

УДК 519.65:681.3.06

АВТОМАТИЗАЦИЯ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ В ИНЖЕНЕРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Ю.С. Завьялов, В.А. Скороспелов

Задачи автоматизации обработки геометрической информации с помощью ЭВМ возникают в научных исследованиях, при проектировании и технологической подготовке производства в машиностроении (судо-, авиа- и автомобилестроении, производстве турбин и двигателей), в легкой промышленности, архитектуре, картографии, технике связи и т.д. Современное состояние инженерной геометрии характеризуется изменением природы ее методов, переходом от традиционных графических способов к информационным компьютерным. Это означает замену геометрических объектов (кривых и поверхностей) математическими моделями и численное оперирование с такими моделями. Институт математики СО АН СССР занимается исследованием данной проблемы применительно к машиностроению с середины 60-х годов. Результаты отражены в монографии [1], руководящих технических материалах [2], тематических сборниках [3-5] и ряде статей, из которых отметим [6-16]. Практически полная библиография зарубежных работ по 1976 г. включительно имеется в [17].

Из общей проблемы можно выделить несколько самостоятельных, хотя и связанных между собой тем: моделирование кривых и поверхностей, решение инженерно-геометрических задач, подготовка информации для воспроизведения поверхностей на станках с ЧПУ, визуализация графической информации и программное обеспечение расчетов. Одни из них достаточно подробно освещены в литературе и даются здесь обзорно. По другим имеются пробелы, которые мы попытаемся восполнить.

§1. Вопросы моделирования кривых и поверхностей

Математический аппарат для моделирования сложных кривых и поверхностей дала теория сплайн-функций. В рамках этой теории кривые описываются вектор-функциями, названными вектор-сплайнами, $\vec{V}(u) = V_x(u)\vec{e}_1 + V_y(u)\vec{e}_2 + V_z(u)\vec{e}_3$, компоненты которых $V_x(u)$, $V_y(u)$, $V_z(u)$ суть сплайн-функции параметра u , изменяющегося на отрезке $[a, b]$, с сеткой $\Delta_u: a = u_1 < u_2 < \dots < u_N = b$.

Наиболее употребительны вектор-сплайны с компонентами в виде полиномиальных сплайн-функций, образующие линейные множества. Кубические вектор-сплайны назовем просто V -сплайнами. Они могут быть двух классов: класса C^1 (эрмитовы V -сплайны) и V -сплайны класса C^2 [3,5]. Нередко употребляются и нелинейные вектор-сплайны. Например, такого рода вектор-сплайн с непрерывной касательной и кусочно-непрерывной кривизной (класс C^1) предложен В.А.Леусом [2,6].

Поверхности описываются вектор-сплайном двух переменных $\vec{W}(u, v) = W_x(u, v)\vec{e}_1 + W_y(u, v)\vec{e}_2 + W_z(u, v)\vec{e}_3$ с компонентами $W_x(u, v)$, $W_y(u, v)$, $W_z(u, v)$, являющимися сплайн-функциями в прямоугольной области Ω параметров u, v с сеткой $\Delta = \Delta_u \times \Delta_v$, $\Delta_u: a = u_1 < u_2 < \dots < u_M = d$. Наибольший практический интерес представляют кубические вектор-сплайны двух переменных, которые назовем W -сплайнами.

По сравнению с другими математическими конструкциями, используемыми для описания сложных геометрических форм [17], сплайны обладают, по меньшей мере, тремя важными преимуществами, а именно: лучшими аппроксимативными свойствами, простотой реализации на ЭВМ полученных на их основе алгоритмов, универсальностью, позволяющей использовать одни и те же аппроксимационные конструкции для различных геометрических объектов.

Встречающиеся в практике задачи математического моделирования кривых и поверхностей по их содержанию можно отнести к одному из следующих видов: задачи приближенного описания геометрических объектов, задачи восстановления и задачи генерации.

I. Задачи первого вида состоят в нахождении для заданной кривой $\vec{r} = \vec{r}(u)$, $a \leq u \leq b$, V -сплайна, описывающего кривую с требуемым приближением. Это задача интерполяции с заданной точностью ϵ . Она заключается в нахождении сетки Δ_u и V -сплайна, удовлетворяющего условиям

$$\vec{V}(u_i) = \vec{r}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

и $|\vec{V}(u) - \vec{r}(u)| \leq \epsilon$ для всех $u \in [a, b]$. При построении вектор-сплайнов класса C^1 добавляются условия на производные

$$\vec{V}(u_i) = \vec{r}'(u_i), \quad i=1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

Для получения V -сплайна класса C^2 достаточно использовать равенства (2) только при $i=1, N$ или другие граничные условия, в том числе условия периодичности V -сплайна в случае замкнутых кривых. Решение задачи сводится к нахождению трех скалярных функций одного аргумента $V_x(u), V_y(u), V_z(u)$ [1-6].

