СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ СИМВОЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ
(Вычислительные системы)
1984 год Выпуск 101
УДК 517.948

БИНАРНАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА РАНГА (3,3)

В.Х. Лев

Ю.И.Кулаковым сформулирован новый взгляд на природу и математическую структуру фундаментальных физических законов и основных физических величин и понятий [1-3], суть которого состоит в следующем. Начиная с Галилея и по настоящее время,физика,как правило, строится и излагается индуктивно, т.е. из огромного множества наблюдений и опытных фактов выбирается небольшое число свойств и вырабатываются основные понятия, в терминах которых формулируется физическая теория. Ю.И.Кулаков предлагает дедуктивный путь построения физики. Для его реализации он предложил некоторую простую математическую схему. Эта схема оказалась весьма эффективной при установлении природы фундаментальных физических законов и введении в теорию основных физических величин и понятий и потому названа "физической структурой".

Теория физических структур представляет собой своеобразную теорию отношений симметрии,на основе которой стало возможным дать единую классификацию наиболее фундаментальных физических законов, основных физических величин и понятий.

Основным объектом изучения теории физических структур являются отношения феноменологической симметрии или, другими словами, отношения однородности и равноправия физических объектов, сформулированные в наиболее общем и абстрактном виде. Благодаря этому, данная теория позволяет при соответствующей интерпретации рассматривать с единой точки зрения самые разнообразные физические теории феноменологического типа. К таким теориям относятся: геометрия, рассматриваемая как физическая теория "протяженности" реальных объектов; хронометрия, изучающая наиболее общие свойства времени; специальная теория относительности; релятивистская и не-релятивистская механика; теория электромагнитного поля; термодинамика и квантовая механика.

Факт существования феноменологической симметрии является настолько сильным требованием, что позволяет получать явные выражения для всех известных первичных физических законов независимо от их конкретной интерпретации.

Исходные физические предпосылки теории физических структур сводятся к следующему:

1. Физический закон, лежащий в основании того или иного раздела физики, должен быть справедлив для всех физических объектов, принадлежащих к достаточно богатому множеству (идея однородности или равноправия).

2. Экспериментально измеряемые величины, входящие в выражение физического закона, характеризуют отношения двух физических объектов (идея бинарности отношений).

3. Физический закон - это связь между измеряемыми на опыте величинами (возможность непосредственной физической интерпретации).

4. На множестве физических объектов допустимо введение понятий близости, непрерывности, гладкости (возможность применения методов математического анализа).

Наглядно понятие физической структуры может быть описано следующим образом. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ - два множества физических объектов различной природы. Будем говорить, что физические объекты этих двух множеств находятся в отношении феноменологической симметрии ранга $(r,\ s)$, если имеет место следующая ситуация:

1. Каждой паре физических объектов $i \in \mathfrak{M}$, $\alpha \in \mathfrak{N}$ с помощью некоторого измерительного прибора сопоставляется число $a_{i\alpha}$.

2. Если из множества $\mathfrak{M}$ выбрать произвольным образом подмножество $\mathfrak{M}_r(i_1, i_2, \dots, i_r)$, состоящее из r элементов, а из множества $\mathfrak{N}$ - подмножество $\mathfrak{N}_s(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$, состоящее из s элементов, то между $r \cdot s$ экспериментальными значениями $a_{i\alpha}$, относящимися к любой паре $(i, \alpha) \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$, имеет место какая-либо (заранее неизвестная) зависимость:

$$\Phi(a_{i_1\alpha_1},\ a_{i_2\alpha_2}, \dots, a_{i_r\alpha_s}) = 0\ . \tag{1}$$

На множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, функцию $a: \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$ и Φ вводятся некоторые достаточно естественные ограничения. Наглядно вводимые ограничения состоят в том, что элементы множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ должны зависеть от максимально возможного числа параметров. При этом топология в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ строится по исходному отображению $a: \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$. От функции Φ требуется, чтобы она была аналитической и чтобы существовала точка, в окрестностях которой $\operatorname{grad} \Phi \neq 0$. Это позволяет разрешить уравнение (I) относительно хотя бы одного из своих аргументов.

Таким образом, возникает чисто математическая задача: при фиксированных числах r и s найти такую функцию $r \cdot s$ переменных $\Phi(u_1, u_2, \ldots, u_{rs})$ и такой набор значений $a_{i\alpha}$, чтобы при любом выборе подмножеств $\mathfrak{M}_r$ и $\mathfrak{N}_s$ имело место соотношение (I).

Оказывается, что требование существования соотношения (I), инвариантного относительно выбора подмножеств $\mathfrak{M}_r$ и $\mathfrak{N}_s$, является достаточным не только для нахождения функции Φ, определяющей собой вид физического закона в его наиболее естественном виде, но и для получения допустимого набора физических величин $a_{i\alpha}$.

Эта математическая задача была решена Г.Г.Михайличенко [4]. Он построил полный класс всех бинарных физических структур ранга (r, s) при $r, s \geq 2$. Было показано, что бинарные физические структуры существуют только для $r = s \geq 2$, $r = s+1 \geq 3$ и $r = s+2 = 4$. Для этих структур был найден явный вид функций Φ и $a: \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$. (Полную сводку результатов можно найти в работе [4].)

Итак, показано, что задание требования существования феноменологической симметрии ранга (r, s) однозначно приводит к конкретному выражению связи между $r \cdot s$ опытными данными. Наличие огромного числа опытных данных приводит к необходимости использовать вычислительную технику. Поскольку нередко явный вид связей между $r \cdot s$ опытными данными априорно известен [4], то необходимо лишь проверить, удовлетворяют ли экспериментальные данные, взятые по определенному правилу, одному из возможных выражений. Это существенно облегчает обработку результатов эксперимента и выявление скрытых в них закономерностей.

До сих пор мы рассматривали физические структуры, определенные на двух множествах физических объектов различной природы. Вполне естественно рассмотреть вопрос о возможности существования физических структур на одном множестве. Пусть $\mathfrak{M}$ - некоторое множество физических объектов. Выберем из этого множества подмножество $\mathfrak{M}_r$, состоящее из r элементов $i, j, \ldots, v \in \mathfrak{M}$ и сопоставим каждой паре элементов $\langle i, j \rangle$ число a_{ij}. Будем говорить, что физические объекты множества $\mathfrak{M}$ находятся в отношении феноменологической симметрии ранга r, если для любого $\mathfrak{M}_r \in \mathfrak{M}$ имеет место зависимость

$$\Phi(a_{i_1 i_2}, a_{i_1 i_3}, \ldots, a_{i_{r-1} i_r}) = 0,$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_r \in \mathfrak{M}_r$ и число переменных, от которых зависит функция Φ, равно $r(r-1)/2$.

Возникает другая математическая задача: при фиксированном числе r найти такую функцию от $r(r-1)/2$ переменных и такой набор $a_{i_p i_q}$, чтобы при любом выборе подмножества $\mathfrak{M}_r \in \mathfrak{M}$ имело место соотношение, указанное выше. Для случая $r = 3$, $r = 4$ эта задача была решена Г.Г.Михайличенко с помощью частного параметрического метода [7]. Попытки найти физические структуры ранга $r > 4$ не привели к положительным результатам.

Автором был разработан общий параметрический метод для нахождения физических структур ранга $r > 4$. Отметим, что физическая структура ранга $r = 4$ связана с геометрией двухмерного пространства, ранга $r = 5$ - с геометрией трехмерного пространства и т.д. Предложенный метод достаточно универсален. С его помощью можно находить физические структуры и на двух множествах. Автором, в частности, были найдены физические структуры ранга (3,3), (4,2), (4,3) и другие. Хотя эти структуры и были найдены Михайличенко Г.Г. функциональным методом, применение общего параметрического метода позволило внести некоторые интересные уточнения, связанные с единственностью решения.

Параметрический метод состоит из следующих этапов:

I. Постановка задачи.

2. Для определенных фиксированных (r, s) записывается уравнение (I) $\Phi(a_{i_1\alpha_1}, \ldots, a_{i_r\alpha_s}) = 0$. Устанавливается число параметров, от которых зависит функция $a_{i\alpha}$, и число всех параметров, от которых зависит функция Φ.

3. Уравнение (I) дифференцируется по всем параметрам, от которых зависит функция Φ. В результате получается система из $(2rs-r-s)$ уравнений относительно $r \cdot s$ частных производных функции Φ по аргументам $a_{i_1\alpha_1}, \ldots, a_{i_r\alpha_s}$.

4. Выписывается функциональная матрица Якоби из коэффициентов полученной системы. Находится ранг матрицы Якоби ρ_1, и определители порядка, большего ρ_1, приравниваются нулю (именно те оп-

ределители, которые окаймляют один из определителей ρ_1-порядка, отличный от нуля). Эти определители разлагаются по одному из столбцов, и получается система функционально-дифференциальных уравнений I-го порядка в частных производных относительно какого-нибудь $a_{i_p\alpha_q}$ $(p = 1,\dots,r;\ q=1,\dots,s)$. Число таких уравнений $rs-r-s+1$.

5. Определяется ранг матрицы этой системы ρ_2, и выписываются ρ_2 линейно-независимых уравнений. Все определители порядка, большего ρ_2, приравниваются нулю (именно те определители, которые окаймляют один из отличных от нуля определителей ρ_2-порядка).

6. Проводится "вторичная параметризация". В результате получаются система из ρ_2 однородных дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных относительно одной неизвестной функции $a_{i_p\alpha_q} = f(x^1_{i_p},\dots,x^{r-1}_{i_p};\ \xi^1_{\alpha_q},\dots,\ \xi^{s-1}_{\alpha_q})$ и несколько соотношений между коэффициентами системы, полученных из условия равенства нулю определителей порядка, большего ρ_2.

