СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ СИМВОЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ
(Вычислительные системы)
1984 год Выпуск 101

УДК 510

О НОВОМ ПОДХОДЕ К ФИЛОСОФИИ МАТЕМАТИКИ

Ю.Л.Ершов, К.Ф.Самохвалов

Цель работы - изложить новую парадигму математики, сформулированную первым из авторов и обсуждавшуюся до сих пор только на внутренних семинарах в отделе математической логики Института математики СО АН СССР.

I. Речь идет вот о чем. Как известно, Гильберт считал, что, вообще говоря, не все высказывания какой-либо математической теории имеют смысл. При этом неявно он предполагал, что разбиение множества всех высказываний рассматриваемой теории на осмысленные ("реальные") и бессмысленные ("идеальные") вполне определяется видом самих высказываний и, следовательно, является фиксированным для всех теорий с одним и тем же синтаксисом и сигнатурой. Согласно новой парадигме это разбиение на осмысленные и бессмысленные высказывания зависит не только от синтаксиса и сигнатуры рассматриваемой теории, но и от класса задач, с которым предназначается иметь дело этой теории. С этой точки зрения, одна и та же теория как математическое исчисление содержательно будет иметь разные множества осмысленных высказываний, если она предназначается для обработки разных классов задач. Иными словами, при таком подходе математическая теория рассматривается просто как "резервуар" для более "бедных" формальных систем, по отдельности "извлекаемых" из всей теории в зависимости от той или иной имеющейся задачи. Сама по себе, безотносительно к возможным задачам (и, следовательно, безотносительно к своей роли быть упомянутым "резервуаром"), теория не имеет практического значения, и поэтому не представляет самостоятельного интереса вопрос, противоречива она в целом или нет. В конечном счете важно лишь то, каковы те фрагменты теории, которые нам придется извлекать в связи с конкретными задачами. Разумеется, если мы встретим такую задачу, для решения которой понадобятся знания, кодифицируемые в с е й теорией, то вопрос о ее непротиворечивости приобретет актуальность, но, быть может, таких "тяжелых" задач вообще нет? Чтобы ответить на этот вопрос, подвергнем некоторому анализу само понятие задачи.

2. Начнем с общих неформальных замечаний. Когда вы говорите, что осознали определенную задачу, то, спрашивается, что именно вы осознали? Вероятно, вы всегда можете ответить словами: "Я осознал, что я хочу узнать то-то и то-то". А что значит "я хочу чего-то"? Например: "Я хочу пить" - что это значит? Нет, конечно, никакой ошибки полагать, что слова "я хочу пить" означают просто вот э т о, где э т о - определенное состояние сознания, которое я переживаю сейчас и которое я именую жаждой. Но тогда возникает новый вопрос: как ощущение жажды (хотение) связано с фактическим питьем (удовлетворением хотения)? Откуда я знаю, что удовлетворить жажду можно питьем? Содержится ли в самом переживании жажды сознание того, чем эту жажду можно удовлетворить? Вполне вероятно, что ощущение жажды как-то включает в себя воображаемую картину питья. Но тогда каким образом воображаемое питье содержит информацию о фактическом питье? Ведь как бы сильно ни походила воображаемая картина на факты, все равно в фактическом питье ч т о-т о должно быть такое, чего не доставало в воображаемом; и это отсутствующее в воображении н е ч т о и есть в данном случае самое существенное. Иначе мы могли бы утолить жажду сразу - одним воображением.

Эти вопросы наводят на мысль, что слова "я хочу пить" принципиально недоуказывают как раз на то, чем именно и удовлетворяется имеющееся желание. Возникает убеждение, что и вообще: удовлетворение л ю б о г о желания - новость. Причем в чем-то самом существенном - а б с о л ю т н а я новость, эмпирический п о с т ф а к т у м, который ни в коем случае не был дан заранее. А вместе с тем столь же несомненно, что когда я хочу пить, я хочу не просто чего-то "новенького вообще", а хочу именно чего-то о п р е д е л е н н о г о; что, следовательно, это "ч е г о - т о" каким-то образом п р е д о п р е д е л я е т с я характером ощущения желания, не будучи данным мне до тех пор, пока я только хочу и еще не удовлетворил свое хотение.

