СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ СИМВОЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ
(Вычислительные системы)
1984 год Выпуск 101

УДК 519.681.2

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ РЕКУРСИВНО-ПЕРЕЧИСЛИМЫХ ТИПОВ ДАННЫХ

Н.Х.Касымов

При спецификации типов данных в программировании, как правило, используются языки тождеств или квазитождеств. В данной работе ставится и реализуется следующая цель - показать, что языка спецификаций в виде квазитождеств достаточно для неявного описания любых эффективно представимых данных.

Назовем структурой данных многосортную алгебру, конечно-порожденную значениями ее сигнатурных констант, а типом данных - описание на некотором языке класса K таких структур данных заданной сигнатуры. Наиболее часто используемые типы данных являются многообразиями; их семантика, характеризующая тип данных, заключена в устройстве инициальной алгебры I_K для K. При этом каждая структура данных, порожденная значениями сигнатурных констант, определима единственным образом, с точностью до изоморфизма, как эпиморфный образ I_K. Этим свойством I_K определяется единственным образом как фактор-алгебра алгебры термов $T(\Sigma)$ над сигнатурой Σ, т.е. $I_K \cong T(\Sigma)/\equiv_K$, где $\equiv_K$ - конгруэнция, для которой $t \equiv_K t'$ означает, что t и t' - идентичные синтаксические выражения в семантике K.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Структуру данных $\mathfrak{A}$ назовем конструктивной (перечислимой), если существует такая ее нумерация ν, что $(\mathfrak{A},\nu)$ - конструктивная (перечислимая) алгебраическая система.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Тип данных назовем вычислимым (перечислимым), если I_K - конструктивная (перечислимая) алгебраическая система [1].

Таким образом, проблема синтаксической спецификации типа данных K сводится к проблеме задания конгруэнции $\equiv_K$ в свободной системе без свободных порождающих многообразия, порожденного описанием класса K. Однако, как показано в [6], этим методом нельзя специфицировать даже все конструктивные структуры данных. В [5] показывается, что добавление конечного числа неявных функций и тождеств позволяет специфицировать любую конструктивную структуру данных. Теорема Бергстры [5] показывает, что для неявной характеризации конструктивных структур данных достаточно изучать лишь типы данных, являющиеся многообразиями. Заметим, что эта теорема, сформулированная для конечно-порожденных структур данных, справедлива и для произвольных конструктивных структур, так как добавление одной функции и константы дает однопорожденное обогащение любой конструктивной алгебры.

Настоящая работа опирается на [5] и служит ее обобщением на случай перечислимых типов данных. Поскольку при описании перечислимых типов невозможно обойтись лишь тождествами, то приходится рассматривать квазимногообразия и соответственно квазитождества. Для всякого квазимногообразия, так же как и для многообразия, всегда существует свободная система, которая и представляет тип данных [4]. Результаты формулируются вначале для односортных случаев, а затем переносятся на многосортные. Основные понятия и факты, касающиеся конструктивных структур и алгебраических систем можно найти в [I-3].

Предпорядок R на множестве A назовем системой редукций на A и обозначим $a \to_R b$, если $(a, b) \in R$. Пусть $\to_R$ – система редукций на A. Следуя терминологии λ-исчисления, дадим следующие четыре определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Элемент $a \in A$ назовем нормальной формой для $\to_R$, если не существует элемента $b \in A \,\&\, b \neq a$ такого, что $a \to_R b$. Множество всех нормальных форм для $\to_R$ обозначим NF(R).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Систему редукций $\to_R$ назовем системой Чёрча-Россера (обладающей свойством CR), если для всех $a \in A$ из $a \to_R b_1 \,\&\, \&\, a \to_R b_2 \,\&\, b_1 \neq b_2$ следует существование такого $c \in A$, что $b_1 \to_R c$ и $b_2 \to_R c$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Систему редукций $\to_R$ назовем слабо нормализующей (обладающей свойством WN), если для всякого $a \in A$ существует нормальная форма, т.е. $b \in A$ такой, что $a \to_R b \,\&\, b \in NF(R)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Систему редукций $\to_R$ назовем сильно нормализующей (обладающей свойством SN), если не существует такой бесконечной цепи элементов из A $a_0 \to_R a_1 \to_R a_2 \to_R \ldots$, что для всех

$i \in$, $a_i \neq a_{i+1}$.