Трудным вопросом является выбор шагов $h_i = u_{i+1} - u_i$ сетки Δ_u . Здесь возможны два пути. Один состоит в использовании оценок погрешности интерполяции вида $|\vec{V}(u) - \vec{r}(u)| \leq c(\vec{r})h_i^p$, где $c(\vec{r})$ - функционал, $u_i \leq u \leq u_{i+1}$. Шаги сетки эрмитова V -сплайна находятся из условий $c(\vec{r})h_i^p \leq \epsilon$ и, следовательно, зависят от качества оценок [1]. Другой, более трудоемкий путь использует оценку только в качестве ориентира; окончательный выбор шагов осуществляется в результате непосредственной проверки условия $|\vec{V}(u) - \vec{r}(u)| \leq \epsilon$ на более густой сетке, нежели Δ_u .

Приближение поверхности, заданной вектор-функцией двух переменных $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, W -сплайном состоит в нахождении трех скалярных интерполяционных сплайнов двух переменных $W_x(u, v), W_y(u, v), W_z(u, v)$. Последние находятся путем решения одномерных задач [1, 5]. Не представляет трудности построение равномерной сетки $\Delta = \Delta_u \times \Delta_v$, обеспечивающей заданную точность. Нахождение неравномерных сеток осложняется тем, что шаги, например, по переменной u будут разными при разных значениях v . Практически приходится подсчитывать очередной шаг h_i на нескольких характерных линиях $v = v_i$ и выбирать из них наименьшее.

2. В задачах восстановления требуется найти кривую по некоторой неполной информации о ней. Иногда эта информация достаточна для построения интерполяционного вектор-сплайна. В других случаях, когда заданы $\vec{r}_i, u_i$ и, быть может, направление касательной в точках, приходится находить значения производной $\vec{r}'_i$ приближенно. Наконец, если заданы только значения $\vec{r}_i$, то требуется выбрать параметризацию, т.е. задать значения u_i в этих точках. От выбора параметризации зависит качественный характер поведения сплайновой кривой [3, 17]. Как правило, хорошие результаты получаются при выборе в качестве параметра суммарной длины хорд, соединяющих заданные точки. В этих задачах некорректно требовать заданную точность.

приближения, но вполне уместен вопрос о погрешности восстановления кривых определенного класса гладкости и на него имеется ответ [3,5].

Задача восстановления усложняется, если исходные данные заданы с ошибками. В этом случае применяется интерполирование со сглаживанием. Большинство методов решения подобных задач основано на экстремальном свойстве интерполяционных V -сплайнов класса C^2 , которое состоит в том, что среди всех интерполантов $\vec{p} = \vec{p}(u)$, удовлетворяющих условиям (1) или условиям (2) при $i = 1, N$ совместно с (1), или условиям периодичности, V -сплайн минимизирует функционал

$$I(\vec{p}) = \int_a^b |\vec{p}''(u)|^2 du.$$

Если при этом известна величина погрешности δ_i исходных точек $\vec{r}_i^0$, то ищется минимум функционала $I(\vec{p})$ при ограничениях $|\vec{V}(u_i) - \vec{r}_i^0| \leq \delta_i, i = 1, 2, \dots, N$. Задача распадается на три аналогичные задачи определения скалярных функций $V_x(u), V_y(u), V_z(u)$, если ограничения удается ввести покомпонентно. Их решение методом сопряженных градиентов и методом штрафов рассмотрено в [12,15].

В случае, когда величина погрешности не известна, V -сплайн, восстанавливающий кривую, ищется путем решения задачи минимизации функционала

$$I_1(\vec{p}) = I(\vec{p}) + \sum_{i=1}^N \gamma_i |\vec{p}_i - \vec{r}_i^0|^2.$$

Здесь главная трудность заключается в нахождении параметров сглаживания γ_i . Рекомендации на этот счет можно найти в [1,2,7,15,18].

Применение этих способов для сглаживания поверхностей по значениям $\vec{r}_{ij}^0$, хотя бы и заданным на прямоугольной сетке Δ , в общем случае затруднительно. На практике обычно последовательно сглаживаются данные вдоль координатных линий: сначала $v = v_j, j = 1, 2, \dots, M$, а затем полученные значения - вдоль линий $u = u_i, i = 1, 2, \dots, N$. Известно [1], что такая процедура эквивалентна нахождению W -сплайна, минимизирующего некоторый функционал.

Менее популярны методы локального сглаживания, основанные на формулах локальной аппроксимации кубическими сплайнами класса C^2 . Для их применения нужно ввести дополнительные узлы u_i сетки Δ_u

с номерами $i = -2, -1, 0, N+1, N+2, N+3$ такие, например, что $h_{-2} = \dots = h_1$, $h_{N-1} = \dots = h_{N+2}$. На расширенной сетке построить В-сплайны и через них представить V-сплайн. Его значения в узлах будут

$$\vec{V}(u_i) = \vec{b}_{i-1} B_{i-1}(u_i) + \vec{b}_i B_i(u_i) + \vec{b}_{i+1} B_{i+1}(u_i), \quad i=1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

Задаваясь значениями $\vec{b}_i$ в зависимости от значений $\vec{r}_{i-p}^0, \dots, \vec{r}_{i+p}^0$, получаем те или иные формулы сглаживания.