Читатель уже догадывается, к чему клонится речь. К тому, что знать желание не означает знать желаемое, а означает знать способность узнать желаемое, как только этому представится случай. Иными словами, вы п о н и м а е т е какое-либо свое желание (а не просто "томитесь" им) только тогда, когда этому желанию вы сопоставили чувство уверенности в том, что любое будущее состояние своего сознания вы сумеете убедительным и безошибочным образом распознать как состояние удовлетворения желания или как состояние неудовлетворения. В частности, когда я понимаю, что я хочу пить, я нахожусь в состоянии уверенности, что все, что со мною ни случится, я сумею несомненным образом распознать как утоление своей жажды или как неутоление. Хотя (следует еще раз подчеркнуть) при этом я не обязательно знаю, ч е м это утоление будет достигнуто. По прошлому опыту ожидаю, что водой, но, быть может, какая-нибудь таблетка-тоже утолит мою жажду.

Вернемся к понятию задачи. Вспомним, что любую задачу можно мыслить себе в терминах: "Я хочу знать...". Поэтому задача - частный случай желания, и все сказанное о последнем относится также и к ней. А именно: мы понимаем задачу только тогда, когда ей сопоставили обоснованное чувство уверенности в том, что всякое состояние нашего сознания мы сумеем убедительным и безошибочным образом распознать как такое, когда решение найдено, или как такое, когда решение задачи не найдено.

При этом естественно полагать, что "обоснованное чувство уверенности", о котором идет речь, обеспечивается наличным содержанием наших знаний.

3. Если согласиться упомянутые состояния сознания представлять (нумеровать) натуральными числами, а свои знания представлять формальными системами, то понятию "задача, доступная нашему пониманию", будет соответствовать понятие "задача внутри формальной системы". Его точный смысл обеспечивается следующими определениями.

Пусть S - произвольная формальная система в языке $L(S)$, объемлющем язык арифметики. Пусть, далее, $s(\ulcorner\varphi\urcorner, x)$ - терм в $L(S)$ такой, что арифметическое значение $s(\ulcorner\varphi\urcorner, \bar{n})$ есть гёделевский номер высказывания, полученного из $\varphi(x)$ подстановкой цифры $\bar{n}$ вместо x. И пусть, наконец, $Pr_S(\cdot)$ - предикат доказуемости для S, строящийся обычным образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. S-задачей (задачей внутри S) называется всякая формула φ в $L(S)$, содержащая точно одну свободную переменную и такая, что выполняются следующие условия:

I) $S \vdash \forall x(Pr_S(s(\ulcorner\varphi\urcorner,x)) \vee Pr_S(s(\ulcorner\neg\varphi\urcorner,x)))$;

2) $S \vdash \forall x(Pr_S(s(\ulcorner\varphi\urcorner,x)) \rightarrow \varphi(x))$;

3) $S \vdash \forall x(Pr_S(s(\ulcorner\neg\varphi\urcorner,x)) \rightarrow \neg\varphi(x))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Если φ - S-задача, то натуральное число n называется решением (нерешением) φ тогда и только тогда, когда $\varphi(\bar{n})$ $(\neg\varphi(\bar{n}))$.

Мотивировать эти определения можно, например, так. Когда мы в п.2 говорили о необходимых условиях понимания любой задачи (желания), мы существенным образом опирались на такие понятия, как "обоснованное чувство уверенности", "сумеем убедительным и безошибочным образом распознать" и т.п.Один из способов придать этим понятиям точный смысл - это предположить, что уверенностью (убедительностью) снабжают нас некоторые рассуждения и что нужный запас таких рассуждений поддается формализации в виде множества всех доказательств в некоторой формальной системе.Подразумеваемая роль S - быть именно такой системой. В этом случае определение 2 и условие I определения I совместно могут быть истолкованы как утверждение: мы уверены ($S \vdash \ldots$), что всякое состояние сознания мы сможем убедительными средствами распознать (Pr_S (...)) как такое,когда решение φ найдено ($Pr_S(s(\ulcorner\varphi\urcorner, x))$), или как такое, когда решение φ не найдено ($Pr_S(s(\ulcorner\neg\varphi\urcorner, x))$). Определение 2 и условия 2 и 3 определения I при таком истолковании дают утверждение: мы уверены, что любое состояние сознания, если оно вообще распознается (убедительными средствами), распознается безошибочно.

