ПРОБЛЕМЫ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ
(Вычислительные системы)
1983 год Выпуск 100

УДК 519.651

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ И АППРОКСИМАЦИИ СПЛАЙНАМИ

В.Л.Мирошниченко

Методы,основанные на сплайн-функциях (сплайнах), заняли прочное место среди наиболее мощных средств вычислительной математики. Если еще в начале 70-х годов слово "сплайн" звучало подчас экзотически даже для многих математиков, то в настоящее время оно стало общепринятым не только среди специалистов по теории приближения и вычислительной математики, но и среди широкого круга инженеров, связанных с решением прикладных задач на ЭВМ. Популярность сплайнов объясняется в основном двумя причинами. Во-первых, сплайны представляют собой чрезвычайно мощное и гибкое средство решения разнообразных задач приближения функций. А эти задачи, помимо их самостоятельного значения, лежат в основе многих методов вычислительной математики. Во-вторых, алгоритмы, построенные с помощью сплайнов, легко и эффективно реализуются на ЭВМ. Причем при переходе к многомерным задачам такие алгоритмы, как правило, естественным образом распараллеливаются, что предопределяет их применение и в будущем, когда на смену современным ЭВМ придут многопроцессорные машины с высокой степенью параллелизма в работе.

Уместно напомнить, что сплайны возникли и получили развитие в ответ на запросы практики, в то время, когда выяснилась несостоятельность классического аппарата приближения алгебраическими и тригонометрическими полиномами при решении многих важнейших прикладных задач. Сплайны оправдали возлагавшиеся на них надежды.

Они и сейчас находятся на переднем крае приложений математики. Их развитие продолжается, а возможности далеко не исчерпаны. Все это не сулит спокойной жизни, по крайней мере в ближайшем будущем, специалистам, занимающимся сплайнами.

По теории и приложениям сплайнов опубликовано огромное число работ. Их количество продолжает стремительно нарастать. Уже появилось более десятка монографий, целиком посвященных сплайнам. Некоторые из них приведены в списке литературы в конце данной статьи. Своеобразным показателем прочности позиций, занимаемых сплайнами, является то, что практически каждый современный учебник по вычислительной математике содержит сведения о сплайнах.

В Институте математики СО АН СССР работы по теории и приложениям сплайнов начаты в середине 60-х годов и продолжаются под руководством Ю.С.Завьялова. Многие из полученных результатов опубликованы в сборниках "Вычислительные системы" и монографии [I], в которой рассмотрены вопросы, связанные с применением сплайнов в численном анализе. В настоящей работе излагается ряд результатов, не публиковавшихся ранее и дополняющих [I]. Попутно формулируется ряд задач, решение которых представляется важным и интересным.

В §I обсуждаются три подхода к введению понятия сплайна. В §2 рассматриваются вопросы, связанные с применением полиномиальных сплайнов высоких степеней. Следующий §3 посвящен локальной аппроксимации сплайнами.

Мы не ставили своей целью составление подробной библиографии по затронутым вопросам. Каждая из приведенных в списке литературы монографий снабжена достаточно обширной библиографией. В §4 дан краткий обзор результатов, полученных сотрудниками и аспирантами Института математики СО АН СССР и опубликованных в сборнике "Вычислительные системы" в 1975-1983 гг. При этом упоминаются только работы, касающиеся применения сплайнов в численном анализе. Обзор работ, опубликованных до 1975 г., имеется в [10].

§I. Что такое сплайн?

В современной теории сплайнов можно выделить, на наш взгляд, три основных подхода к введению понятия сплайна. Каждый из них имеет свои достоинства и свои недостатки. Вообще говоря, сплайн, определенный с помощью одного из рассмотренных ниже способов, не всегда можно ввести другими двумя способами, т.е. множества сплайнов, определяемые этими способами, не совпадают. Однако во многих практически важных случаях одну и ту же конструкцию сплайна можно получить всеми тремя способами, что позволяет наиболее эффективно использовать достоинства каждого из них. В частности, это характерно для полиномиальных сплайнов одной переменной. Наиболее существенные различия между различными способами определения сплайна возникают при переходе к сплайнам многих переменных.

I. Пусть Ω – замкнутая область в n-мерном евклидовом пространстве R^n. Разобьем ее на подобласти Ω_i так, чтобы $\bigcup_i \Omega_i = \Omega$ и, кроме того, чтобы любые две из этих подобластей не имели общих внутренних точек. Определим на Ω множество Φ функций $\varphi(x)$. Функция $S(x)$, $x \in \Omega$, называется сплайном, если

а) $S(x) = \varphi_i(x) \in \Phi$ при $x \in \Omega_i$,

б) $S(x) \in C^k[\Omega]$,

где $C^k[\Omega]$ – класс функций с непрерывными производными k-го порядка.

Так как ЭВМ может выполнять только четыре арифметических операции, то обычно в качестве Φ выбирают множество полиномов некоторой степени (в этом случае сплайн называется полиномиальным, соответствующей степени) или множество дробно-рациональных функций (рациональный сплайн). Как правило, функции $\varphi_i(x)$ берутся бесконечно гладкими на Ω_i, и поэтому требование "б" определяет условия стыковки функции $\varphi_i(x)$ и ее производных до k-го порядка с другими функциями $\varphi_k(x)$, определенными на подобластях Ω_k, соседних с Ω_i, при переходе через границу области Ω_i. Таким образом, условие "б" характеризует дифференциальные свойства сплайна $S(x)$. В этом случае сплайн $S(x)$ называют сплайном класса C^k.

