СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ СИМВОЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ
(Вычислительные системы)
1984 год Выпуск 101

УДК 519.1-7:007.62-50

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ МОЩНОСТЬ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ШКАЛ

Н.Г.Загоруйко, Л.Я.Савельев

1. Введение

Известно, что шкалы разных типов [1,2] обладают различной потенциальной информативностью. По информативности распространенные типы шкал упорядочиваются так: абсолютная, отношений, разностей, порядка и наименований. Вместе с тем известно, что чем информативнее шкалы, тем дороже, сложнее измерительный прибор или измерительная процедура. Этим объясняется факт широкого использования приборов со шкалами более слабыми, чем абсолютная. Однако вопрос о том, какова относительная информативность различных шкал, остается открытым.

Чем сильнее шкала, тем больше различных эмпирических ситуаций будет фиксироваться разными (неизоморфными) протоколами. Мы будем пользоваться понятием мощности шкалы, связь которого с понятием информативности состоит в следующем. При измерении отношений на множестве из n объектов приборами с разными типами шкал, но с одинаковым числом (m) значений (градаций) этих шкал мы получим тем больше разных (неизоморфных) протоколов, чем сильнее (информативнее) шкала. Мощность шкалы $\mu(n\ m)$ будем оценивать числом возможных неизоморфных протоколов, получаемых при измерении n объектов шкалой с m градациями.

Предметом данной статьи служит получение оценок мощности шкал трех типов - абсолютной, порядковой и номинальной, и исследование асимптотики отношения мощностей этих шкал при росте числа измеряемых объектов n. Основной вывод состоит в том, что если число возможных значений шкалы m фиксировано, а число объектов n

превышает m в 5–10 раз, то мощности абсолютной и порядковой шкал существенно превышают мощность номинальной шкалы, а друг другу эквивалентны. Это может служить основанием для использования порядковой шкалы с фиксированным конечным множеством значений вместо более сильных шкал, в частности, абсолютной.

2. Постановка задачи

В статье исследуются мощности абсолютной, порядковой и номинальной шкал. Это позволяет определить шкалу как множество с группой допустимых автоморфизмов, не связывая их с какими-нибудь отношениями.

2.1. Определения.

2.1.1. Назовем частичным автоморфизмом множества Y каждое взаимно-однозначное отображение $\varphi: A \to B$ части $A \subseteq Y$ на часть $B \subseteq Y$. Автоморфизмы Y на Y будем называть полными. Скажем, что множество Ψ частичных автоморфизмов множества Y образует группу, когда:

1) тождественный автоморфизм $e: Y \to Y$ принадлежит Ψ;

2) если автоморфизм φ принадлежит Ψ, то обратный автоморфизм φ^{-1} принадлежит Ψ;

3) если накрывающие автоморфизмы $\varphi: A \to B$ и $\xi: B \to C$ принадлежат Ψ, то их композиция $\xi \circ \varphi: A \to C$ принадлежит Ψ;

4) каждое сужение любого автоморфизма из Ψ принадлежит Ψ.

Пункт 3 определения обеспечивает принадлежность Ψ композиций только специально выбранных пар автоморфизмов. Композиция произвольных автоморфизмов из Ψ может не принадлежать Ψ.

2.1.2. Возьмем множество Γ полных автоморфизмов Y на Y, образующих группу относительно композиции в обычном смысле, и добавим все их сужения. Полученное множество Ψ, как легко проверить, образует группу в смысле данного определения.

Когда это не ведет к путанице, будем отождествлять отображения и их сужения.

2.1.3. Шкала (Y,Ψ) состоит из множества Y значений и группы Ψ допустимых автоморфизмов.

Группу Ψ частичных автоморфизмов для множества Y, фигурирующую в определении шкалы, часто связывают с системой отношений в множестве Y и включают эти отношения в определение шкалы [1–3]. Для исследования мощности шкалы система отношений не нужна. Поэтому они не включены в данное определение шкалы.

2.1.4. Рассмотрим множество X. Отображение $f: X \to Y$ называем измерением множества X в шкале (Y,Ψ).

Измерения $f: X \to Y$ и $g: X \to Y$, получающиеся друг из друга с помощью допустимых автоморфизмов, считаются эквивалентными и отождествляются: $g \equiv f \Leftrightarrow g = \varphi \circ f \quad (\varphi \in \Psi)$.

Легко проверить, что отношение $\equiv$ есть эквивалентность для множества F всех измерений X в (Y, Ψ). В самом деле, отношение $\equiv$ рефлексивно, так как $f = e \circ f$, $e \in \Psi$. Оно симметрично, так как $g=\varphi \circ f$ влечет $f=\varphi^{-1} \circ g$, а $\varphi \in \Psi$ влечет $\varphi^{-1} \in \Psi$. Докажем транзитивность отношения $\equiv$. Возьмем измерения $f, g, h: X \to Y$ с образами $A = fX$, $B = gX$, $C = hX$. Предположим, что $h=\bar{\xi} \circ g$, $g=\bar{\varphi} \circ f$ при некоторых $\bar{\xi}, \bar{\varphi} \in \Psi$. Рассмотрим сужения $\varphi: A \to B$, $\xi: B \to C$ автоморфизмов $\bar{\varphi}$, $\bar{\xi}$. Ясно, что $h=\xi \circ g$, $g=\varphi \circ f$ и $h=(\xi \circ \varphi) \circ f$. По данному определению группы автоморфизмов ξ, φ и вместе с ними $\xi \circ \varphi$ принадлежат Ψ. Следовательно, $h \equiv g$, $g \equiv f$ влекут $h \equiv f$.

