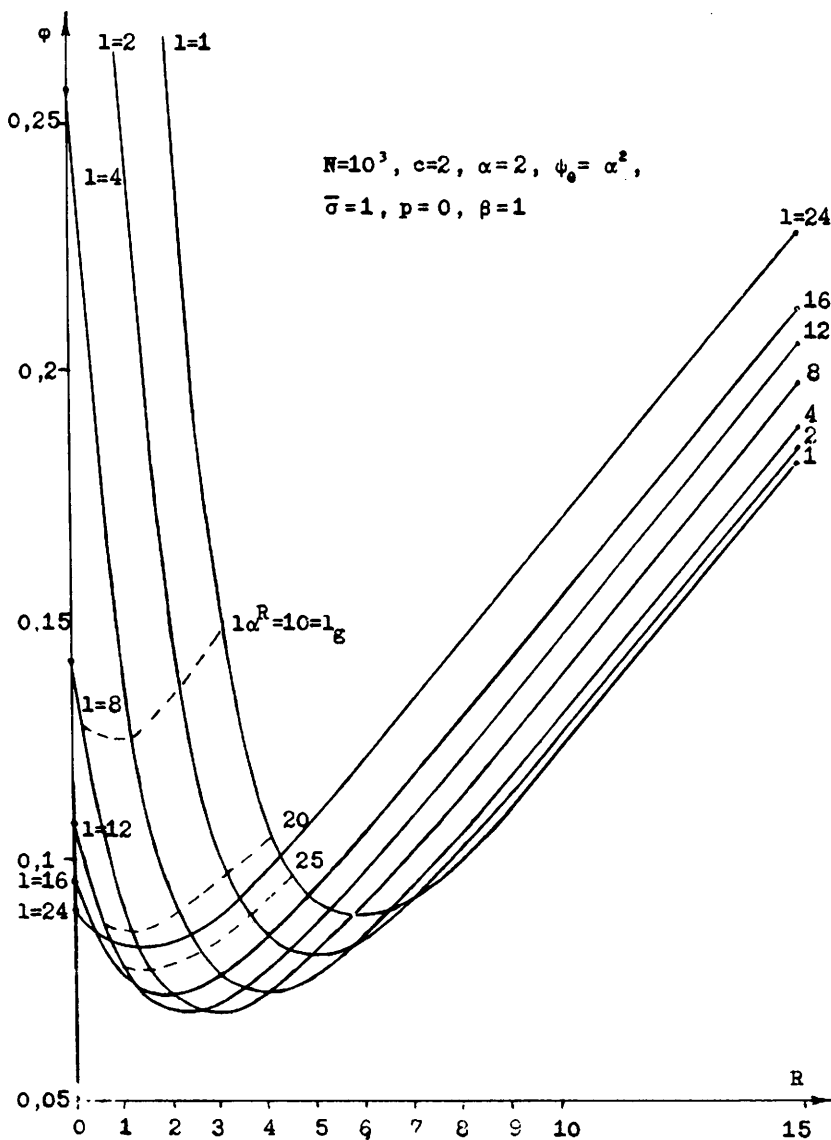


Рис.2. Зависимость φ от параметров l и R .

$= g \leq \alpha^2$ и $1_{r-1} \leq L_r \leq 1_r = \alpha 1_{r-1}$, $\alpha \geq 2$, тогда $\alpha \leq \psi_r \leq \alpha^4$ и $\alpha \leq \phi_0 \leq \alpha^4$.

Этап 4. Для каждого элемента из множества E_j^R элементов, расположенных в область Q_j^R , с помощью последовательного алгоритма А находится размещение на множестве узлов решетки $\tilde{Q}_j^R$, при этом $Q_j^R \subseteq \tilde{Q}_j^R \subseteq H$ и $|Q_j^R| = \frac{N}{1_R} \leq |\tilde{Q}_j^R| = q_R \leq N$; $j = \overline{1, 1_R}$, $1_R = 1 \alpha^R$ (при $1=1$, $R=0$, $E_1^0 = E$, $Q_1^0 = H$).

Вычислительная сложность этапа 4

$$\omega_4^i \leq c_4^i \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{q_R} (\omega(e_i) + \omega(\Delta_i) + \omega_0) \leq c_4^i \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{q_R} (c_e N_i + c_\Delta d_i + c_0) \leq$$

$$\leq c_4^i c_A \beta \frac{N}{1_R} n = \omega_4.$$

где $\beta \frac{N}{1_R} = q_R$, $1 \leq \beta \leq 1_R$.

Таким образом, вычислительная сложность итеративно-последовательного алгоритма В при $1 \geq 2$, $R \geq 1$ не превосходит величины $\omega_B = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = c_U n^2 + c_2' c_B \ln n + c_3' c_B (c_p' \alpha n R + c_{11}' \phi_0 n (R-p)) + c_4' c_A n \frac{\beta N}{1_R}$.

