АРХИТЕКТУРА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ
(Вычислительные системы)
1984 год Выпуск 104

УДК 681.322

СВОЙСТВО НЕВОЗВРАТНОСТИ И РЕГУЛЯРНОСТЬ СВОБОДНЫХ ЯЗЫКОВ СЕТЕЙ ПЕТРИ

Б.Л.Будинас

В статье формулируется свойство невозвратности сетей Петри, при этом имеются в виду сети Петри как с запретами (ингибиторные сети), так и без них. Сети, обладающие этим свойством, называются невозвратными. Невозвратность сетей является обобщением свойства ограниченности и кратко его можно сформулировать так: если маркировка сети по какой-то позиции становится достаточно большой,то в дальнейшем (при срабатывании переходов сети) маркировка по этой позиции не может стать меньше некоторого числа.

Изучаются свойства этого класса сетей Петри, в частности,доказывается, что свободные языки этих и только этих сетей регулярны. Устанавливается разрешимость свойства невозвратности для сетей Петри без запрета и неразрешимость этого свойства для сетей Петри с запретами.

Результат того, что по сети Петри без запретов можно эффективно установить,порождает ли она регулярный свободный язык,впервые получен в [I,2]. Наше доказательство упомянутых выше результатов получено независимо и весьма близко к доказательству в [I], в частности, некоторые утверждения настоящей статьи, касающиеся сетей Петри без запретов, в явном или неявном виде содержатся в [I]. Например, в [I,2] фактически доказывается, что для сетей Петри без запретов регулярность свободного языка эквивалентна невозвратности сети.

План статьи таков. В § I формулируется понятие невозвратности и начинается доказательство теоремы об эквивалентности свойства невозвратности и свойства порождать регулярный свободный язык. Параграф 2 посвящен понятию графа достижимости сетей Петри и в нем завершается доказательство теоремы. В § 3 приводится ряд интересных фактов, связанных с невозвратностью (в частности, рассматривается вопрос о разрешимости этого свойства).

Автор глубоко признателен А.А.Талю за многочисленные обсуждения затронутых в этой работе вопросов. Итогом этих обсуждений и является настоящая статья.

§ I. Условие невозвратности

В статье рассматриваются сети Петри с запрещающими дугами (см.,например, [3]). Кратность дуг может быть больше единицы (это не относится, очевидно, к запрещающим дугам). Такие сети будем называть сетями Петри с запретами; если запрещающих дуг нет, то будем говорить об обычных сетях Петри. Говоря о сети Петри, мы подразумеваем как соответствующий двудольный граф, который полностью описывает правила изменения маркировки сети, так и начальную маркировку сети. Сети Петри с запретами обладают большой моделирующей силой, в частности, любую машину Минского можно изобразить в виде сети Петри с запретами. Свободным языком сети С называется множество всех конечных допустимых последовательностей переходов, т.е. таких последовательностей переходов, которые могут сработать друг за другом, переводя сеть из начального состояния в некоторое другое (не обязательно тупиковое).Такой язык сети обозначим $L_1(C)$.

Каждой допустимой последовательности переходов соответствует последовательность маркировок, получающаяся в результате срабатывания переходов из этой последовательности. Такие последовательности маркировок назовем в ы ч и с л е н и я м и с е т и. Вообще, если задано некоторое множество правил изменения маркировок (в случае сети - правила срабатывания переходов), то, очевидно, возникает понятие допустимой последовательности маркировок и понятие вычисления.

Теперь определим одно свойство сетей, которое будем называть условием невозвратности. Позиция сети Петри (с запретами или без них) называется н е в о з в р а т н о й, если для любого натурального N найдется такое число K_N, что если из начальной маркировки достижима маркировка M с условием $M(p) \geq K_N$, то из M недостижима никакая маркировка M' с условием $M'(p) < N$ (через $M(p)$ обозначается число меток в позиции p при маркировке M).Сеть называется н е в о з в р а т н о й, если каждая позиция сети невозвратна. Так как число позиций сети конечно, то числа K_N могут быть выбраны независимо от позиции p.

Теперь сформулируем основное утверждение, характеризующее свойство невозвратности сетей в терминах порождаемого ими свободного языка.