7. Система исследуется на совместность и решается методом редукции однородной системы [6]. Таким образом находится явный вид функции $a_{i_p\alpha_q} = f(i_p,\ \alpha_q)$.

8. Определяется вид функции $\Phi(a_{i_1\alpha_1},\dots,a_{i_r\alpha_s})$.

В настоящей работе рассмотрена задача о нахождении физической структуры ранга (3,3) с помощью параметрического метода.

Сформулируем задачу применительно к данному случаю.

Пусть имеются два множества произвольной природы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, элементы которых обозначаются строчными латинскими и греческими буквами соответственно, и имеется также вещественная функция a: $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$, сопоставляющая каждой паре $\langle i,\alpha \rangle$ из прямого произведения $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ некоторое число $a_{i\alpha} \in R$. Два элемента $i,j \in \mathfrak{M}$ (соотв. $\alpha,\beta \in \mathfrak{N}$) считаются эквивалентными $i \sim j$ (соотв. $\alpha \sim \beta$), если для любого $\gamma \in \mathfrak{N}$ (соотв. $k \in \mathfrak{M}$) имеет место равенство $a_{i\gamma} = a_{j\gamma}$ (соотв. $a_{k\alpha} = a_{k\beta}$). Будем предполагать, что в обоих множествах отождествлены все эквивалентные элементы, а неэквивалентные считаются различными. В множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ можно ввести отделимые топологии, определив фундаментальные системы окрестностей так, чтобы функция $a: \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$ была непрерывной. Обозначим через $P(i_0)$ и $Q(\alpha_0)$ открытые окрестности точек $i_0 \in \mathfrak{M}$ и $\alpha_0 \in \mathfrak{N}$.

Пусть $\mathfrak{M}^3=\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}^3=\mathfrak{N}\times\mathfrak{N}\times\mathfrak{N}$. Построим функцию $A\colon \mathfrak{M}^3\times\mathfrak{N}^3\to R^9$, сопоставляющую каждому кортежу $\langle ikl,\ \alpha\beta\gamma\rangle \in \mathfrak{M}^3\times\mathfrak{N}^3$ числовую матрицу размера 3х3:

$$a(ikl,\ \alpha\beta\gamma) = \begin{Vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} \\ a_{l\alpha} & a_{l\beta} & a_{l\gamma} \end{Vmatrix},$$

рассматриваемую как точка пространства R^9. Понятно, что функция $A\colon \mathfrak{M}^3\times\mathfrak{N}^3\to R^9$ также непрерывна. Обозначим через N множество значений построенной функции. Поскольку $N\in R^9$, множество N становится топологическим пространством, если его наделить индуцированной топологией.

Будем говорить, что тройка $\langle \mathfrak{M},\mathfrak{N},a\colon \mathfrak{M}\times\mathfrak{N}\to R\rangle$ образует бинарную физическую структуру ранга (3,3), если выполнены следующие условия:

А. Отображение $a[\alpha,\beta]\colon \mathfrak{M}\to R^2$, задаваемое функцией $i\to(a_{i\alpha},a_{i\beta})\in R^2$, открыто для любого недиагонального кортежа $\langle\alpha\ \beta\rangle\in\mathfrak{N}^2$, где $\alpha\neq\beta$; отображение $a[ik]\colon \mathfrak{N}\to R^2$, задаваемое функцией $\alpha\to(a_{i\alpha},a_{k\alpha})\in R^2$, открыто для любого недиагонального кортежа $\langle ik\rangle\in\mathfrak{M}^2$, где $i\neq j$; функция $A\colon \mathfrak{M}^3\times\mathfrak{N}^3\to N$ есть открытое отображение.

В. Существует аналитическая функция $\Phi\colon E\to R$, определенная в области $E\in R^9$, такая что множество M , задаваемое уравнением $\Phi = 0$, совпадает с N , т.е.

$$\Phi(a_{i\alpha},a_{i\beta},a_{i\gamma},a_{k\alpha},a_{k\beta},a_{k\gamma},a_{l\alpha},a_{l\beta},a_{l\gamma}) = 0 \qquad (2)$$

для любого кортежа $\langle ikl,\ \alpha\beta\gamma\rangle\in\mathfrak{M}^3\times\mathfrak{N}^3$.

В. В любой окрестности относительно N произвольной точки на N найдется такая точка, в которой градиент отличен от нуля, т.е. $\operatorname{grad}\Phi\neq 0$ на всюду плотном подмножестве.

ТЕОРЕМА. Если тройка $\langle\mathfrak{M},\mathfrak{N},\ a\colon \mathfrak{M}\times\mathfrak{N}\to R\rangle$ образует бинарную структуру ранга (3.3), то в любых окрестностях $P(i_0)$, $Q(\alpha_0)$ произвольных точек $i_0\in\mathfrak{M}$, $\alpha_0\in\mathfrak{N}$ найдутся элементы $i_1\in P(i_0)$, $\alpha_1\in Q(\alpha_0)$, для некоторых окрестностей $P(i_1)$, $Q(\alpha_1)$ которых функция $a\colon P(i_1)\times Q(\alpha_1)\to R$ и аналити -

ческое множество значений функции $A: [P(i_1)]^3 \times [Q(\alpha_1)]^3 \to R^9$ могут быть представлены следующим образом:

$$a_{i\alpha} = \Psi^{-1}(x_i \xi_\alpha + y_i \eta_\alpha),$$

$$\begin{vmatrix} \psi(a_{i\alpha}) & \psi(a_{i\beta}) & \psi(a_{i\gamma}) \\ \psi(a_{k\alpha}) & \psi(a_{k\beta}) & \psi(a_{k\gamma}) \\ \psi(a_{l\alpha}) & \psi(a_{l\beta}) & \psi(a_{l\gamma}) \end{vmatrix} = 0, \qquad (3)$$

где $ikl \in P(i_1)$, $\alpha,\beta,\gamma \in Q(\alpha_1)$, Ψ - строго монотонная аналитическая функция одной переменной, определенная в некоторой окрестности точки $(i_1,\alpha_1) \in R$, ψ^{-1} - обратная функция, $x_i, y_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha$ - независимые параметры, задаваемые некоторыми открытыми отображениями (x,y): $\mathfrak{M} \to R^2$, $(\xi,\eta): \mathfrak{N} \to R^2$.

Все дальнейшее изложение будет представлять доказательство сформулированной выше теоремы. Пусть $P(i_0)$, $Q(\alpha_0)$ - любые открытые окрестности произвольных точек $i_0 \in \mathfrak{M}$ и $\alpha_0 \in \mathfrak{N}$. Множество N_0 значений функции $A: [P(i_0)]^3 \times [Q(\alpha_0)]^3 \to R^9$ есть окрестность точки $a(i_0 i_0 i_0, \alpha_0\alpha_0\alpha_0) \in N$ согласно условию А. По условиям Б и В, существует такая точка $a(i_2 k_2 l_2 \alpha_2 \beta_2 \gamma_2) \in [P(i_0)]^3 \times [Q(\alpha_0)]^3$, в которой $\mathrm{grad}\,\Phi \neq 0$. Это означает, что отлична от нуля хотя бы одна из девяти частных производных функции Φ. Без ограничения общности можно считать, что отлична от нуля производная по первому аргументу. Тогда, по теореме о неявных функциях, уравнение (2) может быть однозначно разрешено относительно $a_{i\alpha}$ в некоторой окрестности $U = H \times V$ точки $(i_2 k_2 l_2, \alpha_2\beta_2\gamma_2) \in R^9$

$$a_{i\alpha} = \Gamma(a_{i\beta}, a_{i\gamma}, a_{k\alpha}, a_{k\beta}, a_{k\gamma}, a_{l\alpha}, a_{l\beta}, a_{l\gamma}), \qquad (4)$$

где аналитическая функция Γ определена в восьмимерной окрестности V. При этом можно найти такие непересекающиеся окрестности $P(i_2)$, $P(k_2)$, $P(l_2) \subset P(i_0)$ и $Q(\alpha_2)$, $Q(\beta_2)$, $Q(\gamma_2) \subset Q(\alpha_0)$, что множество точек $a(ikl, \alpha\beta\gamma)$, соответствующих кортежам $\langle ikl, \alpha\beta\gamma \rangle \in P(i_2) \times P(k_2) \times P(l_2) \times Q(\alpha_2) \times Q(\beta_2) \times Q(\gamma_2)$ задается уравнением (4).