В простейшем случае полиномиальных сплайнов одной переменной Ω – отрезок $[a,b]$, $\Omega_i = [x_i, x_{i+1}]$, где $x_i \in \Delta$: $a = x_0 < x_1 < \ldots$ $\ldots < x_N = b$; Φ – множество полиномов степени не выше n и $S(x) \in C^k[a,b]$, $0 \le k \le n$. Для двух переменных Ω – обычно прямоугольник или многоугольник, в качестве Ω_i чаще всего рассматривают прямоугольники или треугольники.

Как было уже сказано, сплайны - это прежде всего средство приближения функций. Наиболее простым способом приближения функций является интерполяция. Пусть в точках $x_j \in \Omega$, $j = 0,\dots,M$, известны значения $f_j = f(x_j)$ функции $f(x)$. Сплайн $S(x)$ называется интерполяционным, если выполнены условия

в) $S(x_j) = f_j$, $j = 0,\dots,M$.

Параметры интерполяционного сплайна (например, коэффициенты составляющих его полиномов) определяются из системы уравнений, вытекающих из условий "б" и "в". Как правило, это системы линейных или нелинейных алгебраических уравнений. В связи с этим этот подход к определению сплайнов можно назвать алгебраическим. Изучение вопросов существования, единственности и выяснение степени близости $S(x)$ к $f(x)$ сводится, естественно, к анализу свойств систем уравнений. Алгебраический подход прекрасно зарекомендовал себя при исследовании полиномиальных сплайнов невысоких степеней (до четвертой). Он позволил построить эффективные численные алгоритмы и получить глубокие результаты о точности приближения сплайнами. Однако он наталкивается на серьезные затруднения при переходе к сплайнам степени выше третьей, и особенно большие трудности возникают в многомерном случае. Здесь непросто получить даже системы для вычисления параметров сплайна, не говоря уже об их исследовании.

2. Пусть задана совокупность линейно-независимых на Ω финитных функций $B_i(x)$, $i = 0,\dots,N$, с конечными носителями Ω_i, причем $\bigcup_i \Omega_i \supset \Omega$. Сплайном называется функция

$$S(x) = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i B_i(x), \qquad x \in \Omega, \tag{1}$$

где α_i - числовые коэффициенты. Таким образом, сплайн определяется как элемент конечномерного пространства с базисом из функций $B_i(x)$. Дифференциальные свойства сплайна и его структура вполне определяются свойствами базисных функций $B_i(x)$. Коэффициенты α_i вычисляются из условий интерполяции или других требований. Составление соответствующих систем уравнений не вызывает существенных затруднений, и в этом преимущество этого подхода в сравнении с алгебраическим. Однако исследование вопросов точности приближения здесь также обычно затруднено. Отметим, что описанный подход весьма близок к алгебраическому. Во многих случаях в множестве сплайнов, введенных с помощью алгебраического подхода, удается построить базис из функций с конечными носителями и тем самым записать сплайн в виде (I).

Главным достижением описанного подхода к определению сплайна является создание эффективного метода приближения функций, так называемой локальной аппроксимации сплайнами, о которой, в частности, пойдет речь в §3.

3. Пусть X, Y, Z - гильбертовы пространства и $T: X \to Y$, $A: X \to Z$ - линейные непрерывные операторы. Для заданного элемента $z \in Z$ будем обозначать через $A^{-1}z$ множество элементов $x \in X$ таких, что $Ax = z$. Элемент $S \in X$ называется сплайном (интерполяционным), если

$$\| TS \|_Y = \min_{x \in A^{-1}z} \| Tx \|_Y ,$$

т.е. сплайн определяется как элемент гильбертова пространства, минимизирующий некоторый функционал. Такой подход к определению сплайна можно назвать вариационным. Используя аппарат теории линейных операторов в гильбертовых пространствах, он позволяет сравнительно просто получать общие результаты об условиях существования и единственности сплайнов, а также оценки точности приближения [2, 4–6]. Впрочем, такие оценки обычно довольно грубы, и, кроме того, далеко не всякий сплайн, введенный с помощью первых двух способов, может быть истолкован с позиций вариационного подхода.

§2. Полиномиальные сплайны нечетной степени

Применение полиномиальных сплайнов высокой степени для интерполяции достаточно гладких функций позволяет получить хорошую точность приближения функций и их производных высокого порядка. Однако при построении таких сплайнов неизбежно возникает проблема выбора краевых условий. Ниже дается рекомендации по этому вопросу.

Пусть $S_{2n+1}(x)$ - полиномиальный сплайн степени $2n+1$ класса $C^{2n}[a,b]$, интерполирующий значения $f_i = f(x_i)$, $i = 0,1,\dots,N$, известные в узлах сетки Δ: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$, т.е. $S_{2n+1}(x)$

является полиномом степени не выше $2n+1$ на каждом из промежутков $[x_i, x_{i+1}]$, $S_{2n+1}(x) \in C^{2n}[a,b]$ и

$$S_{2n+1}(x_i) = f_i, \quad i = 0,1,\dots,N \ . \tag{2}$$

Для однозначного определения сплайна $S_{2n+1}(x)$ нужно задать краевые условия, в качестве которых часто рассматриваются условия следующего вида:

$$S^{(r)}_{2n+1}(x_k) = f^{(r)}(x_k), \ k = 0, N; \quad r = 1, 2, \dots, n \ . \tag{3}$$

При этом требуется знание на концах промежутка $[a,b]$ всех производных функции $f(x)$ до порядка n включительно. Получение такой информации затруднительно даже для небольших значений n.