ТЕОРЕМА. Сеть Петри C (с запретами или без них) невозвратна тогда и только тогда, когда язык $L_1(C)$ регулярен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы будет разбито на две части. Сначала будет показано, что невозвратные сети обладают регулярным свободным языком. Для доказательства обратного нам потребуется ввести два понятия. Первое понятие – это моделируемость сетей Петри с запретами, у которых свободный язык регулярен, обычными сетями Петри. Тем самым случай сетей Петри с запретами удается свести к случаю обычных сетей. Второе понятие – граф достижимости,которому посвящен § 2 настоящей статьи.

Итак, сначала докажем, что из невозвратности следует регулярность языка. Пусть N больше всех кратностей дуг, которые встречаются в сети. Рассмотрим число K_N (так как сеть невозвратна,то по каждому N найдется такое K_N, что...). Переход t называется возбужденным по позиции p, если в p содержится меток не меньше,чем кратность дуги, ведущей из p в t (если такой дуги нет, то кратность равна нулю). Из определения K_N непосредственно следует: если в позиции p появилось $\geq K_N$ меток, то всегда в дальнейшем любой переход возбужден по позиции p, т.е. позиция p фактически на работу переходов сети больше не влияет. Отсюда следует, что работа сети (в смысле срабатывания переходов и языка L_1) полностью описывается системой с конечным числом состояний вида $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, где n – число позиций сети, каждое α_i либо натуральное число $\leq K_N$, либо ω_i – символ бесконечности, который означает, что по позиции p_i любой переход всегда возбужден. Переход t называется возбужденным в состоянии $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, если для всех i верно $\alpha_i \geq k_i$,где k_i есть кратность дуги, ведущей из позиции p_i в переход t, причем считается, что всегда $\omega_i \geq k_i$. Если t возбужден в состоянии $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, то из этого состояния ведет дуга, помеченная переходом t, в состояние $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, которое получается после срабатывания перехода t. Состояние определяется так: если $\alpha_i = \omega_i$, то $\beta_i = \omega_i$; если $\beta_i > K_N$, то полагаем $\beta_i = \omega_i$; в остальных случаях β_i равно числу меток в позиции p_i после срабатывания перехода t. Из определения N и K_N следует: множество допустимых последовательностей переходов сети (т.е. язык L_1) совпадает с множеством всевозможных путей в описанном графе состояний с конечным числом вершин. Отсюда следует регулярность этого множества путей. Итак, из невозвратности следует регулярность свободного языка.

План доказательства обратного утверждения таков. Пусть сеть Петри с запретами имеет регулярный свободный язык. Ниже мы покажем, как построить обычную сеть Петри, которая будет моделировать первоначальную сеть. Моделирующая сеть будет иметь столько же позиций (называемых обычными позициями), как и первоначальная сеть, плюс некоторое количество управляющих позиций, по которым будет "бегать" лишь одна метка, причем маркировки обычных позиций в точности совпадают с маркировками первоначальной сети. Моделирующая сеть невозвратна тогда и только тогда, когда невозвратна моделируемая сеть. Пользуясь регулярностью языка доказывается невозвратность моделирующей сети, тем самым невозвратность первоначальной сети. Невозвратность моделирующей сети доказывается с помощью понятия графа достижимости и некоторой характеристики невозвратности в терминах этого графа (см. лемму в § 2).

Итак, пусть сеть Петри с запретами имеет регулярный свободный язык. Тогда найдется конечный автомат, распознающий этот язык. Рассмотрим граф состояний этого автомата. Каждая дуга на этом графе помечена некоторым переходом сети, причем можно допустить следующее: имеется единственное начальное состояние автомата, причем множество заключительных состояний совпадает с множеством всех состояний автомата, так как мы рассматриваем свободный язык и начало любого слова языка тоже принадлежит языку. Итак, множество всех допустимых последовательностей переходов (язык L_1) совпадает с множеством всех путей в графе состояний, выходящих из начальной вершины. В графе состояний над каждой дугой мы надпишем вектор, равный изменению маркировки при срабатывании перехода, соответствующего этой дуге. Двигаясь по дуге, мы к текущей маркировке будем прибавлять вектор, надписанный над этой дугой - этим будут определяться вычисления на графе. Легко видеть, что вычисления сети просто совпадают с таким образом определенными вычислениями на графе.