Покажем, что каждая из частных производных функции Γ по аргументам $a_{i\beta}, a_{i\gamma}, a_{k\alpha}, a_{l\alpha}$ отлична от нуля на множестве полной меры в окрестности V. Действительно, если какая-либо производная обращается в нуль на множестве положительной меры, то в силу аналитичности функции Γ соответствующая производная обращается в нуль тождественно, что, как мы покажем, приводит к нарушению условия А. Предположим сначала, что $\Gamma_{a_{i\beta}} = 0$ на множестве положительной меры, т.е. $\Gamma_{a_{i\beta}} \equiv 0$ и функция Γ не зависит от переменной $a_{i\beta}$:

$$a_{i\alpha} = \Gamma_1(a_{i\gamma}, a_{k\alpha}, a_{k\beta}, a_{k\gamma}, a_{l\alpha}, a_{l\beta}, a_{l\gamma}). \qquad (4')$$

В окрестности $Q(\alpha_2)$ возьмем элемент $\alpha' \neq \alpha$ и запишем уравнение (4') для кортежа $\langle ikl, \alpha'\beta\gamma \rangle$:

$$a_{i\alpha'} = \Gamma_2(a_{i\gamma}, a_{k\alpha'}, a_{k\beta}, a_{k\gamma}, a_{l\alpha'}, a_{l\beta}, a_{l\gamma}). \qquad (4'')$$

Из уравнений (4') и (4") следует, что для фиксированных значений различных элементов α, α' образ окрестности $P(i_2)$ при отображении $a[\alpha\ \alpha']: P(i_2) \to R^2$ есть одномерная аналитическая кривая в R^2, что противоречит условию А. Аналогично показывается, что производные функции Γ по аргументам $a_{i\gamma}, a_{k\alpha}, a_{l\alpha}$ отличны от нуля на множестве полной меры в окрестности V. Не ограничивая общности, можно, очевидно, предположить, что именно в окрестности $U = H \times V$ точки $(i_2 k_2 l_2, \alpha_2 \beta_2 \gamma_2)$ имеет место уравнение (4) и производные функции Γ по переменным $a_{i\beta}, a_{i\gamma}, a_{k\alpha}, a_{l\alpha}$ отличны от нуля всюду на V.

Покажем, наконец, что переменные $a_{k\alpha}, a_{l\alpha}$ (соотв. $a_{i\beta}, a_{i\gamma}$) входят в функцию существенным образом, т.е. невозможна запись

$$a_{i\alpha} = \Gamma_3[\varphi(a_{k\alpha}, a_{l\alpha}), a_{i\beta}, a_{i\gamma}, a_{k\beta}, a_{k\gamma}, a_{l\beta}, a_{l\gamma}], \qquad (5)$$

$$a_{i\alpha} = \Gamma_4[\varphi(a_{i\beta}, a_{i\gamma}), a_{k\alpha}, a_{k\beta}, a_{k\gamma}, a_{l\beta}, a_{l\alpha}, a_{l\gamma}], \qquad (5')$$

где Γ и φ - аналитические функции. Предположим обратное. Подставим в уравнение (5) вместо i другой элемент $i' \in P(i_2)$ $a_{i'\alpha} = \Gamma_3[\varphi(a_{k\alpha}, a_{l\alpha}), a_{i'\beta}, a_{i'\gamma}, a_{k\beta}, a_{k\gamma}, a_{l\beta}, a_{l\gamma}]$, т.е. множество точек $(a_{i\alpha}, a_{i'\alpha}) \in R^2$ образует одномерную аналитическую кривую в R^2, что противоречит условию А. Аналогично показывается невозможность записи (5').

Запишем уравнение (4) для кортежа $\langle ik_2 l_2, \alpha\beta_2\gamma_2 \rangle$, где $i \in P(i_2)$, $\alpha \in Q(\alpha_2)$:

$$a_{i\alpha} = \Gamma(a_{i\beta_2}, a_{i\gamma_2}, a_{k_2\alpha}, a_{k_2\beta_2}, a_{k_2\gamma_2}, a_{l_2\alpha}, a_{l_2\beta_2}, a_{l_2\gamma_2}). \qquad (6)$$

Полагая $a_{i\beta_2} = x_i$, $a_{i\gamma_2} = y_i$, $a_{k_2\alpha} = \xi_\alpha$, $a_{l_2\alpha} = \eta_\alpha$, получаем параметрическое представление функции $a: P(i_1) \times Q(\alpha_1) \to R$:

$$a_{i\alpha} = f(i\alpha) = f(x_i, y_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha), \tag{7}$$

где все производные функции $f(x_i, y_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha)$ отличны от нуля в некоторой окрестности точки $(x_{i_2}, y_{i_2}, \xi_{\alpha_2}, \eta_{\alpha_2}) \in R^4$. Кроме того, независимые параметры $x_i, y_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha$ входят в аналитическую функцию $f(i\alpha)$ существенным образом, т.е. невозможна запись, например, $a_{i\alpha} = f(i\alpha) = \chi[\varphi(x_i, y_i), \xi_\alpha, \eta_\alpha]$. Будем предполагать, что $i, k, l \in P(i_2)$ и $\alpha, \beta, \gamma \in Q(\alpha_2)$. Подставим функцию (7) в уравнение (2):

$$\Phi[f(i\alpha), f(i\beta), f(i\gamma), f(k\alpha), f(k\beta), f(k\gamma), f(l\alpha), f(l\beta), f(l\gamma)] = 0. \tag{8}$$

Уравнение (8) задает множество значений N_2 функции $A: [P(i_2)]^3 \times [Q(\alpha_2)]^3 \to R^9$, которое, по условию А, является окрестностью точки $a(i_2 i_2 i_2, \alpha_2\alpha_2\alpha_2) \in N$. В N_2, по условию В, существует такая точка, в которой $\operatorname{grad} \Phi \neq 0$.

Продифференцируем уравнение (8) по всем независимым переменным $x_i, y_i, x_k, y_k, x_l, y_l, \xi_\alpha, \eta_\alpha, \xi_\beta, \eta_\beta, \xi_\gamma, \eta_\gamma$. В результате возникает система из двенадцати линейных однородных уравнений относительно девяти частных производных функции Φ. Матрица системы имеет вид:

$$\left\| \begin{array}{cccccccc|c}
f_x(i\alpha) & f_x(i\beta) & f_x(i\gamma) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
f_y(i\alpha) & f_y(i\beta) & f_y(i\gamma) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & f_x(k\alpha) & f_x(k\beta) & f_x(k\gamma) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & f_y(k\alpha) & f_y(k\beta) & f_y(k\gamma) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_x(l\alpha) & f_x(l\beta) & f_x(l\gamma) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_y(l\alpha) & f_y(l\beta) & f_y(l\gamma) \\
f_\xi(i\alpha) & 0 & 0 & f_\xi(k\alpha) & 0 & 0 & f_\xi(l\alpha) & 0 & 0 \\
f_\eta(i\alpha) & 0 & 0 & f_\eta(k\alpha) & 0 & 0 & f_\eta(l\alpha) & 0 & 0 \\
\hline
0 & f_\xi(i\beta) & 0 & 0 & f_\xi(k\beta) & 0 & 0 & f_\xi(l\beta) & 0 \\
0 & f_\eta(i\beta) & 0 & 0 & f_\eta(k\beta) & 0 & 0 & f_\eta(l\beta) & 0 \\
0 & 0 & f_\xi(i\gamma) & 0 & 0 & f_\xi(k\gamma) & 0 & 0 & f_\xi(l\gamma) \\
0 & 0 & f_\eta(i\gamma) & 0 & 0 & f_\eta(k\gamma) & 0 & 0 & f_\eta(l\gamma)
\end{array} \right\|, \tag{9}$$

где $f_x(i\alpha), f_y(i\alpha), f_\xi(i\alpha), f_\eta(i\alpha)$ есть частные производные функции $f(i\alpha)$ по переменным $x_i, y_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha$.

Система уравнений относительно производных функции Φ имеет ненулевое решение в точке, где $\mathrm{grad}\ \Phi\neq 0$, и некоторой ее окрестности. Каждая подсистема из девяти уравнений содержит все девять неизвестных (частных производных функции Φ), и поэтому любой определитель девятого порядка должен обращаться в нуль. Поскольку каждый такой определитель есть аналитическая функция, обращение в нуль будет тождественным и в окрестности N_2 точки $a(i_2 i_2 i_2, \alpha_2\alpha_2\alpha_2)$. Таким образом, ранг прямоугольной матрицы (9) меньше девяти.

Покажем, что ранг матрицы (9) равен восьми, т.е. не все определители восьмого порядка из этой матрицы равны нулю. Рассмотрим определитель восьмого порядка в левом верхнем углу матрицы (9) (отмеченный пунктиром). Предположим, что этот определитель равен нулю. Разлагая его, получим

$$\begin{vmatrix} f_x(1\alpha) & f_x(1\beta) \\ f_y(1\alpha) & f_y(1\beta) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_\xi(i\alpha) & f_\xi(k\alpha) \\ f_\eta(i\alpha) & f_\eta(k\alpha) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_x(i\beta) & f_x(i\gamma) \\ f_y(i\beta) & f_y(i\gamma) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_x(k\beta) & f_x(k\gamma) \\ f_y(k\beta) & f_y(k\gamma) \end{vmatrix} = 0.$$

Один из определителей второго порядка должен быть равен нулю. Рассмотрим, например, первый определитель:

$$f_x(1\alpha)\cdot f_y(1\beta) - f_y(1\alpha)\cdot f_x(1\beta) = 0. \qquad (10)$$

Но в таком случае $f_x(1\alpha)/f_y(1\alpha)=f_x(1\beta)/f_y(1\beta) = B(1) = B(x_1, y_1)$, т.е. имеем уравнение $f_x(1\alpha) - f_y(1\alpha)\cdot B(1) = 0$. Тогда $f(1\alpha) = \chi[\varphi(x_1, y_1), \xi_\alpha, \eta_\alpha]$, т.е. параметры x_1, y_1 входят несущественным образом, что противоречит условию А. Следовательно, рассмотренный определитель отличен от нуля на множестве полной меры. Так же показывается неравенство нулю остальных определителей второго порядка, т.е. определитель восьмого порядка (отмеченный пунктиром в (9)), не равен нулю, и ранг матрицы (9) равен восьми. Все определители девятого порядка равны нулю.