2.1.5. Факторизуем множество измерений F по отношению эквивалентности $\equiv$. Полученный фактор-класс обозначим F/Ψ. Измерения, принадлежащие одному и тому же множеству этого класса, эквивалентны. А измерения, принадлежащие разным множествам класса F/Ψ, не эквивалентны.

Измерения обычно называют протоколами. Эквивалентность измерений равносильна изоморфности протоколов.

Мощностью шкалы (Y,Ψ) при измерении множества X называется мощность фактор-класс F/Ψ. Если множества X и Y конечны, то эта мощность равна наибольшему числу неэквивалентных измерений (или неизоморфных протоколов).

Задача заключается в вычислении и сравнении мощностей различных шкал.

2.2. Примеры шкал. Самыми простыми и вместе с тем шкалами являются абсолютная, порядковая и номинальная. В соответствии с поставленной задачей о вычислении и сравнении мощностей им даются абстрактные определения.

2.2.1. Абсолютная шкала $\mathcal{A} = (Y, \{e\})$. В этой шкале допустимыми автоморфизмами являются тождественный автоморфизм $e: Y \to Y$ и его сужения. Коротко: $\Psi = \{e\}$.

Измеряя объект $x \in X$ в абсолютной шкале $\mathcal{A}$, можно сказать, к какой категории $y \in Y$ он относится по выбранным признакам. Например, если $Y = \{1,2,\dots,1000\}$, то, пользуясь абсолютной шкалой, можно сказать, сколько человеку лет. А если $Y = \{м,з,с\}$ (молодость, зрелость, старость) – сказать, в какой он фазе жизни.

Измерить множество X в абсолютной шкале $\mathcal{A}$ - значит разбить X на части и пометить их различными элементами из Y, т.е. отобразить X в Y. Разбиение множества X, определяемое измерением $X \to Y$, имеет мощность, меньшую или равную мощности $|Y|$ множества Y. Поэтому если $|X| > |Y|$, то не все разбиения множества X получаются при измерениях $X \to Y$.

2.2.2. Порядковая шкала $\mathcal{O} = (Y, \mathrm{Ord}\ Y)$. В этой шкале для множества Y определен линейный порядок $\le$ и допустимы сохраняющие его частичные автоморфизмы: $\Psi = \mathrm{Ord}\ Y$.

Измеряя объекты $x_1, x_2 \in X$ в порядковой шкале $\mathcal{O}$, можно сказать, какой из них в меньшей, а какой в большей мере обладает выбранными признаками: $f(x_1) = y_1 \le y_2 = f(x_2)$ или $f(x_2) = y_2 \le y_1 = f(x_1)$. Сами значения y_1, y_2 роли не играют, так как любая другая упорядоченная пара $z_1 \le z_2$ $(z_1 = g(x_1), z_2 = g(x_2))$ получается из пары $y_1 \le y_2$ некоторым допустимым автоморфизмом φ и измерения f, $g = \varphi \circ f$ эквивалентны.

Например, если $Y = \{1, 2, \ldots, 1000\}$ и $1 \le 2 \le \ldots \le 1000$, то, пользуясь порядковой шкалой, можно сказать, кто из двух людей моложе, а кто старше. Если $Y = \{м, з, с\}$ и $м \le з \le с$, то можно сказать, кто из них в более ранней фазе жизни, а кто в более поздней.

Измерить множество X в порядковой шкале $\mathcal{O}$ - значит разбить X на части и линейно упорядочить их в соответствии с порядком для Y, т.е. предупорядочить X подобно Y.

Если $|X| > |Y|$, то не все линейные предпорядки для X получатся при измерениях $X \to Y$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Предпорядком называется рефлексивное и транзитивное, но не обязательно антисимметричное отношение. Предпорядок $\le$ для множества X определяет отношение эквивалентности: $x_1 \equiv x_2$ означает, что $x_1 \le x_2$ и $x_2 \le x_1$. Факторизация множества X по этому отношению восстанавливает исходный порядок в рассматриваемся разбиении множества X.

Как обычно, $x_2 \ge x_1$ означает $x_1 \le x_2$, а $x_1 < x_2$ и $x_2 > x_1$ означают $x_1 \le x_2$, $x_1 \ne x_2$.

2.2.3. Номинальная шкала $\mathcal{N} = (Y, \mathrm{Aut}\ Y)$. В этой шкале допустимыми являются любые автоморфизмы: $\Psi = \mathrm{Aut}\ Y$.

Измеряя объекты $x_1, x_2 \in X$ в номинальной шкале $\mathcal{N}$, можно сказать только, в одинаковой мере они обладают выбранными свойствами или в разной: $f(x_1) = y_1 = y_2 = f(x_2)$ или $f(x_1) = y_1 \ne y_2 = f(x_2)$. Сами значения y_1 y_2 роли не играют, так как любые другие $z_1 \ne z_2$

($z_1 = g(x_1)$, $z_2 = g(x_2)$) получаются из $y_1 \neq y_2$ некоторым допустимым автоморфизмом φ и измерения f, $g=\varphi\circ f$ эквивалентны.

Например, если $Y = \{1,2,\dots,1000\}$, то, пользуясь номинальной шкалой, можно сказать о двух людях только, одногодки они или нет. Если $Y = \{м,з,с\}$ – в одной они фазе жизни или в разных.