Теперь по графу состояний с надписанными над дугами векторами строится обычная сеть Петри. Она состоит из n обычных позиций, соответствующих первоначальной сети, и управляющих позиций - по одной для каждой вершины графа состояний. Начальная маркировка сети: маркировка обычных позиций такая же, как маркировка первоначальной сети, и одна метка находится в соответствующей начальной вершине графа состояний. По управляющим позициям будет "бегать" лишь эта одна метка, и ее положение как бы определяет, в какой вершине графа состояний мы находимся. Каждой дуге графа состояний, ведущей из вершины a в вершину b, соответствует переход $t_{a,b}$. Очевидно, можно так определить дуги и их кратности, ведущие в переход $t_{a,b}$ и выходящие из перехода $t_{a,b}$, чтобы выполнялось следующее: I) если переход $t_{a,b}$ возбужден, то в позиции, соответствующей вершине a, есть метка; 2) после срабатывания перехода $t_{a,b}$ метка в этой позиции исчезает и появляется в позиции, соответствующей вершине b; 3) в результате срабатывания перехода $t_{a,b}$ маркировка обычных позиций меняется на вектор, надписанный над дугой ab.

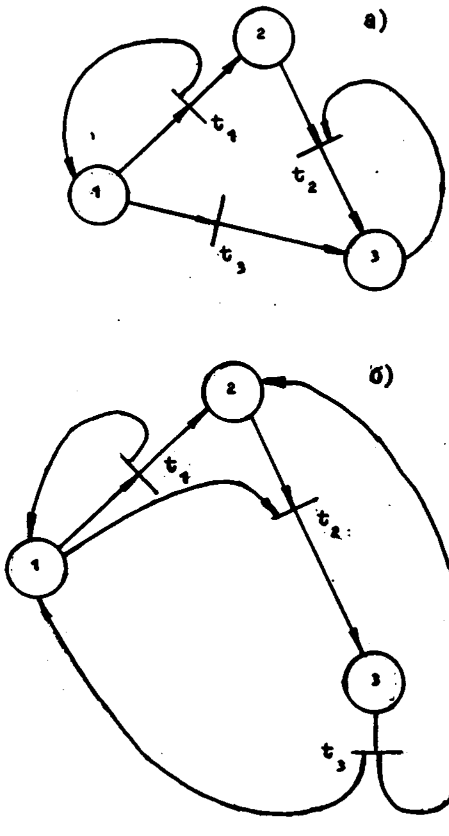

Рис.I

Легко видеть, что вычисления на такой (обычной!) сети Петри, если мы ограничимся лишь обычными позициями, будут те же самые, что и на первоначальной сети, и на графе состояний.

§ 2. Граф достижимости

Для изучения обычных сетей Петри (но не сетей Петри с запретами!) используется конструкция дерева достижимости (см., например, [3]). Из дерева дости-

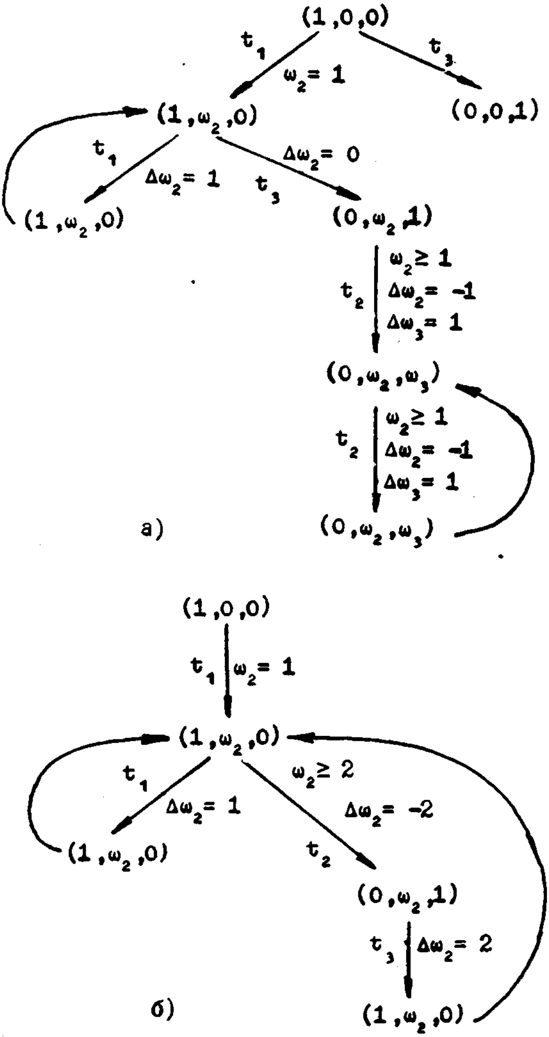

Рис.2

жимости довольно естественно получается граф достижимости, по которому можно "читать" все вычисления сети Петри (аналогичное понятие встречается в [I]). Кратко опишем конструкцию графа достижимости. В качестве примера на рис.I изображены две сети Петри, на рис.2 – их графы достижимости.