Достаточно рассмотреть только те определители девятого порядка, которые окаймляют рассмотренный выше определитель восьмого порядка. Таких определителей четыре. Выпишем их, разлагая по первому столбцу:

$$\left.\begin{aligned} & f_x(i\alpha)B_1(i,\beta\gamma)C_0(kl,\alpha\beta\gamma)+f_y(i\alpha)\cdot B_2(i,\beta\gamma)\cdot C_0(kl,\alpha\beta\gamma) + \\ & + f_\xi(i\alpha)C_1(kl,\alpha\beta\gamma)\cdot B_0(i\beta\gamma)+f_\eta(i\alpha)\cdot C_2(kl,\alpha\beta\gamma)\cdot B_0(i,\beta\gamma) = 0; \\ & f_x(i\alpha)B_3(i,\beta\gamma)C_0(kl,\alpha\beta\gamma)+f_y(i\alpha)B_4(i,\beta\gamma)\cdot C_0(kl,\alpha\beta\gamma) + \end{aligned}\right\}$$

$$+ f_\xi(i\alpha)C_3(kl,\alpha\beta\gamma)B_0(i\beta\gamma)+f_\eta(i\alpha)C_4(kl,\alpha\beta\gamma)\cdot B_0(i,\beta\gamma) = 0;$$

$$\left.\begin{array}{l} f_x(i\alpha)B_5(i,\beta\gamma)C_0(kl,\alpha\beta\gamma)+f_y(i\alpha)\ B_6(i,\beta\gamma)\cdot C_0(kl,\alpha\beta\gamma) + \\ +f_\xi(i\alpha)C_5(kl,\alpha\beta\gamma)B_0(i,\beta\gamma)+f_\eta(i\alpha)C_6(kl,\alpha\beta\gamma)B_0(i,\beta\gamma) = 0, \\ f_x(i\alpha)B_7(i,\beta\gamma)C_0(kl,\alpha\beta\gamma) + f_y(i\alpha)B_8(i,\beta\gamma)C_0(kl,\alpha\beta\gamma) + \\ +[f_\xi(i\alpha)C_7(kl,\alpha\beta\gamma) + f_\eta(i\alpha)\cdot C_8(kl,\alpha\beta\gamma)]B_0(i,\beta\gamma) = 0, \end{array}\right| \quad (11)$$

где

$$B_1(i,\beta\gamma) = -f_\xi(i\beta)\cdot f_y(i\gamma);\ B_2(i,\beta\gamma) = f_\xi(i\beta)\cdot f_x(i\gamma);$$

$$B_3(i,\beta\gamma) = -f_\eta(i\beta)\cdot f_y(i\gamma);\ B_4(i,\beta\gamma) = f_\eta(i\beta)\cdot f_x(i\gamma);$$

$$B_5(i,\beta\gamma) = -f_\xi(i\gamma)\cdot f_y(i\beta);\ B_6(i,\beta\gamma) = f_\xi(i\gamma)\cdot f_x(i\beta);$$

$$B_7(i,\beta\gamma) = -f_\eta(i\gamma)\cdot f_y(i\beta);\ B_8(i,\beta\gamma) = f_\eta(i\gamma)\cdot f_x(i\beta);$$

$$B_0(i,\beta\gamma) = f_x(i\beta)\ f_y(i\gamma) - f_y(i\beta)f_x(i\gamma);$$

$$C_0(kl,\alpha\beta\gamma) = \begin{vmatrix} f_x(l\beta) & f_x(l\gamma) \\ f_y(l\beta) & f_y(l\gamma) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_\xi(k\alpha) & f_\xi(l\alpha) \\ f_\eta(k\alpha) & f_\eta(l\alpha) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_x(k\beta) & f_x(k\gamma) \\ f_y(k\beta) & f_y(k\gamma) \end{vmatrix};$$

$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$ – определители шестого порядка. Отметим, что $B_0(i,\beta\gamma)$ и $C_0(kl,\alpha\beta\gamma)$ отличны от нуля на множестве полной меры (показывается так же, как и неравенство нулю определителя (10)). Разделим все соотношения системы (11) на $B_0(i,\beta\gamma)\cdot C_0(kl,\alpha\beta\gamma)$ и запишем их для кортежа $\langle ik_3l_3,\alpha\beta_3\gamma_3 \rangle$, где $i \in P(i_3) \subset P(i_2)$, $\alpha \in Q(\alpha_3) \subset Q(\alpha_2)$. Итак,

$$\left.\begin{array}{l} f_x(i\alpha)B_1(i)+f_y(i\alpha)B_2(i)+f_\xi(i\alpha)C_1(\alpha)+f_\eta(i\alpha)C_2(\alpha) = 0, \\ f_x(i\alpha)B_3(i)+f_y(i\alpha)B_4(i)+f_\xi(i\alpha)C_3(\alpha)+f_\eta(i\alpha)C_4(\alpha) = 0, \\ f_x(i\alpha)B_5(i)+f_y(i\alpha)B_6(i)+f_\xi(i\alpha)C_5(\alpha)+f_\eta(i\alpha)C_6(\alpha) = 0, \\ f_x(i\alpha)B_7(i)+f_y(i\alpha)B_8(i)+f_\xi(i\alpha)C_7(\alpha)+f_\eta(i\alpha)C_8(\alpha) = 0, \end{array}\right\} \quad (12)$$

где $B_1(i) = B_1(x_i,y_i) = B_1(i,\beta_3\gamma_3)/B_0(i,\beta_3\gamma_3)$; $C_1(\alpha) = C_1(\xi_\alpha,\eta_\alpha) = C_1(k_3l_3\alpha\beta_3\gamma_3)/C_0(k_3l_3,\alpha\beta_3\gamma_3)$ и т.д. Из явного вида коэффициентов отметим:

$$B_3(i)/B_1(i)=B_4(i)/B_2(i)=\varphi_1(i)\ ,\ B_7(i)/B_5(i)=B_8(i)/B_6(i)=\varphi_2(i)\ . \quad (13)$$

Систему (I2) можно рассматривать как систему четырех дифференциальных уравнений первого порядка относительно функции $f(i\alpha)=$ $= f(x_i, y_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha)$. Ясно, что для существования нетривиального решения определитель четвертого порядка из коэффициентов при неизвестных $f_x(i\alpha)$, $f_y(i\alpha)$, $f_\xi(i\alpha)$, $f_\eta(i\alpha)$ должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} B_1(i) & B_2(i) & C_1(\alpha) & C_2(\alpha) \\ B_3(i) & B_4(i) & C_3(\alpha) & C_4(\alpha) \\ B_5(i) & B_6(i) & C_5(\alpha) & C_6(\alpha) \\ B_7(i) & B_8(i) & C_7(\alpha) & C_8(\alpha) \end{vmatrix} = 0, \quad (14)$$

т.е. матрица из коэффициентов системы имеет ранг меньше четырех. Покажем, что ранг матрицы равен трем, т.е. не все определители третьего порядка равны нулю. Предположим обратное. Пусть, например,

$$\begin{vmatrix} B_1(i) & B_2(i) & C_1(\alpha) \\ B_3(i) & B_4(i) & C_3(\alpha) \\ B_5(i) & B_6(i) & C_5(\alpha) \end{vmatrix} = 0. \quad (15)$$

Разложим определитель по третьему столбцу: $C_1(\alpha)[B_3(i)B_6(i)-$ $- B_4(i)B_5(i)] - C_3(\alpha)[B_1(i)\,B_6(i) - B_5(i)B_2(i)]=0$. Используя (I3), запишем $[C_1(\alpha)\varphi_1(i) - C_3(\alpha)][B_1(i)B_6(i)-B_5(i)B_2(i)] = 0$. Предположим, что $B_1(i)\,B_6(i) - B_5(i)\,B_2(i)= 0$. Подставляя явные выражения $B_1(i)$, $B_2(i)$, $B_5(i)$, $B_6(i)$ из (II), имеем: $f_\xi(i\beta_3)f_\xi(i\gamma_3)\ \times$ $\times\ [f_y(i\gamma_3)f_x(i\beta_3) - f_y(i\beta_3)f_x(i\gamma_3)]=0$. Но производные функции f отличны от нуля, скобка также отлична от нуля (показывается так же, как и неравенство нулю определителя (I0)). Таким образом, предположение о равенстве нулю выражения $B_1(i)B_6(i) - B_2(i)B_5(i)$ неверно. Предположим, что $C_1(\alpha)\varphi_1(i) - C_3(\alpha) = 0$. Если $C_1(\alpha)$ и $C_3(\alpha)$ отличны от нуля, то $\varphi_1(i) = \varphi_1(i,\ \beta_3\gamma_3) = C_3(k_3 l_3, \alpha\beta_3\gamma_3)$ / $C_1(k_3 l_3,\ \alpha\beta_3\gamma_3) = \lambda(\ \beta_3\ \gamma_3\ )$. Тогда из (I3) $B_3(i,\ \beta_3\gamma_3) -$ $- \lambda(\beta_3\gamma_3)B_1(i,\ \beta_3\ \gamma_3)=0$. Подставляя явные выражения $B_1(i)$, $B_3(i)$ из (II), имеем $f_\eta(i\beta_3) + \lambda(\beta_3\gamma_3)f_\xi(i\beta_3) = 0$. Такой вид уравнения ведет к зависимости между существенными параметрами, что противоречит условию А. Следовательно, соотношение $C_1(\alpha)\ \varphi_1(i)-C_3(\alpha) = 0$ может выполняться только при $C_1(\alpha) = C_3(\alpha) = 0$.