Измерить множество X в номинальной шкале $\mathcal{N}$ – значит просто разбить X на $|Y|$ или меньше частей, т.е. определить для X некоторое отношение эквивалентности (при котором в X может быть не больше $|Y|$ попарно неэквивалентных элементов). Если $|X| > |Y|$, то не все разбиения X получатся при измерениях $X \to Y$. Например, по фазам жизни все человечество делится только на три части.

ЗАМЕЧАНИЕ. Сравнивая абсолютную, порядковую и номинальную шкалы с одним и тем же множеством значений Y, видим, что в этих шкалах последовательно увеличивается группа допустимых автоморфизмов: $\{e\} \subseteq \mathrm{Ord}\, Y \subseteq \mathrm{Aut}\, Y$. А число неэквивалентных измерений, которые можно провести в этих шкалах, соответственно уменьшается. (Потому что все больше измерений отождествляется.)

2.2.4. Аффинные шкалы. В этих шкалах допустимыми автоморфизмами являются аффинные преобразования.

Шкала разностей $\mathcal{D} = (Y, \mathrm{Trans}\, Y)$. В этой шкале значениями являются элементы аддитивной абелевой группы $(Y,+)$, а допустимыми автоморфизмами являются аддитивные переносы (и их сужения): $\Psi = \mathrm{Trans}\, Y$.

В частности, $(Y,+)$ может быть аддитивной группой линейного пространства или поля, например, поля вещественных чисел.

Линейная шкала $\mathcal{L} = (Y, \mathrm{Lin}\, Y)$. В этой шкале значениями являются точки линейного пространства $(Y,+,\cdot)$, а допустимыми автоморфизмами являются обратимые линейные преобразования (и их сужения): $\Psi = \mathrm{Lin}\, Y$.

В частности, $(Y,+,\cdot)$ может быть стандартным n-мерным пространством над полем вещественных чисел. В этом случае допустимыми автоморфизмами часто считают только преобразования подобия с центром в нуле и строго положительными коэффициентами (гомотетии). Получающуюся шкалу называют шкалой отношений.

Общая аффинная шкала $\mathcal{A}ff = (Y, \mathrm{Aff}\, Y)$. Эта шкала получается объединением двух предыдущих. Значениями в ней тоже являются точки линейного пространства, а допустимыми автоморфизмами являются аффинные преобразования (композиции обратимых линейных преобразований с аддитивными переносами и их сужения): $\Psi = \mathrm{Aff}\, Y$.

Если $(Y, +, \cdot)$ – стандартное n-мерное пространство над полем вещественных чисел, то допустимыми автоморфизмами часто считают только композиции гомотетий с переносами. Получающуюся шкалу называют шкалой интервалов, как в одномерном случае.

2.2.5. Последовательности шкал. Если мощность измеряемого множества больше мощности множества значений шкалы, то измерение неизбежно будет грубым. Поэтому для измерения больших множеств целесообразно использовать не одну шкалу, а последовательность шкал нужного типа.

Рассмотрим последовательность шкал (Y_n, S_n, Ψ_n). Мощность (конечного) множества Y_n обозначим $m(n)$. Условимся множество X из n элементов измерять в шкале (Y_n, S_n, Ψ_n). Мощности $m(n)$ могут быть: I) ограничены некоторым m или 2) неограниченно расти вместе с n. Темп роста $m(n)$ определяет асимптотическое поведение последовательности мощностей $|F_n/\Psi_n|$ рассматриваемых шкал.

Последовательность мощностей шкал одного типа можно сравнивать с аналогичной последовательностью для шкал другого типа и оценивать возможность перехода от одного типа к другому. При этом естественно выделяются два случая: $m(n) = m$ и $m(n) = n$. Дополнительно рассматриваются и некоторые другие.

3. Мощности шкал

Даются формулы для вычисления мощностей при измерении множества X из n элементов в абсолютной, порядковой и номинальной шкалах с множеством значений Y из m элементов,

3.I. Абсолютная шкала $\mathcal{A}$. В этой шкале эквивалентность измерений $X \to Y$ означает их равенство. И, следовательно, в рассматриваемом случае мощность $\alpha(n, m)$ абсолютной шкалы $\mathcal{A}$ равна числу всех отображений множества X в множество Y: $\alpha(n, m) = m^n$.

3.2. Порядковая шкала $\mathcal{O}$. В этой шкале эквивалентность измерений $X \to Y$ означает эквивалентность определяемых ими упорядоченных разбиений множества X на прообразы элементов множества Y.

В самом деле, пусть $f, g \in F$, $\phi \in \mathrm{Ord}\, Y$ и $g = \phi \circ f$. Тогда $g^{-1}(z) = f^{-1}(y)$ при $z = \phi(y)$. Так как ϕ-сохраняющий порядок автоморфизм, то $y_1 < y_2 \Leftrightarrow z_1 < z_2$ $(z_i = \phi(y_i))$. По определению порядковой шкалы $y_1 < y_2 \Leftrightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ и $z_1 < z_2 \Leftrightarrow g^{-1}(z_1) < g^{-1}(z_2)$. Значит, эквивалентные измерения f, g определяют эквивалентные упорядоченные разбиения $\{f^{-1}(y) : y \in f\, X\}$, $\{g^{-1}(z) : z \in g\, X\}$ множества X.

Обратно, если $g^{-1}(z) = f^{-1}(y)$ при $z = \psi(y)$ для некоторого сохраняющего порядок частичного автоморфизма Ψ множества Y, то $g=\psi \circ f$.

