ОБНАРУЖЕНИЕ ЭМПИРИЧЕСКИХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ЭВМ
(Вычислительные системы)
1984 год Выпуск 102

УДК 519.95:681.3.06

О СТАТИСТИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ СЕРИЙ НАБЛЮДЕНИЙ

Ю.С.Харин

1. Введение. Постановка задачи. В существующих методах статистической классификации [1,2] предполагается, что истинные номера классов наблюдений в выборке независимы. Однако в приложениях часто выборка образована сериями наблюдений: внутри серии классификация неизменная, а от серии к серии – может меняться. Такая ситуация возникает, например, при классификации временного ряда наблюдений $\{x_t\}$ за состояниями нестационарной динамической системы с $L \geq 2$ режимами функционирования (в частности, в задачах технической диагностики). Каждый режим (класс) описывается собственной вероятностной моделью, а система обладает свойством "кусочной стационарности": если в момент времени t "начался" i-й режим, то он сохраняется в моменты $t+1,\ldots,t+T^0-1$, затем в момент $t+T^0$ может изменяться на j-й $(i,j\in\{1,\ldots,L\})$ и так далее. (Интервал "стационарности" T^0 неизвестен.)

Определим теперь математическую модель. Пусть $P = \{p(x;\,\vartheta):\ x \in R^N,\ \vartheta\in \Theta \subseteq R^m\}$ – параметрическое семейство N-мерных плотностей, ϑ – идентифицируемый параметр, Θ – область в R^m, $L \geq 2$ – натуральное число, $\{\vartheta_1^0,\ldots,\vartheta_L^0\}\subset\Theta$ – подмножество L различных точек. В R^N регистрируются случайные наблюдения из L классов: $\Omega_1,\ldots,\Omega_L$. Класс Ω_i это совокупность наблюдений, имеющих одну и ту же плотность распределения $p(x;\,\vartheta_i^0)$, $x \in R^N$, где ϑ_i^0 – истинное значение параметра, $i \in S(L) = \{1,2,\ldots,L\}$.

Наблюдается последовательность независимых случайных векторов $x_t \in R^N$, $t = 1,2,\ldots$, где x_t – наблюдение из класса $\Omega_{d_t^0}$, $d_t^0 \in S(L)$. Последовательность номеров классов $\{d_t^0\}$ образована сериями длиной T^0:

$$\{d_1^0, d_2^0, \dots\} = \{\underbrace{I_1^0, \dots, I_1^0}_{T^0}, \underbrace{I_2^0, \dots, I_2^0}_{T^0}, \dots\},\ I_j^0 \in S(L);$$

j-я серия наблюдений $\{x_{(j-1)T^0+1}, \dots, x_{jT^0}\}$ соответствует классу $\Omega_{I_j^0}$ ($j = 1, 2, \dots$). Истинное значение $T^0 \in A = \{T_-, T_-+1, \dots, T_+\}$ неизвестно; $T_-(T_+)$ – наименьшее (наибольшее) возможное значение длины серии.

В настоящей работе рассматриваются следующие задачи: А) по наблюдаемой реализации $X = (x_1, \dots, x_n)$ длительностью n определить длину серии T^0, классификацию $D^0 = (d_1^0, \dots, d_n^0)$ и параметры $\{\vartheta_i^0\}$, если они неизвестны; Б) оценить эффективность определения указанных характеристик.

Отметим, что в рассматриваемых задачах А, Б весьма существенно, что длина серии T^0 неизвестна; если же T^0 задано, то они сводятся к классическим задачам теории распознавания образов [I, 2].

<u>2. Статистические выводы о T^0, D^0 методом максимума правдоподобия.</u> Выберем произвольное значение $T \in A$ и обозначим:

$$n_T = n - [n/T], T \in \{0, 1, \dots, T-1\},\ K = K(T) = [n/T] + U(n_T), \qquad (1)$$

где $[z]$ – целая часть числа z, $U(z) = \{1, z > 0;\ 0, z \le 0\}$ – единичная функция Хэвисайда; $K^0 = K(T^0)$ – число серий в X; $I^0 = (I_1^0, \dots$ $\dots, I_{K^0}^0) \in S^{K^0}(L)$, где I^0 – истинный вектор классификации K^0 серий, δ_{ij} – символ Кронекера;

$$\tau_k = \tau_k(T) = T(U(K-k) + \delta_{kK}\, \delta_{n_T,0}) + n_T\, \delta_{kK} - \qquad (2)$$