Если $a \to_R b$, то говорят, что a редуцируется к b (b – редукт a). Обозначим через $\equiv_R$ наименьшую эквивалентность, содержащую $\to_R$.

Справедливы следующие три утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Система редукций $\to_R$ обладает свойствами CR и WN, если и только если всякий элемент редуцируется к единственной нормальной форме.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если система редукций $\to_R$ обладает свойством SN, то $\to_R$ обладает свойством WN.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. $a \equiv_R a'$, если и только если существует цепь $a = b_1, \ldots, b_k = a'$ такая, что для всякой пары b_i, b_{i+1} существует общий редукт c_i $(1 \le i \le K-1)$.

Пусть A – множество и $\equiv$ – эквивалентность на A. Траверсал для $\equiv$ это множество $I \subset A$ такое, что $\forall a \in A\ \exists c \in I\ a \equiv c$ и $t, t' \in I\ \&\ t \equiv t' \to t = t'$. Пусть A – алгебра. Алгебраическая система редукций на A это система редукций $\to_R$ на A, сохраняющая операции, т.е. $\forall$ k-местной операции σ на A имеет место: $a_1 \to_R b_1, \ldots, a_k \to_R b_k \Rightarrow \sigma(a_1, \ldots, a_k) \to_R \sigma(b_1, \ldots, b_k)$.

ЛЕММА 1. Пусть $\to_R$ – алгебраическая система редукций на алгебре A. Тогда $\equiv_R$ – конгруэнция на A. Если $\to_R$ обладает свойствами CR и WN, то NF(R) – траверсал для $\equiv_R$.

Если A – алгебра и $\to_R$ – алгебраическая система редукций на A, то говорят, что $S \subseteq A \times A$ порождает $\to_R$ как множество алгебраических одношаговых редукций, если S рефлексивно, замкнуто относительно единичных подстановок (т.е. если $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_k \in A$ и $a \to_R b$, то $\forall$ k-местной операции σ на A: $\sigma(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_k) \to_R \sigma(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_k)$) и $\to_R$ есть транзитивное замыкание S.

Пусть А-алгебра, конечно-порожденная значениями элементов, названных в ее сигнатуре Σ. Мы хотим задать на $T(\Sigma)$ (множестве всех замкнутых термов сигнатуры Σ) алгебраическую систему редукций $\to_E$. Для этого вначале укажем конечное множество: $E \subset T_\Sigma[X] \times T_\Sigma[X]$, где $T_\Sigma[X]$ – множество термов сигнатуры Σ с переменными из X.

Если $(t(\bar{x}), t'(\bar{x})) \in E$, то пишем $t(\bar{x}) \geq t'(\bar{x})$. Назовем эту пару соотношением редукции. Здесь $\bar{x} \leftrightharpoons (x_1, \ldots, x_n)$. По E строим D_E:

$$D_E = \{(t(s_1, \ldots, s_n), t'(s_1, \ldots, s_n)) \mid (t, t') \in E \,\&\, s_1, \ldots, s_n \in T(\Sigma)\}.$$

Замыкая D_E рефлексивно и относительно единичных подстановок, получим $\to_{E(1)}$, которое порождает $\to_E$ как множество алгебраических одношаговых редукций.

Выражение вида

$$t_1^1(\bar{x}) \geq t_2^1(\bar{x}) \& \ldots \& t_1^n(\bar{x}) \geq t_2^n(\bar{x}) \to t(\bar{x}) \geq t'(\bar{x})$$

назовем соотношением квазиредукции. Если $t(\bar{s}) \to_E t'(\bar{s})$, то говорим также, что $t(\bar{s})$ 0-редуцируется к $t'(\bar{s})$, и пишем $t(\bar{s}) \to_{c(0)} t'(\bar{s})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. $t(\bar{s})$ n-редуцируется к $t'(\bar{s})$, если предикат, стоящий в левой части соотношения квазиредукции, истинен на наборе $\bar{s}$ и в определении его истинности участвуют все пары (t_1, t_2) такие, что t_1 m-редуцируется к t_2, где $0 \leq m \leq n-1$ $(n>0)$.