Откажемся от сосредоточения краевых условий в концах промежутка $[a,b]$. Оказывается, при этом можно сформулировать краевые условия, содержащие только значения первой производной функции $f(x)$. А именно вместо (3) можно потребовать выполнения условий

$$S'_{2n+1}(x_k) = f'(x_k), \ k = 0, 1, \dots, n-1; \ k = N-n+1, N-n+2, \dots, N \tag{4}$$

(предполагается $N \ge 2n-1$). Такие условия гораздо удобнее, чем (3).

Однако в практических задачах обычно бывают известны только значения функции f_i, что не позволяет воспользоваться и условиями (4). Естественно попытаться заменить входящие в (4) значения производных, например, их конечно-разностными аппроксимациями. При этом, чтобы сохранить точность приближения сплайном, необходимо использовать аппроксимации высокого порядка точности, что трудно обеспечить, особенно на неравномерной сетке. Для кубических сплайнов ($n = 1$) в этой ситуации рекомендуется применять [I] так называемые краевые условия типа IУ: $S'''(x_k+0) = S'''(x_k-0)$, $k = 1, N-1$. Естественным обобщением их на случай сплайнов произвольной нечетной степени являются краевые условия

$$S^{(2n+1)}_{2n+1}(x_k+0) = S^{(2n+1)}_{2n+1}(x_k-0), \tag{5}$$
$$k = 1, 2, \dots, n; \ k = N-n, N-n+1, \dots, N-1 .$$

Смысл условий (5) заключается в том, что в указанных точках x_k требуется непрерывность не только производной порядка $2n$, как это предполагается в определении сплайна, но и $(2n+1)$-й производной. В результате сплайн $S_{2n+1}(x)$ будет полиномом степени $2n+1$ на каждом из промежутков $[x_0, x_{n+1}]$, $[x_{N-n-1}, x_N]$.

Отметим, что существование и единственность сплайна, удовлетворяющего условиям интерполяции (2) и краевым условиям (5), вытекает из общей теоремы о существовании и единственности полиномиальных интерполяционных сплайнов [I,8].

Численная реализация краевых условий (5) не вызывает каких-либо затруднений. На самом деле она даже проще, чем реализация условий (3) или (4).

Возможны различные комбинации условий (3)-(5). Например, если требуется построить сплайн пятой степени и известно значение $f'(x_0)$, то можно взять краевые условия на левом конце промежутка $[a,b]$ в виде

$$S_5'(x_0) = f'(x_0), \quad S_5^{(5)}(x_1+0) = S_5^{(5)}(x_1-0) .$$

Второе из этих соотношений компенсирует отсутствие значения $f'(x_1)$ или $f''(x_0)$. Кроме того, на разных концах промежутка $[a,b]$ могут применяться разные типы условий, например, на левом конце условия (3), а на правом -(5) и т.д.

Влияние граничных условий вида (5) на точность приближения подробно проанализировано в [42,46] для $n=1$ (кубический сплайн) на произвольной неравномерной сетке Δ. Показано, что их использование не приводит к снижению порядка в оценках погрешности приближения по сравнению со случаем задания точных значений производных на концах промежутка $[a,b]$. Немного увеличиваются только постоянные в оценках. Аналогичные результаты можно получить и для сплайнов более высокой степени, но, вообще говоря, только на равномерной сетке. Что касается случая неравномерной сетки, то дело здесь не в специфике граничных условий (5), а в отсутствии техники получения оценок для сплайнов высоких степеней. Те результаты, которые удается вывести, используя вариационные свойства сплайнов [2], не позволяют указать даже точный порядок приближения.

Разработка техники получения оценок погрешности приближения интерполяционными сплайнами высоких степеней, столь же мощной, как в случае кубических сплайнов, является одной из актуальных проблем развития теории сплайнов.

§3. Локальная аппроксимация сплайнами

В последнее время широкое распространение получили методы приближения функций, использующие локальную аппроксимацию сплайнами [I,5]. Кратко суть локальной аппроксимации состоит в следующем.

Пусть, как в §2, на сетке Δ известны значения f_i, $i=0,\ldots,N$. Обратимся к представлению сплайна в виде линейной комбинации (I) базисных функций (сплайнов). При построении интерполяционного сплайна коэффициенты α_i находятся путем решения системы линейных уравнений, и, вообще говоря, каждый из них зависит от всей совокупности исходных данных f_i. Локальная аппроксимация сплайнами отличается от интерполяции тем, что коэффициенты α_i в (I) определяются по явным формулам, причем (и это, пожалуй, основной признак локальной аппроксимации) для вычисления любого из них используется только несколько значений f_i.

На основе локальной аппроксимации сплайнами можно решать самые разнообразные задачи. В частности, таким образом удается построить сплайны, практически не отличающиеся по точности приближения от интерполяционных, но допускающих существенно более простую численную реализацию. В случае полиномиальных сплайнов, которые чаще всего используются на практике, преимущества локальной аппроксимации становятся особенно ощутимыми при переходе к многомерным задачам и сплайнам высоких степеней.

На примере локальной аппроксимации кубическими сплайнами класса C^2 мы обсудим некоторые вопросы, возникающие при практическом построении одномерных и двумерных аппроксимаций, а также рассмотрим один новый тип локальной аппроксимации.