число наблюдений в k-й серии; $X_k = (x_{(k-1)T+1}, \dots, x_{(k-1)T+\tau_k})$ – k-я серия наблюдений в предположении, что длина серии равна T;

$$f(x;\vartheta) = \ln p(x;\vartheta),\ x \in R^N,\ \vartheta \in \Theta,\ F_k(X_k; \vartheta_i, T) = \sum_{\tau=1}^{\tau_k} f(x_{\tau+(k-1)T}; \vartheta_i). \qquad (3)$$

Векторы D^0, I^0 взаимооднозначно связаны:

$$d_t^0 = I^0_{[(t-0.5)/T^0]+1},\quad t = \overline{1,n}. \qquad (4)$$

Из (I)-(4) найдем логарифмическую функцию правдоподобия:

$$l = l(T, I, \{\vartheta_i^0\}) = \sum_{k=1}^{K} F_k(X_k;\ \vartheta_{I_k}^0, T),\ T \in A,\ I \in S^k(L). \qquad (5)$$

Здесь предполагается, что $\{\vartheta_i^0\}$ априорно известны.

Оценки $\tilde{T}, \tilde{I} = (\tilde{I}_k)$ по критерию максимума правдоподобия определим соотношением:

$$l(\tilde{T}, \tilde{I}, \{\vartheta_i^0\}) = \max_{T \in A} \max_{I \in S^K(L)} l(T, I, \{\vartheta_i^0\}).$$

Из (5) видно, что $l(\cdot)$ сепарабельна по I, поэтому при фиксированном T классификация k-й серии X_k осуществляется решающим правилом:

$$\tilde{I}_k = \operatorname{argmax}_{i \in S(L)} F_k(X_k;\ \vartheta_i^0,\ T), \quad k = \overline{1, K(T)}. \tag{6}$$

Тогда решение о длине серии определяется правилом:

$$\tilde{T} = \operatorname{argmax}_{T \in A} l_1(T), \tag{7}$$

$$l_1(T) = \sum_{k=1}^{K} \xi_k, \ \xi_k = \xi_k(T) = \max_{i \in S(L)} F_k(X_k;\ \vartheta_i^0,\ T). \tag{8}$$

Оценка $\tilde{I} = (\tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_k)$ получается при подстановке $\tilde{T}$ в (6).

Исследуем свойства решений $\tilde{I}, \tilde{T}$. Во-первых, если $\tilde{T} = T^0$, то из (5), (6) следует, что $\tilde{I}_k$ есть решение по критерию максимума правдоподобия о принадлежности серии X_k к одному из заданных классов $\{\Omega_i\}$. Как известно, это решение оптимально: обеспечивает минимум вероятности ошибки в случае равновероятных классов.

Во-вторых, отметим особое свойство $\tilde{T}$. Пусть $\tau^0 < T^0$-делитель для T^0 (длина серии кратна τ^0: $T^0 = p\tau^0$, $p > 1$). Тогда k-я серия X_k длиной τ_k состоит из $\gamma_k = [(\tau_k - 0.5)/\tau^0] + 1$ серий (длиной $\le \tau^0$) и, согласно (8),

$$\xi_k(T) \le \sum_{j=1}^{\gamma_k} \xi_{(k-1)p+j}(\tau^0), \quad l_1(T) \le l_1(\tau^0). \tag{9}$$

Из (7), (9) следует, что если хотя бы один из делителей $\tau^0 \in A$, то оценка $\tilde{T}$ теряет свойство состоятельности. (Особенно он ощутим, если $T_- = 1$, тогда (7) дает тривиальную оценку $\tilde{T} \equiv 1$.)

3. Статистические выводы о T^0, I^0 с помощью критерия однородности. Для каждого $T \in A$ определим гипотезу однородности наблюдаемой последовательности X

$$H_{0T}: I_1 = I_2 = \dots = I_K \tag{10}$$

и альтернативу неоднородности H_{1T}, заключающуюся в нарушении хотя бы одного из K-1 равенств в (10). Если H_{0T} верна, то X - выборка из одного лишь класса $\Omega_{I_1^0}$.