В корень дерева помещается начальная маркировка, каждая ветвь соответствует активному в этой маркировке переходу и ведет в маркировку, получающуюся после срабатывания этого перехода. Новые маркировки таким же образом расщепляются и т.д. Однако если на каком-нибудь пути встретятся сначала маркировка M, а потом M', причем $M(p) \leq M'(p)$ для всех p, то поступаем следующим образом. При выполнении для всех p условия $M(p) = M'(p)$ маркировку M' больше не расщепляем и проводим дополнительную (возвратную) дугу из M' в M. Если же $M(p) < M'(p)$, то для таких p в маркировке M' пишем символ ω_p и далее, расщепляя M', считаем ω_p очень большим числом, т.е. любой переход активен по позиции p (подробности см., например, в [3]). Единственное отличие от дерева достижимости состоит во введении возвратных дуг.

На графе достижимости мы можем проделать следующие вычисления. В корне дерева находится начальная маркировка. Двигаясь по ветвям дерева, мы меняем эту маркировку соответственно срабатыванию переходов (эти маркировки записаны в вершинах дерева). Так доходим до вершины, где появляются символы ω. Придя в эту вершину, мы получим конкретную маркировку (символы ω как бы принимают конкретные значения). Двигаемся дальше из этой вершины. Так как при построении графа достижимости мы считали ω очень большими, то с этими конкретными значениями ω мы можем двигаться не по любым ветвям. Возможность (допустимость) движения по ветвям будет определяться неравенствами типа $\omega_i \geq k_i$; в результате движения по ветвям значения ω_i будут меняться на значения $\Delta\omega_i$ (число k_i и изменение $\Delta\omega_i$ определяются переходом, соответствующим ветви, по которой мы движемся). Рис.2 иллюстрирует сказанное выше. Каждой допустимой последовательности срабатываний переходов соответствует некоторый путь (допустимый путь) в графе достижимости, и наоборот, каждому допустимому пути в графе достижимости соответствует допустимая последовательность переходов (допустимый путь в графе достижимости - это любой путь из начальной вершины графа, вдоль которого делаются допустимые движения; отметим, что движение по возвратной дуге всегда допустимо, независимо от значений φ).

Итак, работу сети Петри (последовательность переходов и маркировок сети) мы можем представить эквивалентным способом с помощью допустимых путей и вычислений вдоль этих путей на графе достижимости.

Введем еще одно понятие. Пусть некоторая вершина графа достижимости содержит обобщенную маркировку M и $M(p)=\omega(p)$. Тогда любая другая вершина, в которую ведет путь из нашей вершины, тоже содержит обобщенную маркировку с символом ω_p . Рассматривая любой путь, начинающийся в вершине с символом ω_p , мы можем вычислить $\Delta\omega_p$ вдоль этого пути, а именно сложить все $\Delta\omega_p$, которые соответствуют каждой ветви пути (возвратным дугам соответствует $\Delta\omega_p = 0$). Путь уменьшает ω_p , если $\Delta\omega_p$ вдоль этого пути меньше нуля. Следующая лемма характеризует невозвратность в терминах циклов в графе достижимости.

ЛЕММА. О б ы ч н а я с е т ь П е т р и н е в о з в р а т н а т о г д а и т о л ь к о т о г д а, к о г д а в е е г р а ф е д о с т и ж и м о с т и н е т ц и клов, уменьшающих некоторое ω_p.

Набросок доказательства леммы. Пусть обычная сеть невозвратна, но в ее графе достижимости есть цикл, уменьшающий некоторое ω_p. Пусть у нас есть путь L по ветвям графа достижимости, ведущий в вершину a, и цикл, начинающийся и кончающийся в вершине a. Пусть $\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}$ – все ω – символы в маркировке, которая находится в вершине a. Пусть для прохождения нашего уменьшающего цикла достаточно неравенств $\omega_{i_j} \geq k_{i_j}$. Отметим, что $\omega_p = \omega_{i_j}$ для некоторого j. Рассмотрим K_N при N больше всех k_{i_j}. Путь L нарастим такими циклами (с соответствующей кратностью), что по этому новому пути в вершину a мы придем со значениями $\omega_{i_j} > K_N$. Продолжим путь, двигаясь все время по нашему уменьшающему циклу. Очевидно, этот цикл мы можем пройти лишь конечное число раз, так как значения ω_p при каждом прохождении уменьшаются, а мы не можем получить отрицательные значения маркировок. Поэтому когда-нибудь мы придем к вершине a с такими значениями ω_{i_j}, что пройти еще один цикл не сможем. Отсюда следует, что при некотором j будет выполняться $\omega_{i_j} < k_{i_j} < N$, что противоречит невозвратности сети и выбору числа K_N.