Расширим сетку Δ, пополнив ее узлами $x_{-3}<x_{-2}<x_{-1}<x_0$, $x_{N+3}>x_{N+2}>x_{N+1}>x_N$, и введем в рассмотрение кубические нормализованные B-сплайны $B_i(x)$, $i=-1,0,\ldots,N+1$ [I,5,8,9]. Каждая из функций $B_i(x)$ представляет собой кубический сплайн класса C^2, причем $B_i(x)>0$ при $x\in(x_{i-2},x_{i+2})$, $B_i(x)\equiv 0$ при $x\notin(x_{i-2},x_{i+2})$ и $\sum_{i=-1}^{N+1} B_i(x)\equiv 1$. Любой кубический сплайн $S(x)$ класса C^2 может быть представлен в виде разложения по B-сплайнам

$$S(x) = \sum_{i=-1}^{N+1}\alpha_i B_i(x). \qquad (6)$$

В соответствии с [I, с.250; 35], положив здесь

$$\alpha_i = f_i + \frac{1}{3(h_{i-1}+h_i)}\left[h_i^2 \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} - h_{i-1}^2 \frac{f_{i+1}-f_i}{h_i} \right], \tag{7}$$

$$h_j = x_{j+1} - x_j,$$

получим локальную аппроксимацию, точную на полиномах третьей степени, причем на любой неравномерной сетке $|S(x) - f(x)| = O(H^4)$, где $H = \max\limits_i h_i$, $f(x) \in C^4[a,b]$.

Однако если значения $f_k = f(x_k)$, $k = -2,-1,N+1,N+2$, неизвестны (как правило, именно эта ситуация чаще всего встречается в практических задачах), то формулами (7) нельзя воспользоваться для вычисления коэффициентов $\alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_N, \alpha_{N+1}$. Один из способов преодоления этих затруднений состоит в следующем. Потребуем, чтобы сплайн $S(x)$ интерполировал значения f_j, $j=0,1,N-1,N$, т.е.

$$S(x_j) = f_j, \quad j = 0,1,N-1,N. \tag{8}$$

Отсюда, учитывая (6), имеем

$$\alpha_{j-1}B_{j-1}(x_j) + \alpha_j B_j(x_j) + \alpha_{j+1}B_{j+1}(x_j) = f_j, \quad j=0,1,N-1,N.$$

Так как $B_{j-1}(x_j) \neq 0$, $B_{j+1}(x_j) \neq 0$, то

$$\alpha_{j-1} = [f_j - \alpha_j B_j(x_j) - \alpha_{j+1}B_{j+1}(x_j)]/B_{j-1}(x_j), \quad j = 0,1, \tag{9}$$

$$\alpha_{j+1} = [f_j - \alpha_j B_j(x_j) - \alpha_{j-1}B_{j-1}(x_j)]/B_{j+1}(x_j), \quad j = N-1,N. \tag{10}$$

В итоге для вычисления всех значений α_i вначале по формулам (7) определяем $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N-1}$ и затем из (9) последовательно находим α_0 и α_{-1}, а из (10) α_N и α_{N+1}.

Если в узле x_0 известно либо $f_0^{(1)} = f'(x_0)$, либо $f_0^{(2)} = f''(x_0)$, либо одновременно $f_0^{(1)}$ и $f_0^{(2)}$, то эту информацию также можно привлечь для вычисления α_{-1}, α_0. А именно вместо условий (8) при $j = 0,1$ можно потребовать выполнения равенств

$$S^{(p)}(x_0) = f_0^{(p)}, \quad S^{(q)}(x_0) = f_0^{(q)}, \tag{11}$$

где каждое из чисел p, q принимает одно из значений $0,1,2$, причем $p \neq q$. Условия (11) эквивалентны системе уравнений

$$\alpha_{-1}B_{-1}^{(p)}(x_0) + \alpha_0 B_0^{(p)}(x_0) = f_0^{(p)} - \alpha_1 B_1^{(p)}(x_0),$$

$$\alpha_{-1}B_{-1}^{(q)}(x_0) + \alpha_0 B_0^{(q)}(x_0) = f_0^{(q)} - \alpha_1 B_1^{(q)}(x_0). \qquad (12)$$

Воспользовавшись явными выражениями для $B_j^{(r)}(x_i)$ [I, с.I40], нетрудно показать, что определитель системы (I2) во всех случаях отличен от нуля. Следовательно, после того как значение α_1 найдено из (7), коэффициенты α_{-1}, α_0 можно вычислить из (I2). Точно так же можно определить α_N, α_{N-1}, потребовав по аналогии с (II) выполнения условий $S^{(p)}(x_N) = f_N^{(p)}$, $S^{(q)}(x_N) = f_N^{(q)}$, $p \neq q$.

Наконец, если в узлах x_0, x_N известны $f_0^{(p)}$, $f_N^{(p)}$, $p = 1,2$, то для нахождения коэффициентов α_k, $k = -1,0,1,N-1,N,N+1$, можно воспользоваться выведенными в [35] формулами:

$$\alpha_{k-1} = f_k - \frac{2h_{k-1}+h_{k-2}}{3} f_k^{(1)} + \frac{h_{k-1}(h_{k-2}+h_{k-1})}{6} f_k^{(2)},$$

$$\alpha_k = f_k + \frac{h_k - h_{k-1}}{3} f_k^{(1)} - \frac{h_{k-1}h_k}{6} f_k^{(2)},$$

$$\alpha_{k+1} = f_k + \frac{2h_k+h_{k+1}}{3} f_k^{(1)} + \frac{h_k(h_k+h_{k+1})}{6} f_k^{(2)},$$

$$k = 0, N.$$

В этом случае по формулам (7) достаточно вычислить только α_2, $\alpha_3, \ldots, \alpha_{N-2}$, и в итоге сплайн $S(x)$ будет удовлетворять условиям $S^{(p)}(x_k) = f_k^{(p)}$, $k = 0,N$; $p = 0,1,2$.