Для проверки H_{0T}, H_{1T} применим критерий отношения правдоподобия [3]:

$$\text{принимается} \begin{cases} H_{0T}, & \text{если} \quad \lambda(T) < \gamma, \\ H_{1T}, & \text{если} \quad \lambda(T) \geq \gamma, \end{cases} \qquad (11)$$

$$\lambda(T) = \max l(T, I, \{\vartheta_i^0\}) - \max_{H_{0T}} l(T, I, \{\vartheta_i^0\}),$$

причем максимизация проводится по $I \in S^K(L)$ соответственно в отсутствие ограничения (10) и при его наличии. Из (5), (8) имеем:

$$\lambda(T) = l_1(T) - \max_{j \in S(L)} \sum_{t=1}^{n} f(x_t; \theta_j^0). \qquad (12)$$

Порог γ в (11) выберем так, чтобы удовлетворить заданному уровню значимости $0 < \alpha < 1$.

ЛЕММА. Статистика $\lambda(T)$ допускает представление:

$$\lambda(T) = \min_{j \in S(L)} \lambda_j, \quad \lambda_j = \sum_{k=1}^{K} \max_{i \in S(L)} \zeta_{kij}, \quad \zeta_{kij} = \sum_{\tau=1}^{\tau_k} \ln \frac{p(x_{\tau+(k-1)T}; \vartheta_i^0)}{p(x_{\tau+(k-1)T}; \vartheta_j^0)}.$$

Для нахождения γ требуется вычислить распределение λ, когда верна H_{0T}. Согласно лемме для этого требуется найти распределение порядковых статистик. При произвольном L это затруднительно. Рассмотрим случай двух (L = 2) классов.

Примем обозначения: $\bar{i} = S(2) \setminus \{ i \}$ - номер класса, противоположный $i \in S(2)$; $\Phi(z)$, $\varphi(z)$ - функция и плотность распределения стандартного нормального закона; $g_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1-\alpha)$ - квантиль уровня $1-\alpha$ стандартного нормального закона; $E_i\{\cdot\}$ - символ усреднения по распределению $p(x; \vartheta_i^0)$;

$$J(i, l) = E_i\{\ln(p(x_t: \vartheta_i^0)/p(x_t; \vartheta_l^0))\} \geq 0 -$$

информационное расхождение Кульбака [4] для распределений $p(\cdot; \vartheta_i^0)$, $p(\cdot; \vartheta_l^0)$;

$$\sigma^2(i,l) = E_i\left\{\ln^2\frac{p(x_t;\vartheta_i^0)}{p(x_t;\vartheta_l^0)}\right\} - J^2(i,l); \quad \delta(i,l) = \frac{J(i,l)}{\sigma(i,l)};$$

$$s = \operatorname*{argmax}_j \sum_{t=1}^{n} f(x_t;\ \vartheta_j^0);$$

$$\nu_i(T)=J(i,\bar{I})\,\delta^{-3}(i,\bar{I})\,\varphi(\sqrt{T}\,\delta(i,\bar{I})), \quad \mu_i(T)=2\sigma^2(i,\bar{I})\,\nu_i(T)/J(i,\bar{I}).$$

ТЕОРЕМА I. Если $0<J(i,\bar{I})<\infty$, $0<\sigma(i,\bar{I})<\infty$ $(i=1,2)$ и

$$\gamma = \gamma(s,\alpha,T) = nT^{-3/2}\nu_s(T) + g_{1-\alpha}\sqrt{nT^{-3/2}\mu_s(T)},$$

то при $T\to\infty$, $K\to\infty$ асимптотический размер теста (II), (I2) совпадает с заданным уровнем значимости α.

Теорема I доказывается с использованием леммы и асимптотического распределения $\lambda(T)$ при H_{0T}.

Из теоремы I следует, что при заданном α $\lambda(T)-\gamma(s,\alpha,T)$ есть статистическая мера различимости гипотез H_{0T}, H_{1T}. При $T=T^0$ различие между гипотезами H_{0T}, H_{1T} максимально, поэтому в качестве оценки T^0 используем статистику:

$$\hat{T} = \operatorname*{argmax}_{T\in A} (\lambda(T) - \gamma(s,\alpha,T)). \qquad (I3)$$

Определим вектор решений $\hat{I} = (\hat{I}_1,\ldots,\hat{I}_K)$ с помощью (6), в котором вместо T подставим $\hat{T}$.