Таким образом, в принятых предположениях (идеализациях) наши определения формализуют именно то, о чем речь шла в конце п.2.При этом вопрос о законности самих идеализаций (т.е. вопрос о законных способах нумерации состояний сознания и законных способах представления знаний в виде формальных систем) остается открытым. Подробное обсуждение этого вопроса - не тема данной статьи. Отметим лишь, что достаточно разумным случаем нумерации состояний сознания является следующая ментальная процедура.

Рассматривается совокупность всевозможных текстов (коротких и длинных, осмысленных и бессмысленных, понятных и нет, включающих и не включающих математические символы, знаки препинания,пробелы и т.д.) на русском языке. Эта совокупность взаимно-однозначно (и эффективно в обе стороны) нумеруется натуральными числами I,2,... Каждому состоянию сознания, в котором осознается какой-нибудь русский текст в качестве единственного объекта внимания, присваивается номер этого текста. При этом два состояния получают один и тот же номер, если они отличаются друг от друга чем угодно, но только не текстами как объектами внимания. Все состояния сознания, в которых внимание направлено не на отдельный текст, нумеруются числом 0. Эта нумерация эффективна д л я н а с в том смысле, что каждому состоянию сознания мы умеем приписать соответствующее натуральное число, и, наоборот, по каждому натуральному числу мы умеем представить себе хоть одно состояние сознания, имеющее это число в качестве своего номера в данной нумерации. Для этого достаточно по числу (если оно не равно 0) восстановить соответствующий текст и затем представить себе, что мы направили внимание именно на него. Если число равно 0, то достаточно вообразить любое состояние сознания, в котором объектом внимания не является какой-нибудь русский текст.

Очевидно, что существует не одна такая нумерация. Например, всякая рекурсивная перестановка на натуральном ряде порождает новую нумерацию рассматриваемого типа. Кроме того, можно рассматривать нумерации, построенные по такому же образцу, но уже исходя не из всей совокупности всевозможных русских текстов, а только из некоторой выделенной ее части - например, из множества всех выражений какой-либо наперед фиксированной формальной системы R. Можно придумать и много других, годящихся для наших целей нумераций.

Поэтому важно отметить, что содержательный смысл одной и той же S-задачи будет, вообще говоря, разным в разных нумерациях. Следовательно, понятие S-задачи характеризует всего лишь ф о р м а л ь н ы е ограничения на возможные формулировки задач. Эти ограничения необходимо должны быть выполнены, чтобы задачи вообще могли иметь смысл для нас, вооруженных уверенными знаниями в виде рассуждений, закодированных в S.

Наша ближайшая цель - охарактеризовать S.

4. Мы получим некоторую частичную характеристику знаний, необходимых для понимания задач, если ответим на вопрос: какова S, если класс S-задач не пуст?

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Формальная система S в языке L(S), объемлющем язык арифметики, называется с л а б о й, если для нее не выполнено хотя бы одно из следующих трех условий (Гильберта-Бернайса):

GI) для всякого высказывания σ из $L(S)$, если $S \vdash \sigma$, то $S \vdash Pr_S(\ulcorner \sigma \urcorner)$;

G2) для всякого высказывания σ из $L(S)$ $S \vdash Pr_S(\ulcorner \sigma \urcorner) \to Pr_S(\ulcorner Pr_S(\ulcorner \sigma \urcorner) \urcorner)$;

G3) для любых двух высказываний σ_1, σ_2 из $L(S)$ $S \vdash Pr_S(\ulcorner \sigma_1 \urcorner) \& Pr_S(\ulcorner \sigma_1 \to \sigma_2 \urcorner) \to Pr_S(\ulcorner \sigma_2 \urcorner)$.*)

Термин "слабая" уместен потому, что если иметь в виду системы в языке арифметики, то рекурсивная арифметика и все ее надсистемы удовлетворяют условиям G1-G3, а нарушают хотя бы одно из них только те системы, которые не являются надсистемами рекурсивной арифметики. Такова, например, арифметика Робинсона Q.