Все указанные выше формулы локальной аппроксимации имеют точность $O(H^4)$. Большой интерес представляет получение точных постоянных в оценках погрешности локальной аппроксимации. Это позволит, в частности, выбрать наилучший способ определения величин $\alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_N, \alpha_{N+1}$ и, кроме того, оценить влияние расположения вспомогательных узлов x_{-k}, x_{N+k}, $k = 1,2,3$, на точность приближения. Оценки с точными постоянными известны для случая равномерной сетки [I], когда все коэффициенты α_i находятся по формулам (7). Для неравномерной сетки оценки получены в [35], но постоянные в них не являются точными.

Наряду с формулами точности $O(H^4)$ часто применяется простейшая формула локальной аппроксимации с коэффициентами $\alpha_i = f_i$, $i = 0,1,\ldots,N$. Она имеет точность $O(H)$ на неравномерной сетке и $O(H^2)$ – на равномерной. Для определения коэффициентов $\alpha_{-1}, \alpha_{N+1}$

можно использовать те же самые приемы, которые были рассмотрены выше. Например, можно потребовать выполнения условий $S(x_k)=f_k$, $k=0,N$, и вычислить α_{-1}, α_{N+1} из (9) и (10).

До сих пор мы требовали удовлетворения условий интерполяции только в узлах, расположенных на концах отрезка $[a,b]$. Покажем, что можно обеспечить интерполяцию значений f_i и во многих из внутренних узлов, сохраняя при этом явный вид формул для коэффициентов α_i – главное достоинство локальной аппроксимации. Действительно, потребуем выполнения условий

$$S(x_{k_j})=f_{k_j},\quad x_{k_j}\in\Delta,\quad j=0,1,\dots,L<N, \tag{13}$$

где $k_{j+1}-k_j>1$, $k_0>2$, $k_L<N-2$. Пусть коэффициенты α_i при $i\neq k_j$, $1\le i\le N-1$, $j=0,1,\dots,L$, определены формулами (7). Очевидно, (13) будет иметь место, если положить

$$\alpha_{k_j}=[f_{k_j}-\alpha_{k_j-1}B_{k_j-1}(x_{k_j})-\alpha_{k_j+1}B_{k_j+1}(x_{k_j})]/B_{k_j}(x_{k_j}),$$
$$j=0,\dots,L.$$

Построенная таким образом аппроксимация занимает промежуточное положение между рассмотренными выше формулами локальной аппроксимации и интерполяционными сплайнами. Она позволяет обеспечить интерполяцию значений f_i примерно в половине узлов сетки Δ. Хотя вопрос об оценках погрешности здесь остается открытым, есть основания надеяться, что точность такой аппроксимации будет выше, по сравнению с аппроксимацией, коэффициенты которой заданы формулами (7).

Теперь рассмотрим двумерную локальную аппроксимацию. Предположим, что в узлах сетки $\Delta=\Delta_x\times\Delta_y$, где Δ_x совпадает с ранее введенной сеткой Δ, а Δ_y: $c=y_0<y_1<\dots<y_M=d$, известны значения $f_{ij}=f(x_i,y_j)$, $i=0,\dots,N$; $j=0,\dots,M$. Пусть сетки Δ_x, Δ_y расширены так, как было сделано выше в одномерном случае. В дополнение к введенным ранее B-сплайнам $B_i(x)$ по переменной x введем B-сплайны $\tilde{B}_j(y)$ по переменной y. Шаги сеток Δ_x и Δ_y будем обозначать соответственно через $h_{1i}=x_{i+1}-x_i$ и $h_{2j}=y_{j+1}-y_j$.

Формула локальной аппроксимации от двух переменных записывается в виде

$$S(x,y)=\sum_{i=-1}^{N+1}\sum_{j=-1}^{M+1}\alpha_{ij}B_i(x)\tilde{B}_j(y), \tag{14}$$

где коэффициенты α_{ij} подлежат определению. По аналогии с одномерным случаем простейшая формула локальной аппроксимации получается при $\alpha_{ij} = f_{ij}$, $i=0,\ldots,N$; $j = 0,\ldots, M$. Единственной проблемой здесь является вычисление величин α_{ij} при $i = -1, N+1$; $j=-1,\ldots,M+1$ и $j = -1, M+1$; $i = -1,\ldots,N+1$. Способы их нахождения мы обсудим ниже в процессе построения локальной аппроксимации, которая является обобщением на двумерный случай одномерной аппроксимации (6) с коэффициентами (7).

Обозначим

$$g_i(y) = \sum_{j=-1}^{M+1} \alpha_{ij}\widetilde{B}_j(y). \tag{15}$$

Тогда

$$S(x,y) = \sum_{i=-1}^{N+1} g_i(y)B_i(x) . \tag{16}$$

Это выражение будем рассматривать как формулу локальной аппроксимации функции $f(x,y)$ по переменной x с коэффициентами $g_i(y)$. Согласно (7) имеем

$$g_i(y) = f(x_i,y) + \frac{1}{3(h_{1i-1} + h_{1i})} \times$$
$$\times \left[h^2_{1i}\,\frac{f(x_i,y)-f(x_{i-1},y)}{h_{1i-1}} - h^2_{1i-1}\,\frac{f(x_{i+1},y)-f(x_i,y)}{h_{1i}}\right], \tag{17}$$
$$i = 1,2,\ldots,N-1 .$$

С другой стороны, соотношение (I5) также можно рассматривать как формулу одномерной локальной аппроксимации по переменной y. Снова используя (7), получаем

$$\alpha_{ij} = g_{ij} + \frac{1}{3(h_{2j-1}+h_{2j})}\left[h^2_{2j}\frac{g_{ij}-g_{ij-1}}{h_{2j-1}} - h^2_{2j-1}\frac{g_{i,j+1}-g_{ij}}{h_{2j}}\right], \tag{18}$$
$$j = 1,2,\ldots,M-1; \quad i = 1,2,\ldots,N-1,$$

где $g_{ij} = g_i(y_j)$.