Сравним оценки $\{\hat{T}, \hat{I}\}$ и $\{\tilde{T},\tilde{I}\}$. Их различие обусловлено лишь различием $\tilde{T}$ и $\hat{T}$. Поскольку второе слагаемое в (I2) от T не зависит, то из (7), (I2), (I3) имеем:

$$\tilde{T} = \operatorname*{argmax}_{T\in A} l_1(T), \quad \hat{T} = \operatorname*{argmax}_{T\in A} (l_1(T)-\gamma(s,\alpha,T)). \qquad (I4)$$

Целевая функция $l_1(T)$ отличается от целевой функции оценки $\hat{T}$ слагаемым $\gamma(s,\alpha,T)$. По построению $\gamma(s,\alpha,T)$ – монотонно убывающая функция от T. Поэтому наряду с (9) имеет место неравенство: $\gamma(s,\alpha,T^0) < \gamma(s,\alpha,\tau^0)$, позволяющее оценке $\hat{T}$ преодолевать эффект кратности.

4. Случай параметрической априорной неопределенности. Обобщим решающие правила из пункта 2 для ситуации, когда $\{\vartheta_i^0\}$ априорно неизвестны и по наблюдениям X требуется определить T^0, I^0, $\{\vartheta_i^0\}$. Гипотеза однородности имеет вид H_{0T}: $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \ldots = \vartheta_L$, $I_1 = I_2 = \ldots = I_k$.

Обозначим: $F_M(z)$ – функцию хи-квадрат распределения с M степенями свободы;

$$\lambda_1(T) = l_2(T) - l_3, \quad l_3 = \max_{\vartheta\in\Theta} \sum_{t=1}^{n} f(x_t;\ \vartheta),$$

$$l_2(T) = \max_{\vartheta_1,\ldots,\vartheta_L\in\Theta} \sum_{k=1}^{K} \max_{i\in S(L)} F_k(X_k;\ \vartheta_i, T).$$

ТЕОРЕМА 2. Если $\gamma = \gamma_1(\alpha, T) = \frac{1}{2} F^{-1}_{(L-1)m+K}(1 - \alpha)$, то асимптотический (при $n \to \infty$) размер α имеет тест:

$$\text{принимается} \begin{cases} H_{0T}, & \text{если} \quad \lambda_1(T) < \gamma, \\ H_{1T}, & \text{если} \quad \lambda_1(T) \geq \gamma. \end{cases}$$

Теорема 2 доказывается с использованием при H_{0T} асимптотического распределения $\lambda_1(T)$.

С помощью теоремы 2 определим оценку длины серии:

$$\hat{T} = \operatorname*{argmax}_{T\in A} \lambda_1(T). \tag{15}$$

В качестве оценок для $\{\vartheta_i^0\}$, I^0 будем использовать условные оценки максимального правдоподобия $\{\hat{\vartheta}_i\}$, $\hat{I} = (\hat{I}_k)$ (при условии $T = \hat{T}$), определяемые соотношениями:

$$\Psi(\hat{T};\ \hat{\vartheta}_1,\ldots,\hat{\vartheta}_L) = \max_{\vartheta_1,\ldots,\vartheta_L\in\Theta} \Psi(\hat{T};\ \vartheta_1,\ldots,\vartheta_L), \tag{16}$$

$$\Psi(T;\ \vartheta_1,\ldots,\vartheta_L) = \sum_{k=1}^{K} \max_{I_k\in S(L)} F_k(X_k;\ \vartheta_{I_k}, T); \tag{17}$$

$$\hat{I}_k = \operatorname*{argmax}_{i\in S(L)} F_k(X_k;\ \hat{\vartheta}_i, \hat{T}), \quad k = \overline{1,K}.$$

Задачи (15), (17) легко решаются перебором значений целевой функции: $T_+ - T_- + 1$ значений в задаче (15) и KL значений – в задаче (I7). Задача (I6) есть задача Стейнера-Вебера [5] математического программирования смешанного типа: K оптимизируемых переменных ($I \in S^K(L)$) дискретны и mL переменных ($\vartheta_1,\dots,\vartheta_L \in \Theta \subseteq R^m$) - непрерывны.