Так, формулы, точные на вектор-функциях с компонентами-многочленами первой степени, получаются, если

$$\left. \begin{aligned} \vec{b}_0 &= \vec{r}_1^0 - \frac{3h_1}{2h_1+h_2} (\vec{r}_2^0 - \vec{r}_1^0 + \frac{h_2-h_1}{3} \vec{r}_2^1), \quad \vec{b}_1 = \vec{r}_1^0, \\ \vec{b}_i &= \vec{r}_i^0 + \frac{h_i-h_{i-1}}{3} \vec{r}_i^1, \quad i = 2, 3, \dots, N-1, \\ \vec{b}_N &= \vec{r}_N^0, \quad \vec{b}_{N+1} = \vec{r}_N^0 + \frac{3h_{N-2}}{2h_{N-1}+h_{N-2}} (\vec{r}_N^0 - \vec{r}_{N-1}^0 + \frac{h_{N-2}-h_{N-1}}{3} \vec{r}_{N-1}^1) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где $\vec{r}_i^1$ — конечноразностные аппроксимации производных. Выбор $\vec{b}_0$ и $\vec{b}_{N+1}$ отвечает случаю $\vec{V}(u_1) = \vec{r}_1^0$, $\vec{V}(u_N) = \vec{r}_N^0$. Формулы (3) осуществляют сглаживание по пяти точкам с поправками порядка $O(h^2)$. Они упрощаются, если $h_i = h = \text{const}$, и тогда имеем сглаживание по трем точкам [1].

В [1] приведены формулы, точные на многочленах третьей степени при равномерной сетке. Случай с неравномерной сеткой описан Мирошниченко В.Л. [5]. Они осуществляют сглаживание по пяти точкам с поправками порядка $O(h^4)$.

Локальное сглаживание приходится применять многократно, контролируя выполнение условий $|\vec{V}(u_i) - \vec{r}_i^0| \leq \delta_i$ (если δ_i заданы). Процесс останавливается, когда очередной шаг не дает существенных изменений. Тогда V-сплайн с полученными на последнем шаге значениями $\vec{b}_i$ и будет решением задачи.

Формулы локального сглаживания легко обобщаются на случай поверхностей с данными на прямоугольной сетке. Для этого W-сплайн представляется через В-сплайны [1]. Значения W-сплайна в узлах u_i, v_j будут

$$\vec{W}(u_i, v_j) = \sum_{k=i-1}^{i+1} \sum_{l=j-1}^{j+1} \vec{b}_{kl} B_k(u_i) B_l(v_j).$$

Векторные коэффициенты $\vec{b}_{k1}$ подсчитываются в два шага. На первом по формулам типа (4) вычисляются промежуточные величины $\vec{\omega}_k(v_j) = \sum_{i=j-1}^{j+1} \vec{b}_{ki} \tilde{B}_1(v_j)$, $k = 0, 1, \dots, N+1$, $j = 1, 2, \dots, M$. На втором шаге по этим значениям с помощью аналогов формул (4), записанных относительно величин $\vec{\omega}_k(v_j)$, вычисляем $\vec{b}_{k1}$, $k = 0, 1, \dots, N+1$, $1 = 0, 1, \dots, M+1$.

Наиболее сложная ситуация возникает, когда значения векторов $\vec{r}_k^0$, $k = 1, 2, \dots, N_1$, заданы на нерегулярной сетке в плоскости параметров u, v . В этом случае сначала вводится регулярная сетка Δ . Затем в каждой области $\Omega_{ij}: [u_{i-1}, u_{i+1}] \times [v_{j-1}, v_{j+1}]$ по данным $\vec{r}_k^0$, попавшим в этот прямоугольник, определяется некоторый аппроксимант. Таковым может быть, например, поверхность второго порядка, получаемая по методу наименьших квадратов. Ее значение в точке (u_i, v_j) принимается в качестве исходного. После этого расчеты производятся, как описано выше.

3. Третий тип задач - это генерирование кривых и поверхностей. Из множества задач проектирования трудно выделить какие-либо общие, не зависящие от конкретной предметной области. Поэтому отметим только принципиальную возможность применения сплайнов для решения подобных задач. Она связана с той особенностью сплайнов, что изменение одного его коэффициента ведет к локальному изменению объекта. Для эрмитовых V-сплайнов каждый коэффициент влияет только на два соседних звена. Изменение коэффициента V-сплайна класса C^2 , представленного через B-сплайны, вызывает изменение четырех соседних его звеньев. Окрестность изменения сплайна при варьировании одного из его коэффициентов (соответствующего, например, узлу u_i сетки Δ_u) можно сделать как угодно малой, если к сетке добавить дополнительные узлы в соответствующие окрестности узла u_i : по одному справа и слева от u_i для эрмитова сплайна и по два - для B-сплайна.

Процедуры поиска решений задач проектирования кривых и поверхностей представляют собой процесс последовательного приближения и реализуются, как правило, в интерактивном режиме - режиме диалога. Различные аспекты процесса генерирования геометрических объектов отражены в [17].

§ 2. Численное решение задач инженерной геометрии

Как отмечалось выше, основу инженерно-конструкторских расчетов составляют геометрическое моделирование и геометрические расчеты, т.е. решение разнообразных задач аналитической и дифференциальной геометрии. Их можно отнести к четырем группам: а) вычисление характеристик кривой и поверхности; б) определение кратчайшего расстояния между геометрическими объектами; в) определение пересечения геометрических объектов; г) расчет отображений поверхностей на плоскость; д) визуализация графической информации.