Следовательно, в рассматриваемом случае мощность $\beta(n,m)$ порядковой шкалы $\mathcal{O}$ равна числу всех упорядоченных разбиений множества X из n элементов на $1,\dots,m$ частей: $\beta(n,m)= \Sigma_{1 \le k \le m} r(n,k)$, где $r(n,k)$ – число упорядоченных разбиений X ровно на k частей.

3.3. Номинальная шкала $\mathcal{N}$. В этой шкале эквивалентность измерений означает эквивалентность определяемых ими разбиений множества X на прообразы элементов множества Y.

В самом деле, пусть $f,g \in F$, $\psi \in \mathrm{Aut}\ Y$ и $g = \psi \circ f$. Тогда $g^{-1}(z)= f^{-1}(y)$ при $z = \psi(y)$. Обратно, если $g^{-1}(z) = f^{-1}(y)$ при $z=\psi(y)$ для некоторого $\psi \in \mathrm{Aut}\ Y$, то $g = \psi \circ f$.

Следовательно, в рассматриваемом случае мощность $\gamma(n,m)$ номинальной шкалы равна числу всех разбиений множества X из n элементов на $1,\dots,m$ частей: $\gamma(n,m) = \Sigma_{1 \le k \le m} s(n,k)$, где $s(n,k)$ – число разбиений X ровно на k частей.

3.4. Из сказанного в п п. 3.2 и 3.3 вытекает, что $\beta(n,m) = \beta(n,n)$, $\gamma(n,m) = \gamma(n,n)$, $n \le m$. Если измеряемых объектов меньше, чем значений шкалы, то точное число этих значений не играет роли: все равно множество из n элементов нельзя разбить больше чем на n частей.

Можно рассматривать порядковые и номинальные шкалы с бесконечными множествами значений. При измерении в них конечных множеств будут получаться конечные мощности: $\beta(n,\infty) = \beta(n,n)$, $\gamma(n,\infty) = \gamma(n,n)$, $n < \infty$. Измерение множества n элементов в порядковой или номинальной шкалах с бесконечным множеством значений равносильно его измерению в соответствующей шкале с n значениями.

Таким образом, порядковые и номинальные шкалы делятся на два класса: 1) шкалы с данным конечным множеством значений и 2) шкалы с бесконечным множеством значений. Вместо одной шкалы с бесконечным множеством значений можно рассматривать последовательность шкал соответствующего типа, в которой n-я шкала имеет n значений, как это предлагалось в п. 2.2.5.

3.5. Общую задачу, поставленную в п.2.1.5, можно сформулировать еще так: сколько, самое большее, неизоморфных протоколов можно получить, измеряя n объектов в шкале с m значениями?

Для порядковой и номинальной шкал эта задача сводится к вычислению мощностей $\beta(n,m)$ и $\gamma(n,m)$. Кроме них исследуются еще относительные мощности $\alpha^{-1}(n,m)\cdot \beta(n,m)$ и $\alpha^{-1}(n,m) \cdot \beta(n,m)$. Выделяется случай $m = n$. Дополнительно изучаются некоторые другие последовательности шкал.

4. Вспомогательные предложения

Нужные сведения из комбинаторики можно найти в книгах [4-6].

4.1. Комбинаторные числа. Это числа, связанные с отображениями и разбиениями конечных множеств.

4.1.1. Число всех отображений множества n элементов в множество m элементов равно m^n.

4.1.2. Число упорядоченных разбиений множества n элементов ровно на k частей есть число Моргана

$$r(n,k) = \Sigma_{0 \le j \le k}(-1)^j \cdot c(k,j) \cdot (k-j)^n .$$

Оно равно числу всех накрывающих отображений множества n элементов на множество k элементов.

Ясно, что $m^n = \Sigma_{0 \le k \le m} c(m,k) \cdot r(n,k)$.

4.1.3. Число всех разбиений множества n элементов ровно на k частей есть число Стирлинга (второго рода) $s(n,k) = (k!)^{-1} \cdot r(n,k)$.

Числа $s(n,k)$ можно находить с помощью равенств

$$s(n+1,k) = s(n,k-1)+k \cdot s(n,k), \quad 1 < k < n,$$

$$s(n,1) = s(n,n) = 1, \; s(n,k) = 0, \quad k > n.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Всюду в статье $c(n,k)$ обозначают биномиальные коэффициенты: $c(n,k) = (n!) \cdot [(k!)(n-k)!]^{-1}$, $0 \le k \le n$.

4.2. Некоторые неравенства. Эти неравенства нужны для исследования асимптотики относительных мощностей.

4.2.1. ЛЕММА:

$$1-k(1-k^{-1})^n \le k^{-n} \cdot r(n,k) \le 1 - (1-k^{-1})^n .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $r(n,k) = k^n - g(n,k)$, где $g(n,k)$ - число ненакрывающих отображений множества n элементов в множество k элементов. Число отображений, ненакрывающих данный элемент, равно $(k-1)^n$. Следовательно, $(k-1)^n \le q(n,k) \le k \cdot (k-1)^n$ и $k^n - k \cdot (k-1)^n \le r(n,k) \le k^n - (k-1)^n$. Остается умножить эти неравенства на k^{-n} .