Наоборот, пусть в графе достижимости нет уменьшающих циклов, т.е. каждый цикл не уменьшает ω_p (p – любая позиция). Покажем, что существует такая константа L (которую назовем константой невозвратности), что если в сети позиция имеет какое-то число, например K, меток, то она никогда в дальнейшем не сможет содержать меньше, чем K-L меток. Для этого достаточно оценить, на какую величину может уменьшаться значение ω_p по любому пути – эта величина и будет давать константу невозвратности. Формально нужно учесть еще уменьшения координат, которые имеют место в той части графа достижимости, где нет символов ω_p, но эта часть графа содержит лишь конечное число путей, так как там нет циклов. Фиксируем путь. Если ω_p уменьшается вдоль этого пути на S единиц, то, удаляя из этого пути цикл, если он там есть, мы получим путь, вдоль которого ω_p уменьшается не меньше, чем на S единиц. Удаляя последовательно все циклы, мы получим простой путь, т.е. путь без циклов. Таким образом, достаточно рассмотреть уменьшения ω_p вдоль простых путей, а их в графе лишь конечное число. Максимум из уменьшения ω_p (при разных p) по различным простым путям и даст искомую константу невозвратности. Из существования такой константы следует невозвратность сети. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Итак, пусть свободный язык сети Петри с запретами регулярен. Строим моделирующую обычную сеть Петри, нам достаточно доказать ее невозвратность. Для этого в свою очередь достаточно доказать, что в ее графе достижимости нет уменьшающих циклов. Пусть такие циклы есть. Рассуждаем аналогично доказательству первой части леммы. Рассмотрим некоторый путь, заканчивающийся уменьшающим ω_p циклом. К пути мы можем присоединить некоторое количество увеличивающих ω_p циклов. Но максимальное число уменьшающих циклов жестко зависит от числа увеличивающих циклов. В самом простом случае, например, число уменьшающих циклов не больше числа увеличивающих циклов. Легко видеть, что конечный автомат такой зависимости распознать не может. Теорема доказана.

§ 3. Некоторые следствия свойства невозвратности

Сеть Петри (с запретами или без) называется **конечно невозвратной**, если существует такая константа L, что все числа K_N, которые участвуют в определении невозвратности, равны числам $N+L$. Число L называется константой невозвратности (об этой константе уже шла речь в доказательстве леммы). Сеть называется **невозвратной к числу** N, если существует такое K_N, что из любой достижимой маркировки M с условием $M(p) \geq K_N$ (здесь p - любая позиция сети) не достигается маркировка M' с условием $M'(p) < N$. Через $n(C)$ обозначим максимальную кратность дуг в сети C.

УТВЕРЖДЕНИЕ I. **Для сети Петри** C (с запретами или без них) **эквивалентны следующие условия: невозвратность, конечная невозвратность, невозвратность к числу** $n(C)$.

К тому же по невозвратной сети константу невозвратности можно определить эффективно.

Набросок доказательства. Из конечной невозвратности следует невозвратность и невозвратность к числу $n(C)$. Невозвратные сети имеют регулярный свободный язык и поэтому моделируются обычными сетями Петри. В лемме фактически показано, что для обычных сетей из невозвратности следует конечная невозвратность. В доказательстве первой части теоремы фактически показано, что невозвратности к числу n(C) уже достаточно для регулярности языка и тем самым для невозвратности.

Для определения константы невозвратности (когда она существует!) можно предложить следующую процедуру. Сначала определяется понятие графа достижимости для сетей Петри с запретами и в этом определении заменяются числа на символы ω лишь в тех случаях, когда эти числа больше некоторого K (так называемые K-графы достижимости, см. утверждение 4 ниже). Однако в общем случае такие K-графы достижимости для сетей с запретами смысла не имеют - вычисления на них не отражают вычислений самой сети. Но в случае невозвратности и выбора достаточно большого числа K (например такого, как в доказательстве первой части теоремы) вычисления на таком K-графе совпадают с вычислениями на сети. Поэтому по сети с запретами мы можем последовательно строить I-граф достижимости, 2-граф достижимости и т.д., проверяя их корректность (соответствие вычислениям сети). Проверка корректности будет заключаться в поиске уменьшающих циклов, а также в том, чтобы после появления в графе символа ω_p позиция p не была бы запрещающей в некотором переходе. Эту проверку можно делать эффективно для каждого K-графа. В случае невозвратной сети мы найдем корректный K-граф и по нему найдем константу невозвратности таким же способом, каким мы это делали при доказательстве второй части леммы. Утверждение I доказано.