1. Вычисление точек сплайновых кривых и поверхностей состоит в вычислении значений V -сплайнов и W -сплайнов и их производных [5]. Касательные, нормали, кривизны, коэффициенты квадратичных форм и т.п. подсчитываются по известным формулам. Расчет длин дуг, площадей плоских областей и областей на поверхности, объемов тел осуществляется численным интегрированием.

2. Кратчайшее расстояние $D(c_1, c_2)$ между двумя геометрическими объектами c_1 и c_2 определяется как минимальное евклидово расстояние между точками этих объектов $D = \min_{\vec{r}_1 \in c_1, \vec{r}_2 \in c_2} |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ и

характеризует их взаимное расположение. Для некоторых пар объектов, например, точки и прямой, плоскости и сферы и т.д. расстояние $D(c_1, c_2)$ выражается в явном виде через параметры этих объектов. Если же c_1 или c_2 есть кривая или поверхность, приходится прибегать к процедуре численной минимизации функции D на множестве точек объектов c_1 и c_2 . С этой целью применяется модифицированный метод Ньютона [5], область сходимости которого шире обычного метода Ньютона.

3. Кратчайшее расстояние между двумя пересекающимися геометрическими объектами равно нулю. Поэтому точки пересечения этих объектов находятся как точки нулевых минимумов функции расстояния $D(c_1, c_2)$ [5].

4. При производстве обшивок летательных аппаратов и судов нужно находить соответствие участка поверхности участку на плоскости с тем, чтобы из последнего путем деформаций получить требуемый участок поверхности. Если поверхность линейчатая $\vec{r}(u, v) = \vec{r}(u) + v\vec{l}(u)$ и векторы $\vec{r}'(u)$, $\vec{l}(u)$ и $\vec{l}'(u)$ компланарны при всех $u \in [a, b]$, то такая поверхность будет развешивающейся. Путем из -

гибания она может быть наложена на плоскость с сохранением длин линий и углов. Такую область $\vec{R}$ соответствующую участку поверхности $\vec{R}(u, v)$, в технике называют разверткой. Если развертку рассматривать относительно тех же параметров u, v , то ее параметризация

$$\vec{R}(u, v) = \vec{P}(u) + v\vec{L}(u) \quad (5)$$

определяется векторами $\vec{\rho}'(u)$, $\vec{\rho}''(u)$, $\vec{L}(u)$ и $\vec{L}'(u)$.

Если поверхность неразвертывающаяся, то такое отображение невозможно. Так, для линейчатой поверхности можно взять отображение (5), используя вместо вектора $\vec{L}'(u)$ его проекцию $\vec{L}'_T(u)$ на касательную плоскость к поверхности. В этом случае для получения требуемого куска поверхности путем изгибания придется осуществить деформации растяжения. Знание первых квадратичных форм $I(\vec{\tau})$ ($\vec{\tau}$ — единичный касательный вектор к поверхности) поверхности и ее образа позволяет вычислить эти деформации, а именно: $\kappa(u, v, \vec{\tau}) = \sqrt{I_T(\vec{\tau})} - \sqrt{I_R(\vec{\tau})}$. При малых $v|\vec{L}'_T(u)|$ ($\vec{L}'_T(u)$ — проекция $\vec{L}'(u)$ на нормаль к поверхности) κ есть малая порядка $O(v^2(\vec{L}'_T)^2/(\vec{L}')^2)$.

Поверхности более сложной формы будем аппроксимировать линейчатой поверхностью с поправкой: $\vec{R}(u, v) = \vec{\rho}(u) + v\vec{L}(u) + \phi(v)\vec{L}_1(u)$, где $\vec{L}_1(u) \perp \vec{L}(u)$, по-прежнему считая $|\vec{L}'_T(u)|$ малой величиной. В отображении (5) справа добавляем вектор-функцию $\phi(v)\vec{L}_1(u)$, которая будет характеризовать отличие отображения от того, которое имеет место для линейчатой поверхности. Возможный вариант — это $\vec{L}_1(u) \perp \vec{L}(u)$, $|\vec{L}_1(u)| = |\vec{L}_{1T}(u)|$, где $\vec{L}_{1T}$ — проекция вектора $\vec{L}_1(u)$ на касательную плоскость к линейчатой поверхности. При $|\vec{L}_1(u)| = O((\vec{L}'_T)^2/(\vec{L}')^2)$ деформации (теперь уже и сжатия и растяжения) остаются малыми порядка $O(v^2(\vec{L}'_T)^2/(\vec{L}')^2)$. Хотя порядок деформаций не меняется, но их абсолютные значения за счет введения члена $\phi(v)\vec{L}_1(u)$ удастся сделать меньше.

5. Численное моделирование необходимо для визуализации геометрических объектов в устройствах машинной графики. В [7] Леусом В.А. была рассмотрена задача визуализации штриховых изображений трехмерных объектов. Алгоритм предусматривает построение желаемой проекции (кадра) с удалением невидимых линий и обрисовкой очертания тела. Вывод информации осуществлялся на графопостро-

тель и электронно-лучевую трубку. Подпоследовательность кадров, соответствующая перемещению тела в пространстве, фотографировалась с экрана и фиксировалась в виде кинограммы.