Если t_1 m-редуцируется к t_2, то пишем $t_1 \to_{c(m)} t_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. t квазиредуцируется к t' (в обозначениях $t \to_c t'$), если $t \to_{c(n)} t'$ для некоторого $n \in \omega$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Транзитивное замыкание множества $\{(t, t') \mid t \to_c t'\}$ назовем системой квазиредукций $\to_c$ на $T(\Sigma)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для транзитивного замыкания вышеуказанного множества можно использовать соотношение квазиредукции $x \geq y \,\&\, y \geq z \to x \geq z$. В самом деле, если $t_0 \to_{c(n)} t_1$ и $t_1 \to_{c(m)} t_2$, то $t_1 \to_{c(k)} t_2$, где $k = \max\{n, m\} + 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Алгебра A сигнатуры Σ_A имеет конечную систему спецификаций (Σ, C), если $\Sigma_A = \Sigma$, а C – конечное множество соотношений квазиредукций, содержащее непустое множество соотношений редукций над $T(\Sigma)$, такое, что $T(\Sigma, C) \leftrightharpoons T(\Sigma)/\equiv_C \cong A$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ II. Алгебра A сигнатуры Σ_A имеет конечную, в неявном обогащении, систему спецификаций (Σ, C), если $\Sigma_A \subset \Sigma$, а C – конечное множество соотношений квазиредукций, содержащее непустое множество соотношений редукций над $T(\Sigma)$, такое, что $T(\Sigma, C)\restriction\Sigma_A \cong A$.

ТЕОРЕМА. Пусть A – перечислимая алгебра, конечно-порожденная значениями ее сигнатурных констант. Тогда A имеет конечную, в неявном обогащении, систему спецификаций, обладающую свойствами CR и SN.

Пусть Ω – рекурсивное множество номеров для A и α: $\Omega \to A$ – эпиморфизм. По условию нумерационная эквивалентность $\equiv_\alpha$ есть рекурсивно-перечислимое множество: $\equiv_\alpha = \{(\beta(t), \gamma(t)) \mid t = 0, 1, \ldots\}$, где β и γ – рекурсивные функции. Построим функции

$$\varphi(n,0) = \gamma(\mu t[\beta(t) = n]),$$

$$\varphi(n,z+1) = \gamma(z)\overline{sg}\,|\beta(z)-n| + \varphi(n,z)\,sg\,|\beta(z)-n|$$

и

$$M(n,0) = n,$$

$$M(n,z+1) = \overline{sg}[M(n,z) \dot{-} \varphi(n,z+1)]\cdot M(n,z) + $$
$$+ sg[M(n,z) \dot{-} \varphi(n,z+1)]\cdot\varphi(n,z+1).$$

Рекурсивная функция M для всякого n при всех z, больших некоторого z_0, "выдает" минимальный α-эквивалентный n элемент $M(n,z)$.

Далее, пусть $f\colon \omega^n \to \omega$, где f – рекурсивная функция, соответствующая f^A на A, т.е. $f^A\colon A^n \to A$. По теореме о нормальной форме Клини для f имеется представление: $f(\bar{x}) = l\mu z.\ T(e, \bar{x}, z)$, где e – число, T – клиниевский предикат, l – функция выбора левого члена пары. Введем примитивнорекурсивные функции h и g:

$$h(z,\bar{x}) = l\mu z' \le z.\ [z' = z \vee T(e,\bar{x},z')],$$

$$g(z,\bar{x}) = \begin{cases} 0, \text{ если } \exists z' \le z.\ T(e,\bar{x},z'), \\ 1 - \text{иначе} \end{cases}$$

и рекурсивную функцию t:

$$\begin{cases} t(z,\bar{x},0) = h(z,\bar{x}), \\ t(z,\bar{x},y+1) = t(z+1,\bar{x},g(z+1,\bar{x})). \end{cases}$$

Непосредственно проверяется, что $f(\bar{x}) = t(0,\bar{x},1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы проведем в четыре этапа.