4.2.2. СЛЕДСТВИЕ:

$$0 \le 1 - \alpha^{-1}(n,m) \cdot \beta(n,m) \le m \cdot (1-m^{-1})^n .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определений и леммы следует, что

$$1 \geq \alpha^{-1}(n,m)\cdot\beta(n,m) \geq m^n\cdot r(n,m) \geq 1-m\cdot(1-m^{-1})^n .$$

4.2.3. СЛЕДСТВИЕ:

$$0 \leq \alpha^{-1}(n,m)\cdot\gamma(n,m) - (m!)^{-1} \leq m\cdot(1-m^{-1})^n .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определений и леммы следует, что

$$\frac{\gamma(n,k)}{\alpha(n,k)} = \sum_{1\leq k\leq m}\frac{s(n,k)}{m^n} = \sum_{1\leq k\leq m}\frac{1}{k!}\,\frac{r(n,k)}{k^n}\cdot\left(\frac{k}{m}\right)^n ,$$

$$\frac{1}{m!} \leq \sum_{1\leq k\leq m}\frac{1}{k!}\,\frac{r(n,k)}{k^n}\left(\frac{k}{m}\right)^n \leq \sum_{1\leq k\leq m}\frac{1}{k!}\left(\frac{k}{m}\right)^n \leq m\left(1-\frac{1}{m}\right)^n .$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Все эти неравенства очень грубые. В **дипломных работах А.М.Быковских и А.А.Медведева, выполненных под руководством авторов статьи в 1983 году в Новосибирском университете, описаны более точные неравенства.**

5. Решение задачи

Задача о вычислении мощностей номинальной и порядковой шкал и исследовании асимптотики относительных мощностей по существу **уже решена. Остается только сформулировать ответ.**

5.I. **Номинальная шкала. В этом пункте вычисляется мощность** $\gamma(n,m)$ **номинальной шкалы с** m **значениями при измерении** n **объектов и исследуется асимптотика отношения** $\alpha^{-1}(n,m)\cdot\gamma(n,m)$ **мощности** $\gamma(n,m)$ к мощности $\alpha(n,m)$ абсолютной шкалы с m значениями при $n\to\infty$ и фиксированном m .

5.I.I. Из сказанного в п п. 2.2.3, 3.3, 4.I.3 следует, что

$$\gamma(n,m) = \sum_{1\leq k\leq m} s(n,k) = \sum_{1\leq k\leq m}\left[(k!)^{-1}\cdot\sum_{0\leq j\leq k}(-1)^j\cdot c(k,j)\cdot(k-j)^n\right].$$

5.I.2. Так как $(n,m) = m^n$**, то**

$$\frac{\gamma(n,m)}{\alpha(n,m)} = \sum_{1\leq k\leq m}\left(\frac{k}{m}\right)^n\frac{s(n,k)}{k^n} =$$

$$= \sum_{1\leq k\leq m}\left[\frac{1}{k!}\cdot\left(\frac{k}{m}\right)^n : \sum_{0\leq j\leq k}(-1)^j\cdot c(k,j)\cdot\left(1-\frac{j}{k}\right)^n\right] .$$

5.I.3. Из сказанного в п. 4.2.3 следует

ТЕОРЕМА:

$$\alpha^{-1}(n,m)\cdot\gamma(n,m) = (m!)^{-1}+\varepsilon(n,m),\quad 0\le\varepsilon(n,m)\le m\cdot(1-m^{-1})^{n}.$$

Из теоремы вытекает

СЛЕДСТВИЕ: $\alpha^{-1}(n,m)\cdot\gamma(n,m) \to (m!)\quad (n\to\infty)$.

5.I.4. Таким образом, при фиксированном m мощность $\gamma(n,m)$ номинальной шкалы в $m!$ раз асимптотически меньше мощности $\alpha(n,m)$ абсолютной шкалы. Можно сказать, что номинальная шкала в $m!$ раз асимптотически слабее соответствующей абсолютной шкалы.

Значит, при измерении большого числа объектов нельзя вместо абсолютной шкалы использовать соответствующую номинальную шкалу, не уменьшая существенно информативность результата.

5.2. Порядковая шкала. В этом пункте вычисляется мощность $\beta(n,m)$ **порядковой шкалы с m значениями при измерении n объектов и исследуется асимптотика отношения $\alpha^{-1}(n,m)\cdot\beta(n,m)$ мощности** $\beta(n,m)$ **к мощности $\alpha(n,m)$ абсолютной шкалы с m** значениями при $n\to\infty$ **и фиксированном m.**

5.2.I. Из сказанного в п п. 2.2.2, 3.2, 4.I.2 следует, что

$$\beta(n,m) = \sum_{1\le k\le m} r(n,k) = \sum_{1\le k\le m}\Big[\sum_{0\le j\le k}(-1)^{j}\cdot c(k,j)\cdot(k-j)^{n}\Big].$$

5.2.2. Так как $\alpha(n,m) = m^{n}$, то

$$\frac{\beta(n,m)}{\alpha(n,m)} = \sum_{1\le k\le m}\left(\frac{k}{m}\right)^{n}\cdot\frac{r(n,k)}{k^{n}}$$

$$= \sum_{1\le k\le m}\left[\left(\frac{k}{m}\right)^{n}\sum_{0\le j\le k}(-1)^{j}\cdot c(k,j)\cdot\left(1-\frac{j}{k}\right)^{n}\right].$$

5.2.3. Из сказанного в п. 4.2.2 следует

ТЕОРЕМА:

$$\alpha^{-1}(n,m)\cdot\beta(n,m) = 1-(n,m),\quad 0\le\delta(n,m)\le m\cdot(1-m^{-1})^{n}.$$

Из теоремы вытекает

СЛЕДСТВИЕ: $\alpha^{-1}(n,m)\cdot\beta(n,m)\to 1\quad (n\to\infty)$.