В [8] в развитие этих идей был предложен алгоритм численного синтеза тоновых изображений трехмерных объектов. Вывод изображений осуществлялся на телеэкране, растр которого содержал порядка 10^6 элементов разложений. При визуализации сцены средней сложности вычисление значений яркости и цвета одного элемента растра требует около 10^3 арифметических операций. Для получения кинограмм динамических процессов в телевизионном стандарте частоты кадров ЭВМ должна выполнять 10^{11} операций в секунду. Быстродействие такого порядка может быть достигнуто только на основе параллельной организации вычислений.

§ 3. Расчет траектории инструмента при воспроизведении сложных поверхностей на станках с ЧПУ

Подготовка управляющей программы для станков с ЧПУ выполняется в два этапа. На первом этапе рассчитывается траектория движения инструмента относительно детали. На втором этапе перемещения инструмента в пространстве координат детали преобразуются в перемещение рабочих органов станка, т.е. определяется траектория в пространстве координат станка. Затем эта траектория приближается с заданной точностью функциональной зависимостью, которую реализует конкретное устройство программного управления станком. Чаще всего это кусочно-линейная зависимость. Остановимся на некоторых моментах первого из указанных этапов.

I. Геометрические аспекты формообразования фрезерованием. Движение фрезы в процессе воспроизведения детали складывается из вращения фрезы вокруг ее оси Q и перемещения самой оси в пространстве. Перемещение оси всегда можно представить как движение какой-либо ее точки P и поворот направляющего вектора $\vec{q}$ оси Q около этой точки. При вращении фрезы вокруг неподвижной оси Q режущая кромка ее зуба образует поверхность вращения F , которую в дальнейшем будем называть рабочей поверхностью фрезы.

Будем исходить из следующей гипотезы: в процессе обработки в каждый момент времени рабочая поверхность фрезы своей внутренней точкой соприкасается с поверхностью детали так, что точка сопри-

косновения является единственной общей точкой детали и фрезы. В частном случае возможно соприкосновение вдоль целого отрезка обрабатываемой поверхности F . На основании этой гипотезы каждой точке $\vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in \Omega$, обрабатываемой поверхности G можно сопоставить положение фрезы, определив тем самым в области Ω вектор-функции $\vec{p} = \vec{p}(u, v)$ и $\vec{q} = \vec{q}(u, v)$. Они задают положение точки P (в дальнейшем ее будем называть расчетной точкой фрезы) и направление оси Q фрезы. Установленное таким образом соответствие назовем связью инструмента с деталью.

Рассмотрим некоторое положение фрезы $\{\vec{p}(u^*, v^*), \vec{q}(u^*, v^*)\}$, определенное заданной связью с деталью. Ее рабочая поверхность в окрестности точки соприкосновения $\vec{r}(u^*, v^*)$ аппроксимирует поверхность G детали. Обозначим через $d_\epsilon(u^*, v^*)$ максимально возможный диаметр круга с центром в точке (u^*, v^*) области Ω , в пределах которого погрешность аппроксимации не превосходит значения $\epsilon > 0$. Траектория движения фрезы с учетом заданной связи с деталью записывается в виде соотношений: $\vec{p}(t) = \vec{p}(u(t), v(t))$, $\vec{q}(t) = \vec{q}(u(t), v(t))$, $t \in [0, T]$, которые определяют положение фрезы в пространстве

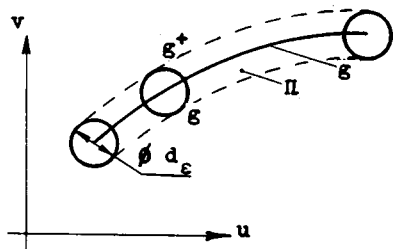


Рис. 2

в зависимости от времени t . Функции $u = u(t)$ и $v = v(t)$ задают некоторую линию g в области Ω и соответственно кривую $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$ на поверхности детали, являющуюся геометрическим местом точек соприкосновения с рабочей поверхностью фрезы. Из каждой точки линии g как из центра проведем окружность диаметром $d_\epsilon(u(t), v(t))$. Огибающие семейства этих окружностей g^- и g^+ ограничивают некоторую полосу в области Ω , содержащую линию g . Из определения величины d_ϵ следует, что движением фрезы по траектории, отвечающей линии g , воспроизводится полоса поверхности G с точностью ϵ , соответствующая полосе Π . Такие полосы на поверхности обычно называют строками. Существенным параметром обработки является ширина строки. Полосу будем называть полосой воспроизведения (рис. 1).

2. Расчет траектории фрезы. По известной поверхности детали $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in \Omega$, и заданной геометрии фрезы в рамках

конкретных соглашений относительно связи фрезы с деталью требуется рассчитать перемещения инструмента, обеспечивающие воспроизведение поверхности с указанным допуском ϵ . Иными словами, в области Ω требуется определить такую линию (или совокупность линий), полоса воспроизведения которой полностью покрывала бы Ω .