5. Исследование эффективности. Точность оценок $\hat{T}$, $\hat{I}$ будем характеризовать вероятностями ошибок:

$$Q_1 = \sum_{t=1}^{n} P\{\hat{d}_t \neq d_t^0\}/n - \tag{18}$$

средняя (за промежуток времени длительностью n) вероятность ошибочной классификации; $Q_2 = P\{\hat{T} \neq T^0\}$ - вероятность ошибочного определения длительности серии. В формуле (I8) последовательность $\hat{D} = (\hat{d}_1,\dots,\hat{d}_n)$ строится с помощью $\hat{I}$ аналогично (4).

Оценим потенциальную точность классификации (6), достижимую в ситуации, когда $\{\vartheta_i^0\}$ и T^0 известны априорно.

ТЕОРЕМА 3. Если $\{\vartheta_i^0\}$ известны, $\hat{T} = T^0$ и $0 < J(i,j) < \infty$, $0 < \sigma(i,j) < \infty$ $(i \neq j)$, то при T^0, $n_{T^0} \to \infty$, справедлива асимптотическая оценка для вероятности ошибочной классификации:

$$\frac{1}{K^0}\sum_{k=1}^{K^0} \max_{j \neq I_k^0} \Phi(-\sqrt{\tau_k}\,\delta(I_k^0,j)) \le Q_1 \le \frac{1}{K^0}\sum_{k=1}^{K^0} \sum_{j \neq I_k^0} \Phi(-\sqrt{\tau_k}\,\delta(I_k^0,j)).$$

Оценим теперь потенциальную точность определения длины серии в ситуации, когда $\{\vartheta_i^0\}$ априорно известны.

Обозначим: $\bar{A} = A \setminus \{T^0\}$,

$$\sigma^2 = \sum_{t=1}^{n} \sigma^2(d_t^0, \bar{d}_t^0)/n, \quad J = \sum_{k=1}^{K^0} J(I_k^0\ \bar{I}_k^0)/K^0,$$

$$\nu(T) = \sum_{k=1}^{K^0} \nu_{I_k^0}(T)/K^0 > 0, \quad \mu(T) = \sum_{k=1}^{K^0} \mu_{I_k^0}(T)/K^0 > 0, \tag{19}$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{T}\,K(T)} \sum_{k=1}^{K(T)} \sqrt{\sum_{\tau=1}^{\tau_k} \sigma^2(d^0_{\tau+(k-1)T}, \bar{d}^0_{\tau+(k-1)T})}\ .$$

ТЕОРЕМА 4. Если $\{\vartheta_i^0\}$ известны, $L = 2$, $0 < J(i,\bar{I}) < \infty$ $(i = 1,2)$, то при $T_- \to \infty$, $n/T_+ \to \infty$ для решающего правила $\tilde{T}$, определяемого (7), справедлива асимптотическая оценка:

$$\max_{T \in \bar{A}} Q_2(T) \le Q_2 \le \sum_{T \in \bar{A}} Q_2(T), \tag{20}$$

$$Q_2(T) = \begin{cases} \Phi\left(\sqrt{n}\, T^{-3/4} \nu(T)/\sqrt{\mu(T)}\right), \\ \text{если} \quad T^0 = pT, \\ \Phi\left(-\sqrt{\dfrac{\pi}{2(\pi-1)}\, n}\left(J - \sqrt{\dfrac{2}{\pi T}}\, \beta + \dfrac{2\nu(T^0)}{(T^0)^{3/2}}\right)/\sigma\right), \\ \text{если} \quad T^0 \ne pT, \end{cases} \tag{21}$$

где $p > 1$ – некоторое натуральное число.