Отметим любопытное следствие утверждения I. Пусть мы хотим построить сеть Петри (в общем случае с запретами), в которой была бы позиция, не являющаяся конечно невозвратной, т.е. не было бы такой константы L, что число меток в этой позиции может уменьшаться не более чем на L. Например, число меток последовательно увеличивается с I до 10^2, уменьшается до 10, увеличивается до 10^3, уменьшается до 10^2 и т.д. Тогда в такой сети обязательно найдется возвратная позиция, т.е. неограниченная, но всегда возвращающаяся к числу n(C).

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Свойство невозвратности разрешимо для обычных сетей Петри и неразрешимо для сетей Петри с запретами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме невозвратность для обычных сетей Петри эквивалентна отсутствию уменьшающих циклов. Причем достаточно рассмотреть лишь простые циклы (т.е. циклы без самопересечений), число которых конечно.

Пусть мы умеем распознавать невозвратность сетей Петри с запретами. Получим противоречие, показав, что тогда мы умеем распознавать ограниченность таких сетей (а,как известно,эта проблема неразрешима даже для машин Минского). Из ограниченности сети следует ее невозвратность. Поэтому если сеть не является невозвратной, то она неограничена. Если же она является невозвратной,то по утверждению I мы эффективно находим константу невозвратности и строим моделирующую обычную сеть Петри. По этой обычной сети проверяем ее ограниченность (строим дерево достижимости и смотрим, встречаются ли там символы ω). Утверждение 2 доказано.

Приведем без доказательств еще два утверждения,характеризующие свойство невозвратности.

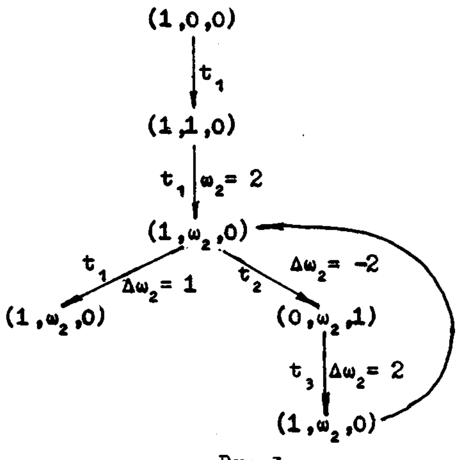

Рис.3

Определим R-ограничение сети Петри следующим образом. Условия возбуждения переходов остаются прежними, но если переход сработал и получилась маркировка M с условием $M(p) > R$ (p - любая позиция) , то получаем $M(p) = R$ (эффект переполнения). Если переполнения не произошло, переход срабатывает как обычно. Отметим, что в доказательстве первой части теоремы рассмотрен случай другого ограничения - после переполнения позиция всегда остается переполненной, о чем свидетельствует символ ω .

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Для сетей Петри (с запретами или без них) условие невозвратности эквивалентно тому, что языки L_1 самой сети и ее некоторого R-ограничения совпадают.

Для определения К-графа достижимости мы изменим построение графа лишь в одной детали. А именно символ ω будет появляться лишь вместо таких значений $M'(p)$, для которых $M'(p) \geq K$ (см.§ 2). Допустимые пути в этом К-графе достижимости в точности соответствуют допустимым последовательностям переходов первоначальной обычной сети Петри.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Для обычных сетей Петри невозвратность эквивалентна безусловности некоторого ее К-графа достижимости.

Безусловность означает допустимость всех путей в графе. На рис.3 показан безусловный 2-граф достижимости сети, изображенной на рис.I,б.

Литература

1. VALK R., VIDAL-NAQUET G. Petri nets and regular languages. –J.Comp.and system sci., 1981,v.23,N 3,p.299-325.

2. GINZBURG A., YOELI M. Vector additional systems and regular languages. – J.Comp.and system sci.,1980,v.20,N 3.

3. КОТОВ В.Е. Сети Петри.–М.: Наука, I984.

Поступила в ред.-изд.отд.
23 октября I984 года