Таким образом,процесс вычисления коэффициентов α_{ij} во внутренних узлах сетки Δ представляет собой последовательное применение формул одномерной локальной аппроксимации. Вначале по формулам, вытекающим из (I7), находим

$$g_{ij} = f_{ij} + \frac{1}{3(h_{1i-1}+h_{1i})}\left[h_{1i}^2\frac{f_{ij}-f_{i-1,j}}{h_{1i-1}} - h_{1i-1}^2\frac{f_{i+1,j}-f_{ij}}{h_{1i}}\right], \quad (19)$$

$$i = 1,2,\dots,N-1; \quad j = 0,1,\dots,M .$$

Затем по формулам (I8) определяем α_{ij}, $i=1,\dots,N-1$; $j=1,\dots,M-1$. Остальные коэффициенты, как и в одномерном случае, будем вычис-лять из условий интерполяции. Рассмотрим простейшие из них, не требующие задания дополнительной информации.

Пусть сплайн, определенный формулой (I6), удовлетворяет условиям $S(x_k,y) = f(x_k,y)$, $k=0,1,N-1,N$. Тогда $g_{k-1}(y)B_{k-1}(x_k) + g_k(y)B_k(x_k) + g_{k+1}(y)B_{k+1}(x_k) = f(x_k,y)$, $k = 0,1,N-1,N$, и, следовательно,

$$g_{k-1,j} = [f_{kj}-g_{kj}B_k(x_k)-g_{k+1,j}B_{k+1}(x_k)]/B_{k-1}(x_k), \quad k=0,1,$$

$$g_{k+1,j} = [f_{kj}-g_{kj}B_k(x_k)-g_{k-1,j}B_{k-1}(x_k)]/B_{k+1}(x_k), \quad k=N-1,N.$$

Отсюда в предположении, что найдены величины, определяемые формулами (I9), легко вычисляются $g_{-1j}, g_{0j}, g_{Nj}, g_{N+1j}$, $j=0,\dots,M$. В результате величины g_{ij} получены для всех $i=-1,0,\dots,N+1$, $j=0,\dots,M$. Кроме того, из (I8) теперь можно дополнительно найти α_{ij} при $i = -1, 0, N, N+1$; $j = 0,\dots,M$.

Далее потребуем, чтобы сплайн, определяемый формулой (I5), интерполировал значения g_{im}, $i=-1,\dots,N+1$; $m = 0,1,M-1,M$. Тогда

$$\alpha_{im-1} = [g_{im}-\alpha_{im}\tilde{B}_m(y_m)-\alpha_{im+1}\tilde{B}_{m+1}(y_m)]/\tilde{B}_{m-1}(y_m), \quad m=0,1,$$

$$\alpha_{im+1} = [g_{im}-\alpha_{im}\tilde{B}_m(y_m)-\alpha_{im-1}\tilde{B}_{m-1}(y_m)]/\tilde{B}_{m+1}(y_m),$$

$$m=M-1,M; \quad i = -1,0,\dots,N+1.$$

В итоге все коэффициенты α_{ij} в формуле (I4) определены. Нетрудно показать, что при этом сплайн $S(x,y)$ будет интерполировать функцию $f(x,y)$ только в I6 узлах (x_i,y_j), $i = 0,1,N-1,N$; $j = 0,1,M-1,M$. Однако количество узлов интерполяции можно существенно увеличить, прибегнув к конструкции сплайна, описанной при рассмотрении одномерного случая. Конечно, если известны значения производных функции $f(x,y)$ в узлах, расположенных на границе прямоугольника $[a,b] \times [c,d]$, то эту информацию также можно использовать при вычислении коэффициентов в (I4). Построенная сплайн-аппроксимация при достаточной гладкости функции $f(x,y)$ имеет точ -

ность $O(H_x^4 + H_y^4)$, где $H_x = \max_i h_{1i}$, $H_y = \max_j h_{2j}$.

Наиболее простыми становятся формулы, описывающие процесс получения величин α_{ij} в часто встречающемся на практике случае равномерных сеток Δ_x и Δ_y, если они продолжены с сохранением равномерности (шаги по каждой переменной могут быть разными). Приведем их в том порядке, в котором они должны быть использованы при вычислении α_{ij}:

$$g_{ij} = (-f_{i-1,j}+8f_{ij}-f_{i+1,j})/6, \qquad i = 1,2,\dots,N-1;$$

$$g_{k-1,j} = 6f_{kj}-4g_{kj}-g_{k+1,j}, \qquad k = 1,0;$$

$$g_{k+1,j} = 6f_{kj}-4g_{kj}-g_{k-1,j}, \qquad k = N-1,N;$$

$$j = 0,1,\dots,M;$$

$$\alpha_{ij} = (-g_{ij-1}+8g_{ij}-g_{ij+1})/6, \qquad j = 1,2,\dots,M-1,$$

$$\alpha_{im-1} = 6g_{im}-4\alpha_{im}-\alpha_{im+1}, \qquad m = 1,0;$$

$$\alpha_{im+1} = 6g_{im}-4\alpha_{im}-\alpha_{im-1}, \qquad m = M-1,M;$$

$$i = -1,0,\dots,N+1.$$

В заключение отметим, что все описанные алгоритмы локальной аппроксимации легко распространяются, во-первых, на полиномиальные сплайны любой степени и, во-вторых, на многомерный случай.