Отметим, что $Q_2(T)$ есть вероятность ошибки $(\tilde{T} \ne T^0)$ в ситуации, когда проверяются лишь 2 гипотезы: длина серии равна T^0 или T. Оценка (20) остается верной и для решающего правила $\hat{T}$, определяемого (13), лишь только $Q_2(T)$ вычисляется по формуле:

$$Q_2(T) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{2} \Phi\left(-\dfrac{\gamma(i,\alpha,T) - \gamma(i,\alpha,T^0) + nT^{-3/2}\nu(T)}{\sqrt{nT^{-3/2}\mu(T)}}\right), \\ \qquad \text{если} \quad T^0 = pT, \\ \dfrac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{2} \Phi\left(-\sqrt{\dfrac{\pi n}{2(\pi-1)}}\left(J - \sqrt{\dfrac{2}{\pi T}}\beta + \dfrac{2\nu(T^0)}{(T^0)^{3/2}} + \dfrac{2(\gamma(i,\alpha,T) - \gamma(i,\alpha,T^0))}{n}\right)/\sigma\right), \\ \qquad \text{если} \quad T^0 \ne pT. \end{cases} \tag{22}$$

Из (20)-(22) видна состоятельность оценок $\tilde{T}, \hat{T}$ при $T^0 \ne pT$: $Q_2(T)$, $Q_2 \to 0$ и несостоятельность оценки $\tilde{T}$ при $T^0 = pT$.

СЛЕДСТВИЕ. Если $n/(T^0)^{3/2} \to 0$, $\mu_1(T) = \mu_2(T) = \mu(T)$, то для оценки $\hat{T}$

$$Q_2\left(\frac{T^0}{p}\right) = \alpha + p^{-3/2} g_{1-\alpha}\varphi(g_{1-\alpha}) + O(p^{-3/4}). \tag{23}$$

Формула (23) показывает, что заданная точность оценки $\hat{T}$ в случае эффекта кратности обеспечивается выбором α. Отметим еще, что если $\{I_k^0\}$ – последовательность независимых случайных номеров классов, то в условиях теоремы 4 величины, определяемые (19), имеют пределы (в смысле сходимости почти наверное), и именно эти пределы следует использовать в (20)-(22).

6. Численные результаты. Пусть $\mathcal{P}$ – семейство N-мерных гауссовских плотностей с фиксированной ковариационной матрицей Σ ($|\Sigma| \neq 0$), $p(x;\vartheta) = n_N(x|\vartheta,\Sigma)$, классы равновероятных ($\{I_k^0\}$ – независимые случайные величины, $P\{I_k^0 = l\} = 1/L$, $l = \overline{1,L}$, $k = \overline{1,K^0}$). Обозначим $\Delta_{il} = ((\vartheta_i^0-\vartheta_l^0)^T\Sigma^{-1}(\vartheta_i^0-\vartheta_l^0))^{1/2}$ расстояние Махаланобиса между классами Ω_i, Ω_l. Согласно теореме 3 получаем оценку вероятности Q_1:

$$\frac{1}{K^0}\sum_{k=1}^{K^0}\max_{j\neq I_k^0}\Phi(-\sqrt{\tau_k}\,\Delta_{jI_k^0}/2) \le Q_1 \le \frac{1}{K^0}\sum_{k=1}^{K^0}\sum_{j\neq I_k^0}\Phi(-\sqrt{\tau_k}\,\Delta_{jI_k^0}/2), \tag{24}$$

которая при $L=2$ дает точное выражение: $Q_1 = \Phi(-\sqrt{T^0}\,\Delta_{12}/2)$. Вероятность $Q_2(T)$ вычислим для оценки $\hat{T}$ согласно (22):

$$Q_2(T)=\begin{cases}\Phi\left(-\dfrac{\gamma(\alpha,T)-\gamma(\alpha,T^0)-nT^{-3/2}\nu(T)}{2\sqrt{nT^{-3/2}\nu(T)}}\right), & T^0 = pT,\\[2ex] \Phi\left(-\sqrt{\dfrac{\pi n}{2(\pi-1)}}\left(\dfrac{\Delta_{12}}{2}-\sqrt{\dfrac{2}{\pi T}}+\dfrac{2\nu(T^0)}{\Delta_{12}(T^0)^{3/2}}+\dfrac{2(\gamma(\alpha,T)-\gamma(\alpha,T^0))}{n\,\Delta_{12}}\right)\right), & \\ & T^0 \neq pT,\end{cases} \tag{25}$$

где $\nu(T) = 4\Delta_{12}^{-1}\varphi(\sqrt{T}\Delta_{12}/2)$, $\gamma(\alpha, T) = nT^{-3/2}\nu(T)+2g_{1-\alpha}\sqrt{nT^{-3/4}}\sqrt{\nu(T)}$. В случае оценки $\tilde{T}$ достаточно в (25) положить $\gamma = 0$.