Рассмотрим определитель третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} B_1(i) & B_2(i) & C_2(\alpha) \\ B_3(i) & B_4(i) & C_4(\alpha) \\ B_5(i) & B_6(i) & C_6(\alpha) \end{vmatrix}$$

Предположим, что он равен нулю. Тогда, исследуя его подобным же образом, найдем, что $C_2(\alpha) = C_4(\alpha) = 0$. Следовательно, первое уравнение системы (I2) запишется в виде $f_x(i\alpha)B_1(i)+f_y(i\alpha)B_2(i) = 0$, что приводит к зависимости между существенными параметрами x_i, y_i и противоречит условию А.

Итак, показано, что определитель третьего порядка (I5) отличен от нуля и, следовательно, ранг матрицы коэффициентов системы (I2) равен трем.

Рассмотрим соотношение (I4):

$$\begin{vmatrix} B_1(i) & B_2(i) & C_1(\alpha) & C_2(\alpha) \\ B_3(i) & B_4(i) & C_3(\alpha) & C_4(\alpha) \\ B_5(i) & B_6(i) & C_5(\alpha) & C_6(\alpha) \\ B_7(i) & B_8(i) & C_7(\alpha) & C_8(\alpha) \end{vmatrix} = 0,$$

где $B_3(i)/B_1(i) = B_4(i)/B_2(i) = \varphi_1(i)$, $B_7(i)/B_5(i) = B_8(i)/B_6(i) = \varphi_2(i)$. Разложим определитель по первым двум столбцам:

$$-\begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ B_5 & B_6 \end{vmatrix}(i)\cdot\begin{vmatrix} C_3 & C_4 \\ C_7 & C_8 \end{vmatrix}(\alpha) + \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ B_7 & B_8 \end{vmatrix}(i)\cdot\begin{vmatrix} C_3 & C_4 \\ C_5 & C_6 \end{vmatrix}(\alpha) +$$

$$+\begin{vmatrix} B_3 & B_4 \\ B_5 & B_6 \end{vmatrix}(i)\cdot\begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ C_7 & C_8 \end{vmatrix}(\alpha) - \begin{vmatrix} B_3 & B_4 \\ B_7 & B_8 \end{vmatrix}(i)\cdot\begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ C_5 & C_6 \end{vmatrix}(\alpha) = 0.$$

Поделим соотношение на выражение $(B_1B_6 - B_2B_5)(i)$, которое отлично от нуля, как показано выше. Используя (I3), запишем:

$$-\begin{vmatrix} C_3 C_4 \\ C_7 C_8 \end{vmatrix}(\alpha)+\varphi_2(i)\begin{vmatrix} C_3 C_4 \\ C_5 C_6 \end{vmatrix}(\alpha)\,\varphi_1(i)\begin{vmatrix} C_1 C_2 \\ C_7 C_8 \end{vmatrix}(\alpha)-(\varphi_1\varphi_2)(i)\begin{vmatrix} C_1 C_2 \\ C_5 C_6 \end{vmatrix}(\alpha)=0. \quad (16)$$

Если $(C_1C_6-C_2C_5)(\alpha)$ равно нулю, то решаем систему из первых трех линейно-независимых уравнений системы (I2). Если $(C_1C_6-C_2C_5)(\alpha)$ отлично от нуля, поделим соотношение (I6) на это выражение

$$-\delta_1(\alpha) + \varphi_2(i)\delta_2(\alpha) + \varphi_1(i)\delta_3(\alpha) - (\varphi_1\varphi_2)(i) = 0, \quad (17)$$

где $\delta_1(\alpha) = (C_3C_8 - C_7C_4)(\alpha)/(C_1C_6 - C_2C_5)(\alpha)$, $\delta_2(\alpha) = (C_3C_6-C_4C_5)(\alpha)/(C_1C_6-C_2C_5)(\alpha)$, $\delta_3(\alpha) = (C_1C_8 - C_2C_7)(\alpha)/(C_1C_6-$

$-C_2C_5)(\alpha)$. Запишем соотношение (I7) для $k,l \in P(i_3)$:

$$\left.\begin{aligned} -\delta_1(\alpha)+\varphi_2(k)\delta_2(\alpha)+\varphi_1(k)\delta_3(\alpha)-(\varphi_1\varphi_2)(k) = 0, \\ -\delta_1(\alpha)+\varphi_2(l)\delta_2(\alpha)+\varphi_1(l)\delta_3(\alpha)-(\varphi_1\varphi_2)(l) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Рассмотрим систему из трех уравнений (I7), (I8) относительно неизвестных $\delta_1(\alpha)$, $\delta_2(\alpha)$, $\delta_3(\alpha)$. Покажем, что определитель при неизвестных отличен от нуля. Предположим обратное. Пусть

$$\begin{vmatrix} -1 & \varphi_2(i) & \varphi_1(i) \\ -1 & \varphi_2(k) & \varphi_1(k) \\ -1 & \varphi_2(l) & \varphi_1(l) \end{vmatrix}. \qquad (I9)$$

Разложим определитель по первой строке

$$-\begin{vmatrix} \varphi_2(k) & \varphi_1(k) \\ \varphi_2(l) & \varphi_1(l) \end{vmatrix} - \varphi_2(i)\begin{vmatrix} -1 & \varphi_1(k) \\ -1 & \varphi_1(l) \end{vmatrix} + \varphi_1(i)\begin{vmatrix} -1 & \varphi_2(k) \\ -1 & \varphi_2(l) \end{vmatrix} = 0. \qquad (2C)$$

Покажем, что определитель при $\varphi_2(i)$ отличен от нуля. Предположим обратное. Пусть $\varphi_1(k) = \varphi_1(l) = \text{const}$ (при фиксированных β_3, γ_3). Так как $k \in P(i_3)$, а все функции аналитичны в окрестности $P(i_3)$, то в точке $i \in P(i_3)$ $\varphi_1(i) = \text{const} = h_1$. Используя (I3), запишем первые два уравнения системы (I2) в виде:

$$f_x(i\alpha)B_1(i)+f_y(i\alpha)B_2(i)+f_\xi(i\alpha)C_1(\alpha)+f_\eta(i\alpha)C_2(\alpha) = 0,$$
$$h_1[f_x(i\alpha)B_1(i)+f_y(i\alpha)B_2(i)]+f_\xi(i\alpha)C_3(\alpha)+f_\eta(i\alpha)C_4(\alpha) = 0.$$

Умножая первое уравнение на h_1 и вычитая второе, получим $f_\xi(i\alpha)[h_1C_1(\alpha)-C_3(\alpha)] + f_\eta(i\alpha)[h_1C_2(\alpha) - C_4(\alpha)] = 0$. Если коэффициенты при $f_\xi(i\alpha)$ и $f_\eta(i\alpha)$ отличны ст нуля, то, как показано выше, в решение $f(i\alpha)$ параметры ξ_α, η_α входят несущественным образом, что противоречит условию А. Следовательно, $h_1C_1(\alpha)-C_3(\alpha) = 0$, $h_1C_2(\alpha) - C_4(\alpha) = 0$, что означает линейную зависимость между первым и вторым уравнениями системы (I2). Но выше было показано, что три первых уравнения системы (I2) линейно-независимы. Следовательно, коэффициент при $\varphi_2(i)$ в соотношении (I9) отличен от нуля. Поделим на этот коэффициент соотношение (I9) и зафиксируем точки $k,l \in P(i_3)$: $\varphi_2(i) = b_1\varphi_1(i) + b_2$, где b_1 и b_2 – константы. Отметим, что $b_1 \neq 0$ (показывается так же, как и неравенство нулю коэффициента при $\varphi_2(i)$). Подставим $\varphi_2(i) = b_1\varphi_1(i)+b_2$ в соотношение (I7) и зафиксируем α: $b_1\varphi_1^2(i) + m_1\varphi_1(i) + m_2 = 0$, где $b_1 \neq 0$.

Получаем $\varphi_1(i) = \text{const}$, что, как показано выше, приводит к нарушению условия А.

Итак, показано, что определитель (19) отличен от нуля. Разрешим систему (17), (18) относительно $\delta_1(\alpha), \delta_2(\alpha), \delta_3(\alpha)$: $\delta_1(\alpha) = \theta(ikl) = \text{const} = a_1$, $\delta_2(\alpha) = a_2$: $\delta_3(\alpha) = a_3$. Подставляя явные выражения $\delta_1(\alpha), \delta_2(\alpha)$, $\delta_3(\alpha)$ из (17), имеем

$$\begin{vmatrix} C_3 & C_4 \\ C_7 & C_8 \end{vmatrix}(\alpha) - a_1 \begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ C_5 & C_6 \end{vmatrix}(\alpha) = 0, \quad \begin{vmatrix} C_3 & C_4 \\ C_5 & C_6 \end{vmatrix}(\alpha) - a_2 \begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ C_5 & C_6 \end{vmatrix}(\alpha) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ C_7 & C_8 \end{vmatrix}(\alpha) - a_3 \begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ C_5 & C_6 \end{vmatrix} = 0.$$

Перепишем второе равенство

$$\begin{vmatrix} (C_3 - a_2 C_1) & (C_4 - a_2 C_2 \\ C_5 & C_6 \end{vmatrix}(\alpha) = 0. \tag{21}$$

В системе (12) умножим первое уравнение на a_2 и вычтем его из второго. Тогда первые три уравнения можно записать так:

$$\left.\begin{aligned} f_x(i\alpha)\ T_1(i) + f_y(i\alpha)\ T_2(i) + f_\xi(i\alpha)\ F_1(\alpha) + f_\eta(i\alpha)\ F_2(\alpha) &= 0, \\ f_x(i\alpha)\ B_1(i) + f_y(i\alpha)\ B_2(i) + f_\xi(i\alpha)\ C_1(\alpha) + f_\eta(i\alpha)\ C_2(\alpha) &= 0, \\ f_x(i\alpha)\ B_5(i) + f_y(i\alpha)\ B_6(i) + f_\xi(i\alpha)\ C_5(\alpha) + f_\eta(i\alpha)\ C_6(\alpha) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