§4. Работы по сплайнам, опубликованные сотрудниками Института математики СО АН СССР в "Вычислительных системах"

В основном работы, посвященные теории и приложениям сплайнов, опубликованы в тех сборниках серии "Вычислительные системы", название которых содержит слово "сплайн". Мы начнем обзор с работ, в которых рассматриваются сплайны невысоких степеней. Такие сплайны получили наибольшее распространение при решении практических задач.

В [13] построена оригинальная конструкция сплайна первой степени (сплайн с дополнительными узлами), позволяющая интерполировать заданные в узлах сетки значения функции и ее производной (эрмитова интерполяция).

Точные оценки погрешности интерполяции непрерывных функций сплайнами, полученными путем замены производных в эрмитовых сплайнах третьей и пятой степеней их конечно-разностными аппроксимациями, найдены в [14].

Несколько работ посвящено классическим кубическим интерполяционным сплайнам класса C^2. В [12] получены необходимые и достаточные условия существования и единственности таких сплайнов при произвольных граничных условиях. В [22] рассмотрены алгоритмы построения кубических сплайнов на основе их представления через B-сплайны. Работы [29,42,46] посвящены исследованию погрешности приближения функций класса W^4_∞ и их производных кубическими сплайнами. Известно, что в классе непрерывных функций последовательность интерполяционных кубических сплайнов класса C^2 не всегда сходится к интерполируемой функции. В [28] найдены ограничения на соотношение шагов сетки, при нарушении которых интерполяционный процесс в классе непрерывных функций расходится. Для сплайнов четвертой и пятой степеней подобные результаты получены в [43].

На равномерной сетке при условии достаточной гладкости интерполируемой функции наиболее полную информацию о погрешности приближения дает асимптотическое разложение погрешности по степеням шага сетки. Для сплайнов пятой степени такое разложение найдено в [36]. Полное решение задачи о построении асимптотических разложений для сплайнов произвольной нечетной степени получено в [44, 48].

В [47] построена и изучена интересная конструкция полиномиального сплайна произвольной степени класса C^2.

Много результатов по приближению функций различными сплайнами приведено в обзорной статье [34].

Ряд работ посвящен исследованию локальной аппроксимации сплайнами. Локальная аппроксимация сплайнами первой степени одной и двух переменных изучается в [24,25,30], параболическими сплайнами в [31] и кубическими сплайнами в [35].

В задачах приближения функций по неточно заданной информации (например, обработка экспериментальных данных) обычно используют сглаживающие сплайны. Комплекс вопросов, связанных с их построением и получением оценок погрешности приближения, изучается в [16, 17,37,39,49,50].

В работах [11,15-17,26,38,45] исследуются построение, сходимость и экстремальные свойства сплайнов многих переменных.

Вариационный подход используется в [18,23] для исследования сглаживающих сплайнов и приближенного решения операторных уравнений.

На основе кубической эрмитовой интерполяции в [32] строится алгоритм решения нелинейных уравнений.

В работе [19] кусочная дробно-рациональная аппроксимация применяется при численном дифференцировании и решении задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Одним из перспективных методов решения краевых задач для дифференциальных уравнений является метод сплайн-коллокации. Его применение для обыкновенного уравнения четвертого порядка изучается в [20]. Решение уравнения Пуассона в прямоугольнике рассматривается в [27,33,40]. Детально исследуется метод сплайн-коллокации для параболического уравнения второго порядка с одной пространственной переменной, с разрывными и непрерывными коэффициентами в [41]. Численное решение параболического уравнения четвертого порядка рассматривается в [21].

Литература

1. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. -М.: Наука, 1980. -352 с.

2. АЛБЕРГ Дж., НИЛЬСОН Э., УОЛШ Дж. Теория сплайнов и ее приложения. -М.: Мир, 1972. - 316 с.

3. СТЕЧКИН С.Б., СУББОТИН Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. -М.: Наука, 1976. - 248 с.

4. ВАСИЛЕНКО В.А. Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. -Новосибирск: Наука, 1983. - 224 с.

5. ГРЕБЕННИКОВ А.И. Метод сплайнов и решение некорректных задач теории приближений.-М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. -208 с.

6. ЛОРАН П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. -М.: Мир, 1975. - 496 с.

7. SPÄTH H. Spline-Algorithmen zur Konstruktion glatter Kurven und Flächen.- München-Wien: R.Oldenburg Verl.,1973.-134 S.

8. SCHUMAKER L. Spline functions: basic theory.- New York: John Wiley & Sons,1981.- 553 p.

9. De BOOR C. A practical guide to splines.- New York: Springer,1978.

10. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Математические проблемы автоматизации проектирования сложных поверхностей машиностроительных конструкций. -В кн.: Вычислительные системы, вып. 58. Новосибирск, 1974, с. 3-16.

11. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Интерполирование мультикубическими сплайнами. -В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып.65). Новосибирск, 1975, с. 3-28.

12. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Некоторые свойства трехдиагональных матриц и их применение к теории кубической сплайн-интерполяции. - Там же, с. 29-49.