ТЕОРЕМА. Если S непротиворечива и класс S-задач не пуст, то S-слабая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим обратное: S непротиворечива, $\varphi(x)$ - S -задача, и выполнены все три условия GI-G3. В силу GI-G3 для S справедлива теорема Лёба:

для любого высказывания σ из $L(S)$, если $S \vdash Pr_S(\ulcorner \sigma \urcorner) \to \sigma$, то $S \vdash \sigma$.

Условия 2 и 3 определения I дают соответственно:

DI) $S \vdash Pr_S(\ulcorner \varphi(\bar{o}) \urcorner) \to \varphi(\bar{o})$;

D2) $S \vdash Pr_S(\ulcorner \neg \varphi(\bar{o}) \urcorner) \to \neg \varphi(\bar{o})$.

Теорема Лёба и условие D1 влекут $S \vdash \varphi(\bar{o})$.

Теорема Лёба и условие D2 влекут $S \vdash \neg \varphi(\bar{o})$.

Из этого следует, что S, вопреки предположению, противоречива. Теорема доказана.

5. Что можно сказать об этой теореме? Вспомним, что нас интересовал вопрос, может ли встретиться такая задача, для решения которой понадобятся знания, кодифицируемые какой-нибудь богатой теорией всей в целом? Наша теорема говорит о том, что если для решения какой-либо задачи нам нужны знания, кодифицируемые не в сла

---

*) Напомним, что предикат $Pr_S(\cdot)$ для данной S строится обычным образом и, следовательно, для данной S считается фиксированным раз и навсегда. Поэтому GI-G3 есть условия на S, а не на $Pr_S(\cdot)$.

бой системе, то такая задача не может иметь для нас смысла. Следовательно, для решения любой о с м ы с л е н н о й задачи мы не имеем права выделить из какой-нибудь теории столь большой фрагмент, чтобы он не был слабой системой. Таким образом, ответ на рассматриваемый вопрос отрицателен. А так как для слабых систем не проходит доказательство второй теоремы Гёделя о неполноте, то вопрос о непротиворечивости в любом интересном с точки зрения рассматриваемой парадигмы случае оказывается не столь острым, как это имеет место относительно первоначальной программы Гильберта ж). В этом смысле обсуждаемая теорема свидетельствует о том, что модификация программы Гильберта, соответствующая новой парадигме, является радикальной и, по-видимому, ведущей к успешному разрешению эпистемологического кризиса в основаниях, ощущаемому с начала века и по сию пору.

6. В заключение стоит отметить, что изложенная точка зрения на философию математики возникла как рефлексия работающего математика на свою деятельность. Но, возникнув, она в свою очередь может влиять на математическую практику, подвергая ревизии прежние или устанавливая новые оценки важности тех или иных направлений. В частности, в рамках новой парадигмы выглядит весьма естественным так называемый "логический подход к программированию" [2], согласно которому следует создавать языки спецификаций не только программ, но и задач.

В этой связи следует подчеркнуть сугубо предварительный характер настоящей статьи. Остались невыясненными многие существенные вопросы. Поэтому: п е р в а я п р о б л е м а - указать (хотя бы одну) слабую систему S, для которой класс S-задач не пуст; в т о р а я п р о б л е м а (более общая, чем первая) - для произвольной слабой системы S описать класс S-задач; т р е т ь я п р о б л е м а - для любой (или хотя бы некоторой) слабой системы S выяснить, относительно каких эффективных операций над S-задачами класс S-задач замкнут, изучить полученную алгебру.

В зависимости от решения третьей проблемы можно ставить вопрос о поиске для данной S исчисления S-задач, об изучении свойств

ж) Например, Ерослав показал, что среди подтеорий рекурсивной арифметики есть такие, в которых доказуем их собственный консис [I].

такого исчисления и т.д. На этом этапе работы можно будет говорить о языках спецификаций задач.

По-видимому, при решении этих проблем скажется условие I определения I, которое до сих пор никак себя не проявило.

Литература

I. JEROSLOW R.G. Consistency statements in formal theories.- Fund.Math.,1971,v.72,p.17-40.

2. НЕПЕЙВОДА Н.Н., СВИРИДЕНКО Д.И. Программирование с логической точки зрения.-Новосибирск, Б.и., I98I. т.I. 49 с. (Препринт/ИМ СО АН СССР).

Поступила в ред.-изд.отд.
I6 июля I984 года