Для прямоугольных областей с этой целью удобно использовать координатные линии $u = \text{const}$ или $v = \text{const}$. Шаг между двумя соседними линиями должен выбираться с учетом ширины их полос воспроизведения.

В случае сложной области Ω ее следует предварительно отобразить на прямоугольник в плоскости параметров $\tilde{u}, \tilde{v}$ и траекторию фрезы связать с координатными линиями $\tilde{u} = \text{const}$ или $\tilde{v} = \text{const}$.

3. Ширина строки зависит от формы инструмента, характера поверхности в окрестности строки, от вида связи инструмента с деталью и величины ϵ . Эта величина характеризует "поперечную шероховатость" обработанной поверхности. В инженерной практике ее принято называть высотой гребешка.

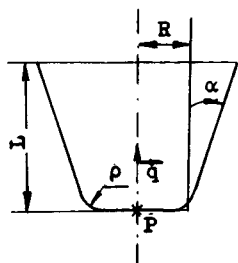


Рис. 2

Рассмотрим алгоритм расчета допустимой ширины полосы воспроизведения δ_ϵ для некоторой точки траектории в предположении, что фреза соприкасается с поверхностью детали своей торовой частью (рис.2). Пусть $\vec{r}^* = \vec{r}(u^*, v^*)$ - некоторая точка поверхности детали и $\vec{\tau}$ - касательный вектор к поверхности в этой точке в направлении движения инструмента. Главные кривизны торовой части фрезы в точке касания с поверхностью детали определяются формулами

$$k_1 = 1/p, \quad k_2 = \frac{\sin \varphi}{(R-\rho) + p \sin \varphi},$$

где R, ρ - параметры фрезы (см.рис.2), $\sin \varphi = |\vec{q}(u^*, v^*) \times \vec{n}(u^*, v^*)|$, $\vec{n}$ - орт нормали к поверхности детали. Нормальная кривизна k_F в направлении $\vec{n}$, перпендикулярном вектору $\vec{\tau}$, находится по формуле Эйлера: $k_F = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi$, где $\sin \varphi = (\vec{q}(u^*, v^*) \cdot \vec{n}(u^*, v^*))$, $\vec{\tau}(u^*, v^*)$. Обозначим через k_G нормальную кривизну поверхности детали в точке $\vec{r}^*$ в том же направлении $\vec{n}$. Тогда расстояние ϵ между точками двух соприкасающихся окружностей с радиусами $R, r = |1/k_F|$

и $R_2 = |1/k_G|$ в окрестности точки соприкосновения приближенно выражается формулой $s \approx 0,5\epsilon^2 |k_F - k_G|$. Здесь ϵ есть расстояние по касательной к окружностям, отсчитываемое от точки их соприкосновения, и эту величину можно взять в качестве оценки ширины строки в точке $\vec{r}^*$. Из условия $s \leq \epsilon$ вытекает, что $\epsilon \leq \sqrt{2\epsilon/|k_F - k_G|}$.

Представим вектор $e\vec{i}$ в виде ряда $e\vec{i} = \vec{r}_u \Delta u^* + \vec{r}_v \Delta v^* + \dots$. Ограничиваясь первыми двумя членами, получим:

$$\Delta u^* = e \frac{|\vec{u} \times \vec{r}_v|}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}, \quad \Delta v^* = e \frac{|\vec{u} \times \vec{r}_u|}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}.$$

Тогда, учитывая, что $d_e(u^*, v^*) = ((\Delta u^*)^2 + (\Delta v^*)^2)^{1/2}$, окончательно для ширины полосы воспроизведения в точке $\vec{r}^*$ получаем следующее выражение:

$$d_e(u^*, v^*) \approx 2\sqrt{2\epsilon/|k_F - k_G|} \frac{(|\vec{u} \times \vec{r}_v|^2 + |\vec{u} \times \vec{r}_u|^2)^{1/2}}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}.$$

Для упрощения расчета траектории ширину полосы воспроизведения на одной строке следует выбирать постоянной и равной минимальному значению d_e на множестве вычисляемых точек строки.

4. Связь инструмента с деталью рассмотрим на примере двух наиболее распространенных вариантов. Принципиальное отличие между ними состоит в том, что в формообразовании участвуют разные части рабочей поверхности фрезы.

а) Фреза своей торовой частью соприкасается с поверхностью, отстоящей от поверхности детали $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ на величину припуска δ . Связь с деталью в этом случае имеет вид: $\vec{p}(u, v) = \vec{r}(u, v) + (\rho + \delta)\vec{n}(u, v) + (R - \rho)\vec{m}(u, v) - \rho\vec{q}(u, v)$, $\vec{q} = \vec{q}(u, v)$, где $\vec{m} = \langle \vec{q} \times \vec{n} \times \vec{q} \rangle$ — орт смещения оси (здесь $\langle \rangle$ обозначает операцию нормирования вектора). Геометрический смысл приведенной связи ясен из рис.3. Если $\vec{q}(u, v) = \vec{q}_0 = \text{const}$, то фрезерование принято называть трехкоординатным. В противном случае говорят о многокоординатной обработке.