13. КВАСОВ Б.И. Об интерполяционных сплайнах первой степени. -Там же, с. 50-59.

14. ДУЙСЕКОВ А., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Точные оценки интерполирования непрерывных функций локальными сплайнами третьей и пятой степеней. -Там же, с. 60-67.

15. ИМАМОВ А. О некоторых экстремальных свойствах сплайнов многих переменных. -Там же, с. 68-73.

16. ИМАМОВ А. Приближенное решение задачи сглаживания. - Там же, с. 74-82.

17. ШУМИЛОВ Б.М. О сплайн-аппроксимации функций многих переменных. -Там же, с. 83-88.

18. ИМАМОВ А. Метод сплайнов для решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве. -Там же, с. 89-95.

19. КОРОЛЁВ В.К. Дробно-квадратичная аппроксимация при численном дифференцировании и интегрировании. -Там же, с.130-142.

20. ДУЙСЕКОВ А., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Метод сплайн-коллокации для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. -Там же, с. 143-151.

21. КИНДАЛЕВ Б.С. Численное решение параболического уравнения четвертого порядка с использованием кубических сплайнов.-Там же, с. 152-159.

22. РОМЕНСКИЙ В.П. К задаче интерполирования кубическими и бикубическими сплайн-функциями.-В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 68). Новосибирск, 1976, с. 51-60.

23. ИМАМОВ А. О сглаживающих сплайнах.-В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 75). Новосибирск, 1978,с.3-15.

24. ШУМИЛОВ Б.М. О локальной аппроксимации сплайнами первой степени. - Там же, с. 16-22.

25. ШУМИЛОВ Б.М. Локальные приближения линейными сплайнами двух переменных. -Там же, с. 23-35.

26. ИМАМОВ А. Формулы интерполирования функций многих переменных.-Там же, с. 50-55.

27. ИМАМОВ А., РОМЕНСКИЙ В.П. Метод сплайн-коллокации для уравнения Пуассона в прямоугольной области. -Там же, с.56-67.

28. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. О расходимости интерполяционных кубических сплайнов в пространстве непрерывных функций.-В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 81). Новосибирск, 1979, с. 3-11.

29. ЖАНЛАВ Т. Некоторые оценки приближения вторых производных с помощью кубических интерполяционных сплайнов. -Там же, с.12-20.

30. ШУМИЛОВ Б.М. О локальной аппроксимации билинейными сплайнами. -Там же, с. 42-47.

31. ШУМИЛОВ Б.М. О локальной аппроксимации параболическими сплайнами. -Там же, с. 48-54.

32. ИМАМОВ А. Решение нелинейных уравнений методом обратного сплайн-интерполирования. -Там же, с. 74-80.

33. РОМЕНСКИЙ В.П. Метод сплайн-коллокации для уравнения Пуассона (схема повышенной точности). -Там же, с. 81-86.

34. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Приближение функций сплайнами. - В кн.: Сплайн-функции в инженерной геометрии (Вычислительные системы, вып. 86). Новосибирск, 1981, с. 9-24.

35. ЖАНЛАВ Т. О представлении интерполяционных кубических сплайнов через B-сплайны. -В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 87). Новосибирск, 1981, с. 3-10.

36. КИНДАЛЕВ Б.С. Асимптотические формулы для сплайна пятой степени и их применение. -Там же, с. 18-24.

37. ВЕРШИНИН В.В. О производных сглаживающих сплайнов. - Там же, с. 35-42.

38. ВЕРШИНИН В.В. О сплайн-отображениях.-Там же, с. 43-52.

39. ПАВЛОВ Н.Н. О граничных условиях в задаче сглаживания кубическими сплайнами. -Там же, с. 53-61.

40. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., МИРОШНИЧЕНКО В.Л., РОМЕНСКИЙ В.П. О сходимости метода сплайн-коллокации для уравнения эллиптического типа в прямоугольной области. -Там же, с. 62-76.

41. ЖАНЛАВ Т., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Метод сплайн-коллокации для параболических уравнений с непрерывными и разрывными коэффициентами. -Там же, с. 77-98.

42. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. О погрешности приближения кубическими интерполяционными сплайнами. I. -В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 93). Новосибирск, 1982, с. 3-29.

43. ВОЛКОВ Ю.С. Необходимые условия равномерной сходимости интерполяционных сплайнов четвертой и пятой степеней. -Там же, с. 30-38.

44. КИНДАЛЕВ Б.С. Асимптотические формулы для сплайнов нечетной степени и аппроксимация производных высокого порядка. - Там же, с. 39-52.

45. ВЕРШИНИН В.В. Экстремальные свойства L-сплайнов нескольких переменных. -Там же, с. 53-60.

46. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. О погрешности приближения кубическими интерполяционными сплайнами. II. -В кн.: Методы сплайн-функций в численном анализе (Вычислительные системы, вып. 98). Новосибирск, 1983, с. 51-66.

47. ВОЛКОВ Ю.С. Интерполяция полиномиальными сплайнами класса C^2.-Там же, с. 42-50.

48. КИНДАЛЕВ Б.С. О точности приближения периодическими интерполяционными сплайнами нечетной степени. -Там же, с. 67-82.

49. ВЕРШИНИН В.В., ПАВЛОВ Н.Н. О приближении производных с помощью сглаживающих сплайнов. -Там же, с. 83-91.

50. ПАВЛОВ Н.Н. Сглаживание кубическими сплайнами и метод штрафов. - Там же, с. 92-102.

Поступила в ред.-изд.отд.
6 декабря 1983 года