1. Для алгебры Ω построим ее обогащение Ω_0 в сигнатуре $\Sigma_0 \supset \Sigma$, где Σ – сигнатура Ω.

2. Для $\Omega_0/\equiv_\alpha$ построим конечную систему спецификаций (Σ_0, C_0).

3. Докажем для (Σ_0, C_0) сильную нормализуемость.

4. Покажем, что (Σ_0, C_0) обладает свойством Чёрча-Россера.

Обогащение Ω_0 получается из Ω добавлением к Σ следующих символов (вместе с их естественной интерпретацией): $0, s \div x+1$, h, g, t, f' для символа каждой f на Ω, символа c' для каждой константы $c \in \Sigma$, списков Δ всех примитивнорекурсивных функций, участвующих в примитивнорекурсивном описании h и g для всех f и для M, а также символа ϕ для предиката "больше" ($\phi(x,y) = \overline{sg}(x \dot{-} y)$) вместе со списком его явного описания.

Все термы, составленные из этих добавленных символов, можно считать определенными и принимающими значения в некотором множестве вспомогательного (неявного) сорта. Добавим символ F для функции, отображающей неявный сорт в исходный.

Удобно мыслить неявный сорт как натуральный ряд, а исходный – как множество классов нумерационной эквивалентности.

Для $\Omega_0/\equiv_\alpha$ построим конечную систему спецификаций (Σ_0, C_0).

Для символа каждой функции f на Ω и для M имеем соотношения редукций

$$\underline{f}'(\bar{x}) \geq \underline{t}(\underline{0},\bar{x},\underline{s}(\underline{0})). \tag{1}$$

Мы подчеркиваем символы, чтобы отличить их от функции, которые они представляют. Для всех функций t:

$$\underline{t}(z,\bar{x},\underline{0}) \geq \underline{h}(z,\bar{x}), \tag{2}$$

$$\underline{t}(z,\bar{x},\underline{s}(\underline{0})) \geq \underline{t}(\underline{s}(z),\bar{x},\underline{g}(\underline{s}(z),\bar{x})). \tag{2'}$$

Для всех функций λ, участвующих в примитивнорекурсивных описаниях h, g и ϕ, добавим соотношения редукций следующим образом. Если $\lambda(y) = s(y)$, то добавляем

$$\underline{\lambda}(y) \geq \underline{s}(y). \tag{3}$$

Если $\lambda(x_1,\ldots,x_n) = x_m$, то добавляем

$$\underline{\lambda}(x_1,\ldots,x_m,\ldots,x_n) \geq x_m. \tag{4}$$

Если $\lambda(\bar{x}) = \mu(\mu_1(\bar{x}),\ldots,\mu_k(\bar{x}))$, то

$$\underline{\lambda}(\bar{x}) \geq \underline{\mu}(\underline{\mu}_1(\bar{x}),\ldots,\underline{\mu}_k(\bar{x})). \tag{5}$$

Для $\lambda(\bar{x},0) = \mu_1(\bar{x})$, $\lambda(\bar{x},y+1) = \mu_2(\bar{x},y,\lambda(\bar{x},y))$ добавляем

$$\underline{\lambda}(\bar{x},0) \geq \underline{\mu}_1(\bar{x}), \tag{6}$$

$$\underline{\lambda}(\bar{x},s(y)) \geq \underline{\mu}_2(\bar{x},y,\underline{\lambda}(\bar{x},y)). \tag{6'}$$

Наконец, для всех констант сигнатуры Σ

$$\underline{c} \geq s^c(\underline{0}), \tag{7}$$

где $s^n(\underline{0})$ означает n выписанных подряд символов s и символ $\underline{0}$.