Вид зависимости $\vec{q} = \vec{q}(u, v)$ при многокоординатном фрезеровании обычно определяется технологическими условиями обработки и кинематикой станка. Так, например, это может быть кусочно-постоянная вектор-функция, когда число одновременно управляемых координат не обеспечивает непрерывного изменения направления оси инст-

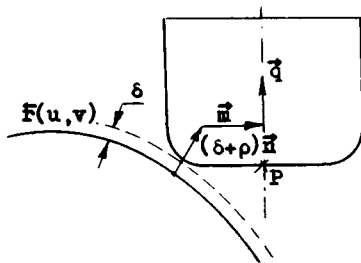


Рис.3

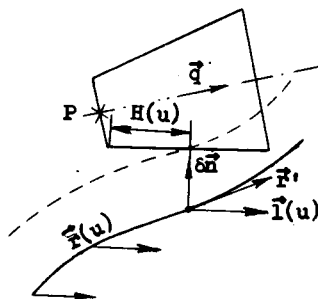


Рис.4

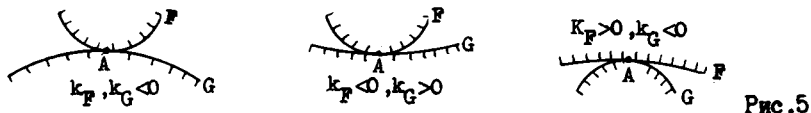
румента. С технологической точки зрения наилучшие условия обработки достигаются в случае, когда эта зависимость имеет вид: $\vec{q}(u, v) = \cos \beta \vec{n}(u, v) + \sin \beta \vec{r}(u, v)$, т.е. ось фрезы наклонена в сторону движения под углом $\beta > 0$ (угол опережения) к нормали поверхности. При небольших углах опережения достигается ширина строки, близкая к диаметру фрезы.

б) Траектория фрезы определяется кривой $\vec{r} = \vec{r}(u)$, $u \in [a, b]$, вектором $\vec{l}(u)$ и значением $H(u)$, заданными в каждой точке этой кривой. При движении фреза своей периферийной частью соприкасается с кривой $\vec{r} = \vec{r}(u) + \delta \vec{n}(u)$ ($\vec{n}(u) = \vec{q}(u) \times \vec{r}'(u)$). Прямая образующая рабочей поверхности фрезы сонаправлена с вектором $\vec{l}(u)$. Точка соприкосновения отстоит от плоскости торца на расстоянии $H(u)$, отсчитываемом вдоль образующей (рис.4). Связь с деталью в этом случае определяется соотношением: $\vec{p}(u) = \vec{r}(u) + (\delta + R \cos \alpha) \vec{n}(u) = (H(u) - R \sin \alpha) \vec{l}(u)$, $\vec{q} = \sin \alpha \vec{n}(u) + \cos \alpha \vec{l}(u)$. При $\alpha = 0$ и $\delta = -R$ эта зависимость приобретает вид: $\vec{p}(u) = \vec{r}(u) - H(u) \vec{l}(u)$, $\vec{q} = \vec{l}(u)$, т.е. ось инструмента в каждый момент времени проходит через точку кривой $\vec{r}(u)$, совпадая по направлению с вектором $\vec{l}(u)$. При $H(u) = H_0 = \text{const}$ точка пересечения торца с конической образующей отслеживает кривую $\vec{r} = \vec{r}(u) + H_0 \vec{l}(u)$.

Приведем выражение для $H(u)$ в случае, когда точка P во время движения фрезы остается в плоскости, определяемой векторным уравнением $(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{B}) = 0$ (запись $(\vec{A}, \vec{C})$ обозначает скалярное произведение векторов $\vec{A}$ и $\vec{C}$):

$$H(u) = (\vec{r}(u) + (\delta + R \cos \alpha) \vec{n}(u) + R \sin \alpha \vec{l}(u), \vec{B}) / (\vec{l}, \vec{B}).$$

5. Определение допустимых параметров фрезы. Принятая гипотеза о характере связи инструмента с деталью накладывает определенные ограничения на форму и размеры фрезы. Им можно дать следующую



геометрическую интерпретацию. Рассмотрим произвольное нормальное сечение в точке соприкосновения r^* . Возможны три варианта допустимых соотношений между нормальными кривизнами k_G и k_F поверхностей G и F в этом сечении (рис.5). Математически они записываются в виде: $k_F < -k_G$. Это условие назовем условием локальной совместимости фрезы с поверхностью детали. Обозначим через K_G и K_F максимальные нормальные кривизны поверхностей G и F . Параметры фрезы следует выбирать такими, чтобы выполнялось следующее соотношение: $K_F < -K_G$.

§4. Автоматизированная система геометрических расчетов АСТРА

Все расчеты, выполняемые в процессе создания объекта, базируются на геометрической информации об изделии. На этапе проектирования исходные данные преобразуются в геометрические образы его отдельных агрегатов и синтезируется геометрический образ самого изделия - математическая модель объекта. В дальнейшем математическая модель служит и для предварительной оценки принятого решения (комплекс физико-технических расчетов), и при технологической подготовке производства, и, наконец, в процессе контроля изготовленных деталей и узлов. Более того, геометрия объекта соединяет все эти этапы этого процесса.