Пусть $c_2' = c_1'$, $c_p' = c_3' c_\Pi = c_4' = c_2 = c_1'$, тогда

$$\omega_B = c_U n^2 + c_1' c_A \left[c(1 + \alpha R + \phi_0 (R-p)) + \frac{\beta N}{1 \alpha^R} \right] n = c_U n^2 + c_1' c_A n N \varphi,$$

где $c = \frac{c_B}{c_A}$, $\varphi = c \frac{1 + \alpha R + \phi_0 (R-p)}{N} + \frac{\beta}{1 \alpha^R}$.

Объем памяти, необходимый для работы алгоритма В, не превосходит величины $V_B = c_B^y d n$.

Быстродействие алгоритма В относительно быстродействия алгоритма А определим величиной

$$\delta = \frac{\omega_B}{\omega_A} = \frac{c_U n^2 + c_1' c_A n N \varphi}{c_U n^2 + c_1' c_A n N} = \frac{c_U + c_1' c_A \frac{N}{\sigma}}{c_U + c_1' c_A \frac{N}{\sigma}} \varphi = c^0 + c^1 \varphi, \quad c^0 + c^1 = 1.$$

Зависимость величины φ от параметров $R, 1$ при $\alpha=2$, $c=2$, $\beta=1$, $p=0$, $\phi_0 = \alpha^2$, $\sigma=1$, $N=10^3$ представлена на рис.2; пунктиром показана зависимость $1_R = 1 \alpha^R = 1_g$.

Для действительных значений $l \geq 2$, $R \geq 1$, $\alpha \geq 2$, $0 \leq p \leq R$, $1 \leq \beta \leq l_R$, $\phi_0 = \alpha^k$, $k = \bar{1}, 4$, минимум φ^* величины φ , следовательно, и минимум δ^* величины δ достигается при

$$l^* = \left(\frac{\beta N}{\alpha^R} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad R^* = \log_{\alpha} \frac{\beta N \ln \alpha}{\alpha(\alpha + \phi_0)l}$$

и при $\phi_0 = \alpha$

$$\alpha^* = \left(\frac{R \beta N}{\alpha l (2R - p)} \right)^{\frac{1}{R+1}}.$$

При наличии ограничения на число областей $l\alpha^R = l_R \leq l_g = \frac{\bar{\alpha} N}{N_x}$ оптимальные значения l^* , R^* , α^* могут быть и не достигнуты. Для нахождения оптимальных значений управляющих параметров этапов алгоритма при заданных величинах $\bar{l}$, $\bar{R}$, $\bar{p}$, $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\alpha}$, $\phi_0 = \alpha^k$, $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, и конкретных значениях N , N_x в алгоритм включен блок оптимизации параметров. Этот блок при решении данной конкретной задачи размещения находит такие значения управляющих параметров l' , R' , p' , α' , β' , которые обеспечивают наибольшее быстродействие алгоритма при решении данной задачи, т.е. дают $\min \varphi = \varphi'$ при ограничениях $1 \leq l' \leq \bar{l}$, $0 \leq R' \leq \bar{R}$, $0 \leq p' \leq \min(\bar{p}, R')$, $2 \leq \alpha' \leq \bar{\alpha}$, $1 \leq \beta' \leq \min(\bar{\beta}, l_R)$, $1 \leq l_R' \leq l_g$.

Таким образом, итеративно-последовательный алгоритм размещения обладает более высоким быстродействием, чем последовательный алгоритм при одинаковых по порядку объемах требуемой памяти. Анализ относительного быстродействия этих алгоритмов дает возможность с помощью блока оптимизации управляющих параметров адаптировать (в смысле наибольшего быстродействия) итеративно-последовательный алгоритм к условиям конкретной решаемой задачи размещения.

Л и т е р а т у р а

1. АБРАТИС Л.Б. и др. Автоматизация проектирования ЭВМ. - М.: Сов. радио, 1978. - 272 с.
2. ГЕРАСИМЕНКО Е.П. и др. Автоматизация проектирования печатных блоков с модулями произвольной формы. - М.: Машиностроение, 1979. - 167 с.
3. КАШИН В.И., МАКАРОВ Л.И. Итеративно-последовательный алгоритм размещения моделей разногабаритных элементов. - В кн.: Алгоритмические основы обработки структурной информации (Вычислительные системы, вып. 85). Новосибирск, 1981, с. 64-77.

4. МАКАРОВ Л.И. Размещение и трассировка в плоской прямоугольной решетке. -В кн.: Автоматизация проектирования в микроэлектронике. Теория. Методы. Алгоритмы (Вычислительные системы, вып. 64). Новосибирск, 1975, с. 63-72.

Поступила в ред.-изд.отд.
1 сентября 1983 года