Обозначим систему (I)-(7) через E_0. Система C_0 получается из E_0 добавлением следующих соотношений:

$$\underline{M}(x,y) \geq z \,\&\, \underline{\psi}(x,z) \geq \underline{0} \rightarrow F(x) \geq F(z), \tag{8}$$

$$F(x) \geq F(y) \,\&\, F(y) \geq F(z) \rightarrow F(x) \geq F(z). \tag{9}$$

Для каждого функционального символа $f \in \Sigma$:

$$F(y_1) \geq x_1 \,\&\ldots\&\, F(y_n) \geq x_n \rightarrow \underline{f}(x_1,\ldots,x_n) \geq F\underline{f}'(y_1,\ldots,y_n). \tag{10}$$

И, наконец, для каждой константы $c \in \Sigma$:

$$F(\underline{c}') \geq \underline{c}. \tag{11}$$

Соотношение (9) нужно для транзитивного замыкания множества, порожденного соотношением (8) на основе E_0.

Для доказательства сильной нормализуемости прежде всего линейно упорядочим сигнатуру Σ_0 отношением $\leq$ следующим образом: $0 \leq c_1 \leq \ldots \leq c_p \leq s \leq \Delta_\psi \leq \psi \leq \Delta_M \leq \Delta_1 \leq \ldots \leq \Delta_q \leq h_M \leq h_1 \leq \ldots \leq h_q \leq g_M \leq$ $\leq g_1 \leq \ldots \leq g_q \leq t_M \leq t_1 \leq \ldots \leq t_q \leq M \leq f_1 \leq \ldots \leq f_q$. Внутри каждого списка Δ функции при примитивнорекурсивном описании h предшествуют функциям при описании g. В свою очередь, функции при описании h, g и ψ упорядочены по примитивнорекурсивному определению. Сильную нормализуемость докажем сначала для $\rightarrow_{E_0}$, а затем, на основе $\rightarrow_{E_0}$, уже для $\rightarrow_{C_0}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Каждый терм $t \in T(\Sigma_0)$ сильно нормализуем в $\rightarrow_{E_0}$ (т.е. не существует бесконечной цепи $t_0 \rightarrow_{E_0} t_1 \rightarrow_{E_0} t_2 \ldots$, где $t_m \neq t_{m+1}$ для всех $m \in \omega$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по позиции $\underline{\lambda}$ в упорядоченном вышеуказанным способом списке. Если терм – константа то к нему однократно применимо лишь соотношение (7), т.е. он сильно нормализуем. Индукционный шаг основывается на следующем вспомогательном утверждении.

ЛЕММА 2. Если $s_1,\ldots,s_n$ – сильно нормализуемые термы и $\underline{\lambda}$ – n-местный функциональный символ, то терм $\underline{\lambda}(s_1,\ldots,s_n)$ также сильно нормализуем.

Бесконечная последовательность редукций из $\underline{\lambda}(\bar{s})$, не включающая редукции из E_0, записанные для $\underline{\lambda}$, потребует бесконечную последовательность редукций от одного из подтермов, в противоречие с тем, что он сильно нормализуем. В силу этого достаточно рассмотреть лишь редукции из E_0, записанные для $\underline{\lambda}$.

Если $\underline{\lambda}(r) = s(r)$, то редукции можно применить лишь в r, а для него $SN(r)$ (т.е. r сильно нормализуем).

Если $\underline{\lambda}(\bar{s}) = s_m$ или $\underline{\lambda}(\bar{s}) = \underline{\mu}(\underline{\mu}_1(\bar{s}),\ldots,\mu_k(\bar{s}))$, то $\underline{\lambda}(\bar{s})$ есть SN-терм, так как символы из s_m и $\underline{\mu}(\underline{\mu}_1(\bar{s}),\ldots,\mu_k(\bar{s}))$ лежат левее в списке $(\Sigma_0, \leq)$.

Если $t = \underline{\lambda}(\bar{s}, r)$ и к t применяется редукция (6), то индукция по $Val(r)$, где под $Val(r)$ понимается значение терма r в алгебре Ω_0.