где

$$\begin{gathered} \begin{vmatrix} T_1 & T_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}(i) = \begin{vmatrix} (B_3 - a_2 B_1) & (B_4 - a_2 B_2) \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}(i) = \begin{vmatrix} B_3 & B_4 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}(i) = 0, \\ \begin{vmatrix} F_1 & F_2 \\ C_5 & C_6 \end{vmatrix}(\alpha) = \begin{vmatrix} C_3 - a_2 C_1) & (C_4 - a_2 C_2) \\ C_5 & C_6 \end{vmatrix}(\alpha) = 0, \end{gathered} \tag{23}$$

вследствие (13) и (21). Упростим вид уравнений (22). Перейдем к новым переменным:

$$\begin{aligned} y_i' &= \lambda(x_i, y_i), \text{ так чтобы } \quad \lambda_x(i) T_1(i) + \lambda_y(i) T_2(i) = 0; \\ \eta_\alpha' &= \sigma(\xi_\alpha, \eta_\alpha), \text{ так чтобы } \quad \sigma_\xi(\alpha) F_1(\alpha) + \sigma_\eta(\alpha) F_2(\alpha) = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Заметим, что $T_1(i)$, $T_2(i)$ не могут быть одновременно равными нулю. Другими словами первое уравнение системы (22) будет иметь вид $f_\xi(i\alpha) F_1(\alpha) + f_\eta(i\alpha) F_2(\alpha) = 0$, в решение которого переменные ξ_α, η_α входят несущественным образом, что противоречит условию А.

То же относится к $F_1(\alpha)$, $F_2(\alpha)$. Таким образом, так как $T_1^2(i) + T_2^2(i) \neq 0$, $F_1^2(\alpha) + F_2^2(\alpha) \neq 0$, то уравнения (24) не имеют особых точек и могут быть решены методом характеристик. Запишем уравнения (22) в переменных $x_i, y_i', \xi_\alpha, \eta_\alpha'$, используя (23):

$$\left.\begin{aligned} & f_x(i\alpha)T_1(i) + f_\xi(i\alpha)F_1(\alpha) = 0, \\ & f_x(i\alpha)B_1(i) + f_\xi(i\alpha)C_1(\alpha) + f_{\eta'}(i\alpha)F_3(\alpha) = 0, \\ & f_x(i\alpha)B_5(i) + f_{y'}(i\alpha)T_3(i) + f_\xi(i\alpha)C_5(\alpha) = 0 . \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Проведем еще одну замену:

$$\left.\begin{aligned} & x_i' = \lambda_2(x_i, y_i'), \text{ так чтобы } \lambda_{2x}(i)B_5(i) + \lambda_{2y'}(i)T_3(i) = 0; \\ & \xi_\alpha' = \sigma_2(\xi_\alpha, \eta_\alpha'), \text{ так чтобы } \sigma_{2\xi}(\alpha)C_1(\alpha) + \sigma_{2\eta}(\alpha)F_3(\alpha) = 0 . \end{aligned}\right\} (26)$$

Уравнения (26) не имеют особых точек (по вышеприведенным соображениям) и могут быть решены методом характеристик. В переменных x_i', $y_i', \xi_\alpha', \eta_\alpha'$ система (25) имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} & f_{x'}(i\alpha)\, E_1(i) + f_{\xi'}(i\alpha)\theta_1(\alpha) = 0 , \\ & f_{x'}(i\alpha)\, E_2(i) + f_{\eta'}(i\alpha)\theta_2(\alpha) = 0 , \\ & f_{y'}(i\alpha)\, E_3(i) + f_{\xi'}(i\alpha)\theta_3(\alpha) = 0 . \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

Итак, имеем систему из трех линейно-независимых однородных дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных относительно неизвестной функции $f(i\alpha) = f(x_i', y_i', \xi_\alpha', \eta_\alpha')$. Для того чтобы система имела решение, необходимо выполнение уравнений совместности, получаемых путем образования $[\mu,\nu]$-скобок из μ-го и ν-го уравнений системы [6]. Система (27) является полной системой в смысле [6]. Действительно, присоединяя к системе (27) любое уравнение совместности, получаем систему из четырех уравнений относительно четырех "неизвестных" $f_{x'}(i\alpha), f_{y'}(i\alpha), f_{\xi'}(i\alpha), f_{\eta'}(i\alpha)$. Определитель такой системы должен быть равен нулю. Следовательно, любое уравнение совместности является линейной комбинацией уравнений системы, что и означает полноту системы (27).

Итак, система (27) полна, ее коэффициенты в некоторой окрестности отличны от нуля и непрерывно дифференцируемы. Следовательно, система имеет решение при выполнении условий совместности. В общем случае решение системы для неизвестной функции $f(x_1,\dots,x_n)$ имеет вид $f(x_1,\dots,x_n) = \chi[\Psi_1(x_1,\dots,x_n),\dots,\Psi_{n-m}(x_1,\dots,x_n)]$, где n – число переменных, m – число уравнений системы, $\Psi_1,\dots,\Psi_{n-m}$ – интегральный базис системы.

В рассматриваемом случае $n = 4$, $m = 3$, следовательно, $f(i\alpha) = f(x_i', y_i', \xi_\alpha', \eta_\alpha') = \chi[\Psi(x_i', y_i', \xi_\alpha', \eta_\alpha')]$, где $\Psi(x_i', y_i', \xi_\alpha', \eta_\alpha')$ – интеграл системы.

Решаем первое уравнение системы (27) методом характеристик (штрихи в дальнейшем опустим). Его интегральный базис: y_i, η_α, $\varphi(x_i,y_i) - \psi(\xi_\alpha,\eta_\alpha)$, т.е. $f(i\alpha) = \chi[y_i,\eta_\alpha, \varphi(i) - \psi(\alpha)]$. Введем переменные $y_0 = x_i$, $y_1 = y_i$, $y_2 = \eta_\alpha$, $y_3 = \varphi(i)-\psi(\alpha)$. Тогда первое уравнение дает $f_{y_0}(y_0,y_1,y_2,y_3) = 0$. Второе и третье уравнения запишутся в виде:

$$f_{y_2}\theta_2(\alpha)+f_{y_3}[\varphi_x(i)E_2(i)-\psi_\eta(\alpha)\theta_2(\alpha)] = 0,$$

$$f_{y_1}E_3(i)+f_{y_3}[\varphi_y(i)E_3(i)-\psi_\xi(\alpha)\theta_3(\alpha)] = 0.$$

Заметим, что $\theta_2(\alpha)$ и $E_3(i)$ отличны от нуля. Обратное ведет к уменьшению ранга системы, что не допускается. Поделим первое уравнение на $\theta_2(\alpha)$, второе на $E_3(i)$ и введем дополнительные переобозначения:

$$\left.\begin{aligned} &f_{y_2}+f_{y_3}[A_1(i)R_1(\alpha) - R_2(\alpha)] = 0, \\ &f_{y_1}+f_{y_3}[A_3(i) - A_2(i)R_3(\alpha)] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Найдем вид коэффициентов при f_{y_3} в переменных y_1, y_2, y_3: $A_1(i)R_1(\alpha) - R_2(\alpha) = -f_{y_2}/f_{y_3} = \chi_1[y_i,\eta_\alpha,\varphi(i) - \psi(\alpha)]$. Для удобства введем переобозначения $\varphi(i) = x_i$, $\psi(\alpha) = \xi_\alpha$:

$$A_1(i)R_1(\alpha)-R_2(\alpha) = \chi_1[y_i, \eta_\alpha, x_i-\xi_\alpha]. \tag{29}$$

Дифференцируем (29) по x_i: $A_{1_{x_i}}(i)\,R_1(\alpha) = \chi_{1_{y_3}}$. Дифференцируем (29) по ξ_α: $A_1(i)R_{1_{\xi_\alpha}}(\alpha)-R_{2_{\xi_\alpha}}(\alpha) = -\chi_{1_{y_3}}$. Сложим полученные соотношения:

$$A_{1_x}(i)+A_1(i)R_{1_\xi}(\alpha)/R_1(\alpha)-R_{2_\xi}(\alpha)/R_1(\alpha) = 0. \tag{30}$$

Запишем эти соотношения для точки $k \in P(i_3)$:

$$A_{1_x}(k)+A_1(k)R_{1_\xi}(\alpha)/R_1(\alpha)-R_{2_\xi}(\alpha)/R_1(\alpha) = 0. \qquad (31)$$