5.2.4. Таким образом, при фиксированном m мощность $\beta(n,m)$ порядковой шкалы асимптотически эквивалентна мощности $\alpha(n,m)$ абсолютной шкалы. Можно сказать, что соответствующие порядковая и абсолютная шкалы асимптотически равномощны.

Более подробно асимптотику относительной мощности $\alpha^{-1}(n,m) \times \beta(n,m)$ при $n \to \infty$ и $m \to \infty$ можно исследовать, используя результаты А.Д.Коршунова [7].

ЗАМЕЧАНИЕ. Асимптотическую равномощность порядковой и абсолютной шкал с фиксированным числом значений можно объяснить так: при измерении большого количества объектов они обе становятся одинаково грубыми. Если, как это обычно делается, не ограничивать число значений шкалы, то порядковая шкала будет слабее абсолютной. Точнее это выражает теорема в следующем пункте.

5.2.5. Пусть $\alpha(n) = \alpha(n,n)$, $\beta(n) = \beta(n,n) = \beta(n,\infty)$, $\gamma(n) = \gamma(n,n) = \gamma(n,\infty)$.

ТЕОРЕМА:

$$\alpha^{-1}(n)\cdot\beta(n) = \mathcal{O}(n), \quad 0 \le \mathcal{O}(n) \le (1-\mathcal{9}^{-1})^{n-2} \quad (n \ge 2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя равенства $r(n+1,k) = k\cdot(r(n,k) + r(n,k-1))$, $r(n,0) = r(n,n+1) = 0$, которые получаются из равенств п.4.I для чисел Стирлинга, находим:

$$\beta(n+1) = \Sigma_{1\le k\le n+1} r(n+1,k) = \Sigma_{1\le k\le n+1} k\cdot r(n,k) + \Sigma_{1\le k\le n+1} k\cdot r(n,k-1) =$$

$$= \Sigma_{1\le k\le n} k\cdot r(n,k) + \Sigma_{1\le k\le n}(k+1)\cdot r(n,k) \le (2n+1)\cdot\Sigma_{1\le k\le n} r(n,k) = (2n+1)\beta(n).$$

Следовательно,

$$\frac{\beta(n+1)}{\alpha(n+1)} \le \frac{2n+1}{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\cdot\frac{\beta(n)}{\alpha(n)}.$$

Заметим, что

$$\frac{2n+1}{N+1} \le 2, \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \le \left(1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{n^2}\right)^{-1} =$$

$$= \left(2 + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^{-1} \le \left(2+\frac{1}{4}\right)^{-1}, \quad n \ge 2.$$

Поэтому

$$\frac{\beta(n+1)}{\alpha(n+1)} \le \left(1+\frac{1}{8}\right)^{-1}\frac{\beta(n)}{\alpha(n)}, \quad n \ge 2.$$

Значит,

$$\frac{\beta(n)}{\alpha(n)} \le \left(1 - \frac{1}{9}\right)^{n-2} \frac{\beta(2)}{\alpha(2)} = \left(1 - \frac{1}{9}\right)^{n-2} \frac{3}{4} \le \left(1 - \frac{1}{9}\right)^{n-2}, \quad n \ge 2.$$

Теорема доказана. Из нее вытекает

СЛЕДСТВИЕ:

$$\alpha^{-1}(n)\cdot\beta(n) \to 0, \ \alpha^{-1}(n)\cdot\gamma(n) \to 0, \quad n \to \infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение $\alpha^{-1}(n)\cdot\gamma(n) \to 0$ вытекает из $\alpha^{-1}(n) \times \beta(n) \to 0$ и неравенства $\gamma(n) \le \beta(n)$, которое следует из определений. Легко доказать это утверждение, не пользуясь результатом для $\alpha^{-1}(n)\cdot\beta(n)$.

Известно, что $\gamma(n) \le n!$ [8, с.19 и 23]. Отсюда, по формуле Стирлинга,

$$\alpha^{-1}(n)\cdot\gamma(n) \le n^n\cdot(n!) \le (2\pi n)^{1/2}\cdot e^{-n+1/(12n)}.$$

Таким образом, мощности номинальной и порядковой шкал с бесконечным множеством значений асимптотически малы относительно мощности абсолютной шкалы с числом значений, равном растущему числу измеряемых объектов.

Например, $\alpha^{-1}(n)\cdot\beta(n) = 0.1731,\ 0.0102,\ 0.0005$ для $n = 5, 10, 15$ соответственно.

5.3. Дополнение. Исследуем поведение мощностей номинальной и порядковой шкал в некоторых других случаях.

5.3.1. С помощью равенств п п. 5.1.2 и 5.2.2 можно вычислять отношения мощностей рассматриваемых шкал при небольших n, m. В частности, процентное отношение $\beta(n,10)$ к $\alpha(n,10)$ описывают таблица (составлена А.А.Медведевым) и рис. 1 и 2.