Если $t = \underline{\lambda}(r, \bar{s}, \underline{0})$ и к t применяется редукция (2), то $SN(t)$, так как в $\underline{h}(r, \bar{s})$ все символы лежат левее в $(\Sigma_0, \leq)$.

Если же $t = \underline{\lambda}(r, \bar{s}, s(\underline{0}))$, то индукция по $Val(\chi(r, \bar{s}))$, где $\chi(r, \bar{s}) = \mu z[g(z, Val(\bar{s}))=0] \dot{-} Val(r)$. Здесь $Val(s) \leftrightharpoons (Val(s_1),\ldots$
$\ldots, Val(s_n))$.

Если $t = f'(\bar{s})$, то $SN(t)$.

Таким образом, $\forall t \in T(\Sigma_0)\ SN(t)$ в $\to_{E_0}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. К любому терму $t \in T(\Sigma_0)$ соотношение (8) можно применить не более $Val(t)$ раз.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по $Val(t)$. Если $Val(t) = 0$, то это ясно, так как функция M из соотношения (8) сводит всякий терм t к такому α-эквивалентному ему терму t', что значение t' в Ω_0 строго меньше значения t. Если для всех $t' \in T(\Sigma_0)$ таких, что $Val(t') < n$, это верно и $Val(t) = n$, то применение к t соотношения (8) дает некоторый терм t_0 такой, что $t \to_{C_0} t_0$,

$Val(t_0) < n$ и к t_0 соотношение (8) применимо не более $Val(t_0)$ раз, т.е. к t можно применить соотношение (8) не более $Val(t)$ раз.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Соотношение (9) не нарушает свойства SN для $\to_{c_0}$.

Так как $\to_{E_0}$ транзитивно замкнута, то, если допустить противное, существует бесконечное множество пар $t \to_{c_0} t_0$, $t_0 \to_{c_0} t_1, \ldots$ $\ldots, t_n \to_{c_0} t_{n+1}$, где $\forall n \in \omega \quad t_n \neq t_{n+1}$, такое, что бесконечное его подмножество сформировано соотношением (8). Но, по предложению 2, для всякого терма $t \in T(\Sigma_0)$ имеется не более $Val(t)$ таких термов $t_0, t_1, \ldots$. Таким образом, система (Σ_0, C_0) обладает свойством SN. Для доказательства выполнения свойства Чёрча-Россера достаточно показать (утверждение I), что каждый терм квазиредуцируется к единственной нормальной форме.

Так как для всякого терма t имеет место $SN(t)$, то для него есть нормальная форма. Пусть для некоторого терма t имеются две нормальные формы t_1, t_2 . Заметим, что применение соотношений (I)-(7) к терму t сохраняет значение терма, а соотношение (8) - свойство α-эквивалентности. Так как к t_1 и t_2 неприменимо (8), то они являются термальными представлениями одного числа, а именно: минимального α-эквивалентного $Val(t)$. Из того, что к t_1 и t_2 неприменимы соотношения (I)-(7), следует, что $t_1 = t_2 = Fs^{Val(t_1)}(\underline{0})$, либо $t_1 = t_2 = s^{Val(t_1)}(\underline{0})$, ибо в противном случае к символам в t_1 или t_2 , отличным от s и $\underline{0}$, можно было бы применить функции из $\to_{E_0}$. Этим доказана теорема.

Напомним, что структура данных определяется как конечно-порожденная много (конечно) сортная алгебра. Доказанная выше теорема естественным образом переносится на многосортный случай.

Пусть основное множество многосортной алгебры $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, где A_i - множество элементов сорта i, причем все A_i бесконечны (случай конечного множества не представляет интереса и отличается лишь большей громоздкостью определений). Все операции согласованы с сортами своих аргументов, т.е. имеют вид:

$$\sigma^{\lambda,\mu} = \sigma^{\lambda_1,\dots\lambda_k;\mu}: A_{\lambda_1}\times\dots\times A_{\lambda_k} \to A_\mu ,$$

где $\lambda_i, \mu \in \{1,\dots,n+m\}$, $1 \le i \le k$.