Описанные в п п. 3,4 решающие правила реализованы на ЕС ЭВМ и исследованы методом статистического моделирования. На рис.1 изображены графики $l_1(T)$, $l_1'(T) = l_1(T) - \gamma(s,\alpha,T)$ статистик (8), (14), иллюстрирующие эффект кратности для оценки $\tilde{T}$ и его преодоление оценкой $\hat{T}$ в одном из численных экспериментов при $L = 2$, $N = 2$, $T^0 = 15$, $T_- = 4$, $T_+ = 32$, $\Delta = 0{,}85$, $\alpha = 0{,}01$, $n = 200$. Эффект кратности существенно ухудшает точность классификации, например, при $n = 500$ $\hat{Q}_1 = 0{,}03$ для оценки $\hat{T}$ и $\hat{Q}_1 = 0{,}23$ для оценки $\tilde{T}$. На рис.2 для вышеуказанных параметров кружками помечены статистические оценки $\hat{Q}_2$; здесь же сплошными линиями изображены 95% – до-

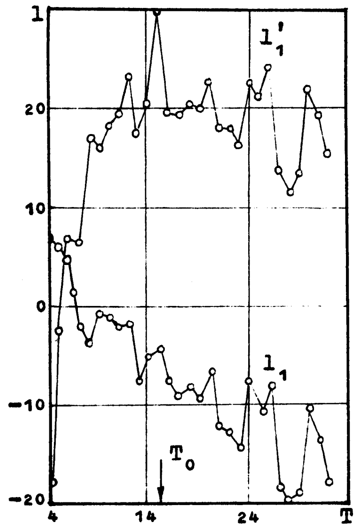

Рис.I

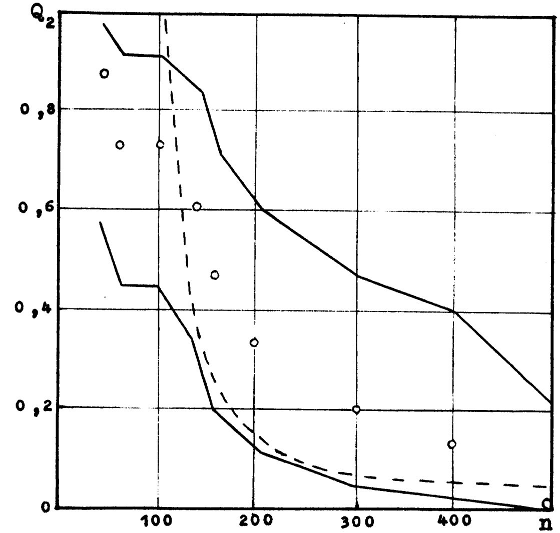

Рис.2

верительные границы для Q_2, а штриховой линией - верхняя граница для Q_2, определенная асимптотическими выражениями (20), (25).

Таким образом, в работе получены следующие основные результаты.

Для классификации случайных серий неизвестной длины предложено использовать критерий однородности. Найдены решающие правила для классификации и определения длины серии по критерию максимума правдоподобия и критерию однородности. Для решающих правил, основанных на критерии максимума правдоподобия, выявлен нежелательный эффект кратности; он преодолевается правилами, основанными на критерии однородности.

Литература

I. ВАПНИК В.Н., ЧЕРВОНЕНКИС А.Я. Теория распознавания образов. -М.: Наука, 1974. - 415 с.

2. МИЛЕНЬКИЙ А.В. Классификация сигналов в условиях неопределенности. -М.: Сов.радио, 1975. - 328 с.

3. КОКС Д., ХИНКЛИ Д. Теоретическая статистика. -М.: Мир, 1978. - 560 с.

4. КУЛЬБАК С. Теория информации и статистика. -М.: Наука, 1967. - 408 с.

5. Исследование операций. Т.2. Модели и применения. Под ред. Дж.Моудера. -М.: Мир, 1967. - 410 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
12 марта 1984 года