Таблица

Нижняя граница отношения $\alpha^{-1}(n,m)\cdot\beta(n,m)$ в %

Значения шкалы (m)	Объекты (n)									
	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
5	61	95	99	100	100	100	100	100	100	100
10	1	26	66	87	95	98	99	100	100	100
15	1	1	2	36	62	79	89	94	97	99
20	1	1	1	1	13	38	57	72	82	89

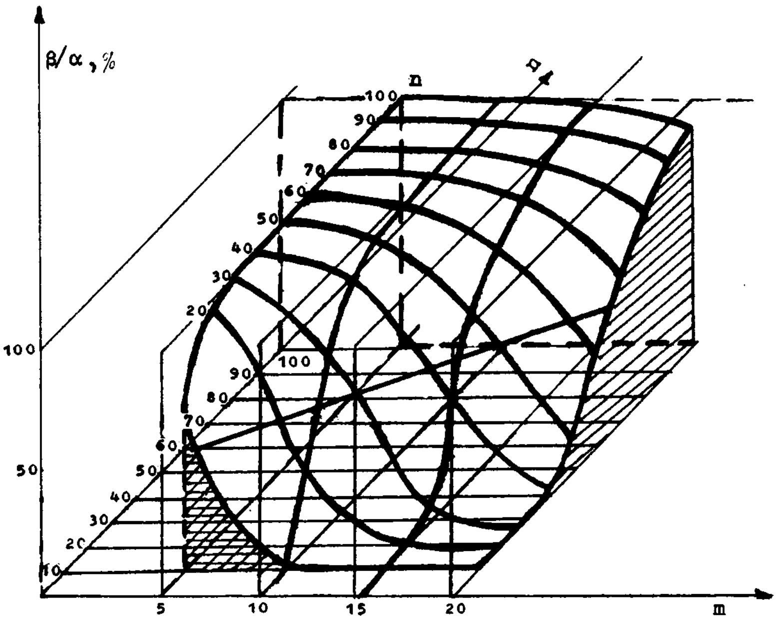

Рис.I. Мощность шкалы порядка (β) по отношению к абсолютной шкале (α).

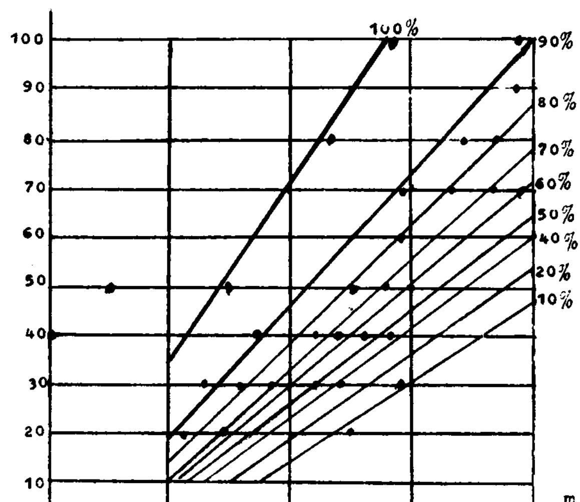

Рис.2. Линии разных отношений β/α.

5.3.2. Из теорем 5.I.3 и 5.2.3 вытекает

СЛЕДСТВИЕ:

$$\alpha^{-1}(n,m)\cdot\gamma(n,m) \to 0, \quad \alpha^{-1}(n,m)\cdot\beta(n,m) \to 1,$$

$$n = m\cdot[\log m + k(m)], \quad k(m) \to \infty, \quad m \to \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $1-1/m \le \exp\{-1/m\}$. Поэтому при сформулированных условиях $m\cdot(1-1/m)^n \le m\cdot\exp\{-n/m\} = m\cdot\exp\{-\log m - k(m)\} = \exp\{-k(m)\} \to 0$. И, следовательно, $\varepsilon(n,m)\to 0$, $\delta(n,m) \to 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В частности, можно взять число $\varepsilon > 0$ и $k(m) = \varepsilon\cdot\log m$, $k(m) = m^{\varepsilon} - \log m$. Тогда для $c = 1+\varepsilon > 1$ имеем $n = c\cdot m\cdot\log m$, $n = m^{c}$.

5.3.3. Таким образом, мощность $\gamma(n,m)$ номинальной шкалы мала сравнительно с мощностью $\alpha(n,m)$ абсолютной шкалы, когда число n измеряемых объектов существенно больше числа m значений этих шкал, которое тоже достаточно велико.

Мощность $\beta(n,m)$ порядковой шкалы с фиксированным числом значений m относительно близка мощности $\alpha(n,m)$ абсолютной шкалы, когда n существенно больше m (например, при $n > 5m$).

5.4. При определении шкалы в п. 2.I.I правильнее было бы говорить не о группе, а о полугруппе допустимых автоморфизмов.

Известно, что частичные автоморфизмы множества образуют инверсную полугруппу [9,§4,7 и I0,§I.9,7.3,II.4]. Полугруппа некоторых частичных автоморфизмов будет инверсной, если и только если вместе с каждым автоморфизмом она содержит обратный [9, §8].

Шкала (Y,Ψ) состоит из множества Y и инверсной полугруппы некоторых его частичных автоморфизмов, содержащей тождественный автоморфизм $e: Y \to Y$. Элементы множества Y называются значениями шкалы (Y,Ψ). Частичные автоморфизмы из полугруппы Ψ называются автоморфизмами шкалы (Y,Ψ).

Полугруппа Ψ допустимых автоморфизмов определяет эквивалентность $\equiv$ для множества F отображений $X \to Y$: $g \equiv f \Leftrightarrow g = \psi\circ f$ $(f,g \in F;\ \ \psi \in \Psi)$. Существование единицы e и обратных автоморфизмов обеспечивает рефлексивность и симметричность отношения $\equiv$.Его транзитивность следует из того, что композиция допустимых автоморфизмов есть допустимый автоморфизм.