Покажем, что определитель системы (30), (31) относительно $R_{1_\xi}(\alpha)/R_1(\alpha)$ и $R_{2_\xi}(\alpha)/R_1(\alpha)$ не равен нулю. Предположим обратное. Тогда $A_1(i) = A_1(k) = const = a$; $A_1(i)R_1(\alpha)-R_2(\alpha)=aR_1(\alpha)-R_2(\alpha) = \chi[y_1, \eta_\alpha, x_1-\xi_\alpha]$. Легко найти, что $aR_1(\alpha)-R_2(\alpha) = Q(\eta_\alpha) = Q(y_2)$. Первое уравнение запишется в виде $f_{y_2}+f_{y_3}Q(y_2) = 0$. Его решение $f(i\alpha) = \chi[y_1, y_3+\lambda(y_2)]=\chi[y_1, x_1-(\xi_\alpha - \lambda_2(\eta_\alpha))]$ несущественным образом зависит от параметров ξ_α, η_α , что противоречит условию А. Итак, $A_1(i)-A_1(k)\neq 0$, и из уравнений (30), (31) можно найти: $R_{1_\xi}(\alpha)/R_1(\alpha) = \theta_1(i,k) = const = b_1$, $R_{2_\xi}(\alpha)/R_1(\alpha) = b_2$, $A_{1_x}(i) + b_1A(i) - b_2 = 0$. Тогда $R_1(\alpha) = \sigma_1(\eta_\alpha) \exp b_1\xi_\alpha$, $R_2(\alpha) = b_2b_1^{-1}\sigma_1(\eta_\alpha)[\exp b_1\xi_\alpha - \exp b_1\bar{\xi}] + \mu_2(\eta_\alpha)$, где $\bar{\xi} = const$. Величину $A_1(i)$ найдем методом вариации произвольных постоянных: $A_1(i) = [\nu_1(y_1) - b_2b_1^{-1} \exp b_1\bar{x}]\exp(-b_1x_1) + b_2b_1^{-1}$. Окончательно: $A_1(i)R_1(\alpha) - R_2(\alpha)=\lambda_1(y_1)\sigma_1(y_2)\exp(-b_1y_3) + \sigma_2(y_2)$, где $\lambda_1(y_1) = \nu_1(y_1)-b_2b_1^{-1}\exp b_1\bar{x}$; $\sigma_2(y_2)=\mu_2(y_2)+b_2b_1^{-1}\exp b_1\bar{\xi}$; $\bar{x}, \bar{\xi}$ - константы. Проводя подобные преобразования с коэффициентом $A_3(i) - R_3(\alpha)\cdot A_2(i)$, получим

$$\left.\begin{aligned} -f_{y_1}+f_{y_3}[\lambda_3(y_1) + \lambda_2(y_1)\sigma_3(y_2)\exp a_1y_3] = 0, \\ f_{y_2}+f_{y_3}[\sigma_2(y_2) + \lambda_1(y_1)\sigma_1(y_2)\exp(-b_1y_3)] = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

где $\lambda_3(y_1)=\nu_3(y_1)+a_2a_1^{-1}\lambda_2(y_1)\exp a_1\bar{x}$; $\lambda_1(y_1)=\nu_1(y_1)-b_2b_1^{-1} \exp b_1\bar{x}$; $\sigma_3(y_2)=\mu_3(y_2)-a_2a_1^{-1}\exp a_1\bar{\xi}$; $\sigma_2(y_2)=\mu_2(y_2)+b_2b_1^{-1}\sigma_1(y_2)\exp b_1\bar{\xi}$.

Найдем условие совместности системы (32). Запишем в общем виде систему однородных дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных:

$$\sum_{k=1}^{n} \neq \varphi^{\mu k}(x_1,\ldots,x_n)\cdot \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0; \ \mu=1,2,\ldots,m,$$

где m - число уравнений. Тогда уравнения совместности будут иметь вид [6]:

$$\sum_{\rho=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}(\varphi^{\mu\rho}_{x_k}\varphi^{\nu\rho} - \varphi^{\nu\rho}_{x_k}\varphi^{\mu\rho})\frac{\partial f}{\partial x_\rho}\right\} = 0,$$

где $\mu,\nu = 1,2,\dots,m$. Для системы (32) $n = 3$, $m = 2$ и коэффициенты имеют вид:

$$\varphi^{11}=-1;\ \varphi^{12}=0;\ \varphi^{13}=\lambda_3(y_1)+\lambda_2(y_1)\sigma_3(y_2)\exp a_1y_3,$$
$$\varphi^{21}=0;\ \ \varphi^{22}=1;\ \varphi^{23}=\sigma_2(y_2)+\lambda_1(y_1)\sigma_1(y_2)\exp(-b_1y_3).$$

Подставляя в (33), получим:

$$(\lambda_1\lambda_2)(y_1)(\sigma_1\sigma_3)(y_2)(a_1+b_1)\cdot\exp[(a_1-b_1)y_3] + \lambda_2(y_1)[\sigma_{3_{y_2}} +$$
$$+a_1(\sigma_3\sigma_2)(y_2)]\exp a_1y_3+\sigma_1(y_2)[\lambda_{1_{y_1}}+b_1(\lambda_1\lambda_2)(y_1)]\exp(-b_1y_3)=0. \quad (34)$$

Рассмотрим соотношение (34) при $a_1\neq 0$, $b_1\neq 0$. Тогда коэффициент при $\exp[(a_1-b_1)y_3]$, зависящий только от y_1, y_2, равен нулю, вследствие существенности переменных $x_i, y_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha$. (Напомним, что $y_3 = x_i-\xi_\alpha$, $y_2=\eta_\alpha$, $y_1=y_i$.)

$$(\lambda_1\lambda_2)(y_1)\cdot(\sigma_1\sigma_3)(y_2)\cdot(a_1+b_1) = 0. \quad (35)$$

Ни одна из функций, входящих в выражение (35), не равна нулю. Предположим обратное. Пусть, например, $\lambda_1(y_1)=0$. Тогда I-е уравнение системы (32): $-f_{y_1}+f_{y_3}\cdot\lambda_3(y_1)=0$ имеет интеграл, в который переменные x_i, y_i входят несущественным образом, что нарушает условие А. Аналогично показывается, что $\lambda_2(y_1)$, $\sigma_1(y_2)$, $\sigma_3(y_2)$ отличны от нуля. Таким образом, из (35) имеем $a_1+b_1 = 0$.

Сокращая в (34) на $\exp a_1y_3$, получим:

$$\frac{-\lambda_{1_{y_1}} + a_1(\lambda_1\lambda_2)(y_1)}{\lambda_2(y_1)} = \frac{\sigma_{3_{y_2}} + a_1(\lambda_3\lambda_2)(y_2)}{\sigma_1(y_2)} = h_1. \quad (36)$$

Это и есть условие совместности системы (32) при $a_1=-b_1$:

$$\left.\begin{aligned} -f_{y_1}+f_{y_3}[\lambda_3(y_1) + \lambda_2(y_1)\sigma_3(y_2)\exp a_1y_3] = 0, \\ f_{y_2}+f_{y_3}[\sigma_2(y_2) + \lambda_1(y_1)\sigma_1(y_2)\exp a_1y_3] = 0, \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

где $\lambda_3(y_1) = \nu_3(y_1) + a_2a_1^{-1}\lambda_2(y_1)\exp a_1\bar{x}$; $\lambda_1(y_1) = \nu_1(y_1) + b_2a_1^{-1}\exp(-a_1\bar{x})$; $\sigma_3(y_2) = \mu_3(y_2)-a_2a_1^{-1}\exp a_1\bar{\xi}$; $\sigma_2(y_2)=\mu_2(y_2) - b_2a_1^{-1}\cdot\exp(-a_1\bar{\xi})\cdot\sigma_1(y_2)$. Отметим, что коэффициенты при f_{y_3} имеют смысл при любых значениях a_1, a_2, b_2, в том числе и нулевых.

Будем различать два случая: $a_1 \neq 0$; $a_1 = 0$. Рассмотрим случай $a_1 \neq 0$.

Исключая $\exp a_1 y_3$ из уравнений системы (37), преобразуем ее к виду:

$$
\begin{aligned}
&f_{y_1}(\lambda_1 \lambda_2^{-1})(y_1) + f_{y_2}(\sigma_3\sigma_1^{-1})(y_2) + f_{y_3}[(\sigma_3\sigma_2\sigma_1^{-1})(y_2) - (\lambda_3\lambda_1\lambda_2^{-1})(y_1)] = 0, \\
&f_{y_2}\sigma_1^{-1}(y_2) + f_{y_3}[(\sigma_2\sigma_1^{-1})(y_2) + \lambda_1(y_1)\exp a_1 y_3] = 0,
\end{aligned}
\qquad (38)
$$

что вполне возможно, так как $\lambda_2(y_1) \neq 0$, $\sigma_1(y_2) \neq 0$. Интегралы первого уравнения легко находятся методом характеристик: $y_3 + \varphi_1(y_1) - \psi_1(y_2)$, $\varphi_2(y_1) - \psi_2(y_2)$, где $\varphi_1(y_1) = \int \lambda_3(y_1) d_{y_1}$; $\varphi_2(y_1) = \int(\lambda_2\lambda_1^{-1})(y_1)dy_1$; $\psi_1(y_2) = \int \sigma_2(y_2)dy_2$; $\psi_2(y_2) = \int(\sigma_3\sigma_1^{-1})(y_2)dy_2$. Проведем замену переменных: $\rho_0 = y_1$; $\rho_1 = \varphi_2(y_1) - \psi_2(y_2)$; $\rho_2 = y_3 + \varphi_1(y_1) - \psi_1(y_2)$. Первое уравнение системы (38) дает $f_{\rho_0} = 0$. Второе уравнение будет иметь вид:

$$
f_{\rho_1}\sigma_1^{-1}(y_2)(-\psi_{2y_2}) + f_{\rho_2}[-\psi_{1y_2}\sigma_1^{-1}(y_2) + (\sigma_2\sigma_1^{-1})(y_2) + \lambda_1(y_1)\exp a_1 y_3] = 0.
$$

Подставив явный вид функций $\psi_1(y_2)$, $\psi_2(y_2)$, получим после пере - обозначений:

$$
f_{\rho_1} + f_{\rho_2} A_1(y_1) \cdot B_1(y_2) \exp a_1\rho_2 = 0. \qquad (39)
$$

Из (39) $A_1(y_1)\, B_1(y_2) = -(f_{\rho_1}/f_{\rho_2}) \cdot \exp(-a_1\rho_2) = \chi(\rho_1, \rho_2) = \chi[\varphi_2(y_1) - \psi_2(y_2);\ y_3 + \varphi_1(y_1) - \psi_1(y_2)]$. Это функциональное уравнение легко решается: $A_1(y_1)B_1(y_2) = c_1 \exp(c_2\rho_1)$. Уравнение (39) принимает вид:

$$
f_{\rho_1} + f_{\rho_2} c_1 \exp(c_2\rho_1 + a_1\rho_2) = 0. \qquad (40)
$$

Решая методом характеристик, находим интеграл:

$$
C = c_2^{-1}[\exp c_2\rho_1 - \exp c_2\bar{\rho}_1] + a_1^{-1}[\exp(-a_1\rho_2) - \exp(-a_1\bar{\rho}_2)], \qquad (41)
$$

где $\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2$ - константы. Возвращаясь к переменным $x_i, y_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha$ и вводя дополнительные преобозначения, имеем

$$
a_{i\alpha} = f(i\alpha) = \chi_1[p_1(i)q_1(\alpha) + p_2(i)q_2(\alpha)], \qquad (42)
$$

где $i \in P(i_3) \subset P(i_1)$; $\alpha \in Q(\alpha_3) \subset Q(\alpha_1)$.