В Институте математики СО АН СССР разработана автоматизированная система геометрических расчетов АСТРА, предназначенная для выполнения расчетов при создании изделий со сложными пространственными обводами. Система универсальна в том смысле, что ее можно адаптировать к различным предметным областям. В связи с этим программное обеспечение системы АСТРА многоуровневое. Первый уровень - базовый - не зависит от конкретной области применения. Он включает системные блоки, набор обслуживающих программ, пакет стандартных модулей. Второй и третий уровни - проблемные - создаются в процессе адаптации системы к конкретной предметной области. Второй уровень объединяет программы, наиболее общие для данной обла-

сти. К ним относятся программные средства математического моделирования ее объектов и программы, реализующие операции над ними. Третий уровень обеспечивает решение задач предметной области в конкретных условиях КБ или предприятия. Этот уровень наиболее подвержен изменению.

Разработка программы проблемных уровней начинается после того, как очерчена область автоматизации и определены перспективы ее развития, поставлены задачи, подлежащие решению в рамках системы. Проблемные программы собираются из стандартных модулей базового уровня.

В результате адаптации создается проблемно-ориентированная версия системы АСТРА. Такой подход к созданию системы обеспечивает, с одной стороны, высокую степень автоматизации проводимых расчетов, с другой - преемственность и возможность кооперации в развитии ее программного обеспечения. Из проблемно-ориентированных версий системы АСТРА, разработанных в Институте математики и внедренных в производство, можно отметить следующие:

САМОЛЕТ. Эта версия предназначена для автоматизации расчетно-технологических работ при подготовке производства в авиастроении [5].

ЛОПАСТЬ. Автоматизация проектирования и подготовки производства лопастей гидротурбины [3-5].

КОЛЕСО. Автоматизация проектирования и изготовления на станках с ЧПУ колес циркуляционных насосов [5,12,14].

Л и т е р а т у р а

1. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980. - 352 с.

2. Фрезерование шаблонов на станках с ЧПУ и система автоматического программирования обработки теоретических контуров с помощью ЭВМ. Т.1,П. РТМ-1492-74/ Отв.ред.Л.И.Немчинов. - М., 1977.

3. Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 68). /Науч.ред. Ю.С.Завьялов. - Новосибирск, 1976. - 120 с.

4. Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 72) /Науч.ред. Ю.С.Завьялов, В.Л.Мирошниченко. - Новосибирск, 1977. - 140 с.

5. Сплайн-функции в инженерной геометрии (Вычислительные системы, вып.86)/Науч.ред.Ю.С.Завьялов, В.А.Леус. - Новосибирск, 1981. - 160 с.

6. ЛЕУС В.А. Гладкая окружностная интерполяция кривых. - В кн.: Вычислительные системы, вып.38. Новосибирск, 1970, с.102-127.

7. ЛЕУС В.А. Перспективное изображение трехмерных непрозрачных объектов. - В кн.: Вычислительные системы, вып.50. Новосибирск, 1972, с.86-99.

8. МУЖУТОВ А.В., ЛЕУС В.А., ПОЛЕЩУК Н.С. Численный синтез тонового изображения освещенной поверхности и растровая визуализация. - Автометрия, 1978, №6, с.59-64.

9. LEUS V.A., ZAVYALOV Yu.S., YARACHMEDOVA S.D. FRANS - programming system for machining center. - In: Advances in computer-aided manufacture. Proceedings of the 3rd Intern. IFIP/IFAC Confer, PROLAMAT-76. - NHPC, Amsterdam-New York- Oxford, 1977, p. 73-80.

10. СКОРОСПЕЛОВ В.А. Кубическая сплайн-интерполяция как средство приближения пространственных кривых. - В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып.75). Новосибирск, 1978, с.36-44.

11. ПАВЛОВ Н.Н. К вопросу об аппроксимации пространственных кривых кубическими параметрическими сплайнами. - Там же, с.45-49.

12. ПАВЛОВ Н.Н., СКОРОСПЕЛОВ В.А. Автоматизация расчета управляющих программ для обработки рабочих колес циркуляционных насосов на пятикоординатном станке с ЧПУ. - В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып.81). Новосибирск, 1979, с.63-73.

13. ВЕРШИНИН В.В. О сглаживающих сплайнах и их производных. - Новосибирск. В.и., 1980. - 20 с. (Препринт/Институт математики СО АН СССР).

14. Adaptive system ASTRA for geometric information processing /Zavjalov Yu.S., Skorospelov V.A., Gamidov V.M. et al. - L., 1982. - 7 с. (Preprint/PROLAMAT'82).

15. ВЕРШИНИН В.В., ПАВЛОВ Н.Н. О приближении производных с помощью сглаживающих сплайнов. - В кн.: Методы сплайн-функций в численном анализе (Вычислительные системы, вып.98). Новосибирск, 1983, с.83-91.

16. ПАВЛОВ Н.Н. Сглаживание кубическими сплайнами и метод штрафов. - Там же, с.92-102.

17. ФОКС А., ПРАТТ М. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве. - М.: Мир, 1982. - 304 с.

18. ВАСИЛЕНКО В.А. Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. - Новосибирск: Наука, 1983. - 294 с.

Поступила в ред.-изд.отд.

12 декабря 1983 года