Определенная в п.2.I.I группа автоморфизмов есть частный случай инверсной полугруппы с единицей. Такие группы хорошо описывают допустимые автоморфизмы рассматриваемых в статье абсолютной, порядковой и номинальной шкал. Для абсолютной и номинальной шкал эти группы порождаются соответствующими группами полных автоморфизмов. Частичные автоморфизмы нужны для порядковой шкалы. Там они не являются сужениями тождественного автоморфизма - единственного при конечном множестве значений полного автоморфизма, сохраняющего порядок.

5.5. Вместо измерений множества в шкале можно рассматривать преобразования шкалы в шкалу.

Возьмем шкалы (X,Φ) и (Y, Ψ), составленные из множеств X, Y значений и полугрупп Φ, Ψ их допустимых автоморфизмов. Отображения $X \to Y$ назовем преобразованиями шкалы (X,Φ) в шкалу (Y,Ψ). Выделим множество F допустимых преобразований $X \to Y$. (Например, если для X и Y определены системы отношений R и S, то полугруппы Φ и Ψ можно составить из частичных эндоморфизмов моделей (X,R) и (Y, S), а множество F - из гомоморфизмов (X, R) в (Y, S).)

Полугруппы Φ и Ψ допустимых автоморфизмов определяют отношение эквивалентности $\equiv$ для множества F допустимых преобразований: $g \equiv f \Rightarrow g = \psi \circ f \circ \varphi$ $(f,g \in F;\ \varphi \in \Phi,\ \psi \in \Psi)$. Допустимость тождественных автоморфизмов: $i\colon X \to X$, $e\colon Y \to Y$ и обратных автоморфизмов обеспечивают рефлексивность и симметричность отношения $\equiv$. Его транзитивность следует из допустимости композиции допустимых автоморфизмов.

Мощность $|F/(\Phi, \Psi)|$ фактор-класса $F/(\Phi,\Psi)$, получающегося факторизацией множества F по отношению $\equiv$, назовем мощностью шкалы (Y,Ψ) при преобразовании шкалы (X,Φ). Если класс $F/(\Phi,\Psi)$ конечен, то эта мощность равна максимальному числу неэквивалентных преобразований шкалы (X,Φ) в шкалу (Y,Ψ). Мощность $|F/(\Phi,\Psi)|$ является естественной сравнительной количественной характеристикой шкал (X,Φ) и (Y,Ψ).

Измерения множества X в шкале (Y,Ψ) являются преобразованиями абсолютной шкалы $(X,\{i\})$ в шкале (Y,Ψ). Поэтому задача о числе неэквивалентных преобразований обобщает задачу о числе неэквивалентных измерений. Для различных комбинаций абсолютных, порядковых и номинальных шкал ее можно решить, применяя методы, описанные в статье.

6. Заключение

В работе сформулировано определение шкалы с абстрактными значениями и группой допустимых автоморфизмов. Приведены примеры таких шкал. В частности, подробно описаны абсолютная, порядковая и номинальная шкалы.

Порядковые и номинальные шкалы естественно разделяются на два класса: шкалы с конечным множеством значений и шкалы с бесконечным множеством значений. Шкалу с бесконечным множеством значений можно заменить последовательностью шкал рассматриваемого типа с конечными множествами значений.

Мощность шкалы определяется как максимально возможное число неэквивалентных измерений, которые можно произвести в этой шкале. Даны выражения для мощностей порядковой и номинальной шкал. Вычислены отношения этих мощностей к мощности абсолютной шкалы с тем же множеством значений. Исследована асимптотика таких отношений.

Показано, что номинальная и порядковая шкалы с бесконечным множеством значений при большом числе измеряемых объектов существенно менее мощные, чем соответствующая абсолютная шкала. Номинальная шкала с конечным множеством значений при большом числе измеряемых объектов тоже менее мощная, чем абсолютная шкала с тем же множеством значений. А порядковая шкала с конечным множеством значений при большом числе измеряемых объектов почти такая же мощная, как абсолютная.

Литература

1. СУПЕС П., ЗИНЕС Дж. Основы теории измерений. -В кн.: Психологические измерения. М., Мир, 1967, с. 9-110.

2. KRANTZ D. A Survey of Measurement Theory.- In: Lectures in Applicol Mathematics,v.12,part 2. Providence, Rhoole Island: American Mathematical Society,1968,p.315-350.

3. ПФАНЦАГЛЬ И. Теория измерений.-М.: Мир, 1976. - 248 с.

4. ПЛАТОНОВ М.Л. Комбинаторные числа класса отображений и их приложения. М.: Наука, 1979.

5. РИОРДАН Дж. Введение в комбинаторный анализ. -М.: ИЛ,1963. - 287 с.

6. АЙГНЕР М. Комбинаторная теория. -М.: Мир, 1982. - 556 с.

7. КОРШУНОВ А.Д. Об асимптотике чисел Стирлинга второго рода. -В кн.: Методы дискретного анализа в исследовании экстремальных структур. Новосибирск, 1983, вып. 39, с. 24-41.

8. МАРКОВ А.А. Введение в теорию кодирования. -М.: Наука, 1982. - 192 с.

9. ЛЯПИН Е.С. Полугруппы. -М.: Физматгиз, 1960. - 592 с.

10. КЛИФФОРД А., ПРЕСТОН Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т.1,2. -М.: Мир, 1972. - 283 с., 422 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
22 мая 1984 года