Соотношение (42) дает параметрическое задание функции $a: P(i_1) \times Q(\alpha_1) \to R$. С точностью до переобозначения оно совпадает с выражением, приведенным в формулировке теоремы.

Из выражения (4I) можно получить интересное частное решение при $c_2 = 0$:

$$C = (\rho_1 - \bar{\rho}_1) + a_1^{-1}[\exp(-a_1\rho_2) - \exp(-a_1\bar{\rho}_2)] \ . \tag{43}$$

Возвращаясь к переменным $x_i, y_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha$, имеем:

$$a_{i\alpha} = f(i\alpha) = \chi_2[\varphi_2(i) - \psi_1(\alpha) + p_2(i)\cdot q_2(\alpha)]. \tag{44}$$

Используя параметрическое представление (42), легко получить уравнение (3), задающее множество значений функций $A: [P(i_1)]^3 \times \times [Q(\alpha_1)]^3 \to R^9$.

Аналитическое множество значений функций $A: [P(i_1)]^3 \times [Q(\alpha_1)]^3$ для параметрического представления (44) задается уравнением:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \phi(a_{i\alpha}) & \phi(a_{i\beta}) & \phi(a_{ij}) \\ 1 & \phi(a_{k\alpha}) & \phi(a_{k\beta}) & \phi(a_{k\gamma}) \\ 1 & \phi(a_{l\alpha}) & \phi(a_{l\beta}) & \phi(a_{l\gamma}) \end{vmatrix} = 0, \tag{45}$$

где $i, k, l \in P(i_1)$; $\alpha, \beta, \gamma \in Q(\alpha_1)$.

Случай $a_1 \neq 0$ рассмотрен полностью.

Рассмотрим случай $a_1 = 0$. Система (37) при $a_1 = 0$ принимает вид:

$$\left.\begin{aligned} -f_{y_1} + f_{y_3'}[\nu_3(y_1) + \lambda_2(y_1)\mu_3(y_2) - a_2\lambda_2(y_1)y_3' \ ] = 0, \\ f_{y_2} + f_{y_3'}[\mu_2(y_2) + \nu_1(y_1)\sigma_1(y_2) + b_2\sigma_1(y_2)y_3' \ ] = 0, \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

где $y_3' = y_3 - \bar{x} + \bar{\xi}$. Перейдем к переменным

$$y_1' = \int\lambda_2(y_1)dy_1; \quad y_2' = \int\sigma_1(y_2)dy_2:$$

$$\left.\begin{aligned} -f_{y_1'} + f_{y_3'}[\nu_3'(y_1') + \mu_3(y_2') - a_2y_3'] = 0, \\ f_{y_2'} + f_{y_3'}[\mu_2'(y_2') + \nu_1(y_1') + b_2y_3'] = 0, \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

где $\nu_3'(y_1') = \nu_3(y_1')/\lambda_2(y_1')$; $\mu_2'(y_2') = \mu_2(y_2')/\sigma_1(y_2')$. Решаем первое уравнение методом характеристик. Его интегральный базис: y_2,

$y_3\exp(-a_2y_1) + \mu_3(y_2)\int\exp(-a_2y_1)dy_1 + \int\nu_3(y_1)\exp(-a_2y_1)dy_1$ (штрихи опустим). Проведем замену переменных: $\rho_0 = y_1$; $\rho_1 = y_2$, $\rho_2 = y_3\exp(-a_2y_1) + \mu_3(y_2)\int\exp(-a_2y_1)dy_1 + \int \nu_3(y_1) \exp(-a_2y_1)dy_1$. Первое уравнение дает $f_{\rho_0} = 0$. Второе уравнение

$$f_{\rho_1}+f_{\rho_2}\{\mu_{3y_2}\int\exp(-a_2y_1)dy_1+[b_2y_3+\mu_2(y_2)+\nu_1(y_1)]\exp(-a_2y_1)\} = 0.$$

Условие совместности системы (47) имеет вид:

$$\nu_{1y_1}-a_2\nu_1(y_1)-b_2\nu_3(y_1)=-\mu_{3y_2}+b_2\mu_3(y_2)+a_2\mu_2(y_2) = \text{const}=h_1. \quad (48)$$

С помощью условия (48) второе уравнение приводится к виду: $f_{\rho_1} + f_{\rho_2}[b_2\rho_2 + c_0\mu_2(\rho_1) + c_1]=0$. Решая методом характеристик, получаем интеграл $C = \rho_2\exp(-b_2\rho_1)-\int[c_0\mu_2(\rho_1) + c_1]\exp(-b_2\rho_1)d\rho_1$. Вернемся к переменным y_1, y_2, y_3:

$$C = [y_3 \exp(-a_2y_1) + \mu_3(y_2)\int\exp(-a_2y_1)dy_1 +$$

$$+\int\nu_3(y_1)\exp(-a_2y_1)dy_1] \exp(-b_2y_2)-c_0\int\mu_2(y_2)\exp(-b_2y_2)dy_2+$$

$$+ c_1\int \exp(-b_2y_2)dy_2. \quad (49)$$

Из условия (48): $\mu_{3y_2} = b_2\mu_3(y_2) + a_2\mu_2(y_2) - h_1$, откуда

$$\mu_3(y_2)\exp(-b_2y_2)=a_2\int\mu_2(y_2)\exp(-b_2y_2)dy_2-h_1\int\exp(-b_2y_2)dy_2+c_2.$$

Подставим $\mu_3(y_2)\exp(-b_2y_2)$ в (49). После преобразований получим:

$$C = [y_3+T_1(y_1)-E_1(y_2)]\exp(-a_2y_1-b_2y_2) + c_2\int\exp(-a_2y_1)dy_1 +$$

$$+ c_1\int\exp(-b_2y_2)dy_2+h_1[\int\exp(-a_2y_1)dy_1]\cdot[\int\exp(-b_2y_2)dy_2], \quad (50)$$

где

$$T_1(y_1) = (\exp a_2y_1)\cdot\int\nu_3(y_1)\exp(-a_2y_1)dy_1;$$

$$E_1(y_2) = (\exp b_2y_2)\cdot\int\mu_2(y_2)\exp(-b_2y_2)dy_2 .$$

Если $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, то интеграл (50) преобразуется к виду $c = p_1(i)q_1(\alpha) + p_2(i)\,q_2(\alpha)$, т.е. $a_{i\alpha} = f(i\alpha) = \chi_1[p_1(i)\,q_1(\alpha) + p_2(i)\,q_2(\alpha)]$, где функция $\chi_1(i\alpha)$ строго монотонная и имеет обратную $\chi_1^{-1}(i\alpha)$. Это решение с точностью до переобозначений такое же, как и в случае $a_1 \neq 0$. Заметим, что при $a_2 = 0, b_2 \neq 0$; $a_2 \neq 0$, $b_2 = 0$: $a_2 = b_2 = 0$ решение преобразуется к виду: $a_{i\alpha} = f(i\alpha) = \chi_2[p_1(i)\cdot q_1(\alpha) + p_2(i) + q_2(\alpha)]$, который также имел место в случае $a_1 \neq 0$. Теорема доказана.

Автор выражает глубокую благодарность Кулакову Ю.И. и Михайличенко Г.Г. за многочисленные полезные замечания и обсуждения.

Литература

1. КУЛАКОВ Ю.И. Элементы теории физических структур.-Новосибирск: НГУ, 1968.

2. КУЛАКОВ Ю.И. О новом виде симметрии, лежащем в основании физических теорий феноменологического типа.-Докл. АН СССР, 1971, том 201, №3, с. 570-572.

3. КУЛАКОВ Ю.И. Математическая формулировка теории физических структур. -Сиб.матем.ж. 1971, том XII, с.1142-1145.

4. МИХАЙЛИЧЕНКО Г.Г. Решение функциональных уравнений в теории физических структур. -Докл. АН СССР 1972, том 206, №5, с.1056-1058.

5. МИХАЙЛИЧЕНКО Г.Г. Бинарная физическая структура ранга (3,2). -Сиб. матем. ж., 1973, том XIV, №5, с. 1057-1064.

6. КАМКЕ Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка.-М.: Наука, 1966.

7. МИХАЙЛИЧЕНКО Г.Г. Двумерные геометрии.-Докл. АН СССР, 1981, том 260, № 4, с. 803-805.

Поступила в ред.-изд.отд.
21 ноября 1983 года