Если A – перечислимая алгебра, то существует семейство отображений $\alpha_i: \Omega_i \xrightarrow{\text{на}} A_i$, где все Ω_i—рекурсивные множества, и коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
A_{\lambda_1}\times\dots\times A_{\lambda_k} \arrow[r, "\sigma^{\lambda,\mu}"] & A_\mu \\
\Omega_{\lambda_1} \ \dots \ \Omega_{\lambda_k} \arrow[u, "\alpha_{\lambda_1}\times\dots\times\alpha_{\lambda_k}"] \arrow[r, "\bar\sigma^{\lambda,\mu}"] & \Omega_\mu \arrow[u, "\alpha_\mu"']
\end{tikzcd}$$

для всех операций $\sigma^{\lambda,\mu}$ на A. Кроме того, $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$, если $i \ne j$ и семейство отношений $\{(x,y)/\alpha_i x = \alpha_i y\}$ рекурсивно-перечислимо.

Для сведения многосортного случая к односортному заменим каждое бесконечное множество Ω_i на $\bar\Omega_i$, где $\bar\Omega_i = \omega$, так, чтобы сохранялся эпиморфизм из новой алгебры $\bar\Omega$ на A. Ясно, что $\bar\Omega/\equiv_\alpha \cong A$. Алгебра легко сводится к односортной. Для того чтобы вычислить значение операции $\bar\sigma$ на $\bar\Omega$, нужно лишь "стереть" сортовые метки у аргументов $\bar\sigma$, вычислить $\bar\sigma$ как в односортном случае и результат "снабдить" меткой соответствующего сорта.

Сигнатуру Σ алгебры A обогатим символом нового сорта, символами для функций из описания каждой f на Ω, символами c' для каждого символа $c \in \Sigma$, f' для каждого $f \in \Sigma$ – как в предыдущей теореме. Для каждого сорта i введем символ F_i, который отображает неявный вспомогательный сорт в сорт i. Для каждого f на Ω вида $f: \bar\Omega_{\lambda_1}\times\dots\times\bar\Omega_{\lambda_k} \to \bar\Omega_\mu$ положим:

$$F_{\lambda_1}(y_1) \ge x_1 \,\&\, \dots \,\&\, F_{\lambda_k}(y_k) \ge x_k \to \underline{f}(x_1,\dots,x_k) \ge F_\mu \underline{f}'(y_1,\dots,y_k).$$

Для константного символа c сорта i : $F_i(\underline{c}') \ge \underline{c}$.

Сформулируем теперь основную теорему.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Пусть* A – *конечно-порожденная многосортная перечислимая алгебра. Тогда* A *допускает конеч* -

ную, в неявном обогащении, систему спецификаций, обладающую свойствами Чёрча-Россера и сильной нормализации.

В заключение автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Гончарову С.С. за постановку задачи и ценные указания,а также Морозову А.С. за многочисленные полезные обсуждения.

Литература

I. ГОНЧАРОВ С.С. Матрицы как абстрактный тип данных. -В кн.: Математическое обеспечение ВС из микро-ЭВМ (Вычислительные системы, вып. 96). Новосибирск, 1983, с. 75-86.

2. ЕРШОВ Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. -М.: Наука, 1980.

3. МАЛЬЦЕВ А.И. Конструктивные алгебры. I. -М.: Наука, 1976, том П, с. 134-185.

4. МАЛЬЦЕВ А.И. Алгебраические системы. -М.: Наука, 1970.

5. BERGSTRA I.A., TUCKER I.V. A characterisation of computable data types by means of a finite equational specification method.-Proc.7th ICALP, Springer LNCS,1980,v.85.

6. MAJSTER M. Limits of the "algebraic" specification of abstract data types.-SIGPLAN Noties,1977,v.12,N 10,p.37-42.

Поступила в ред.-изд.отд.
8 декабря 1983 года