П Р И Б Л И Ж Е Н И Е С П Л А Й Н А М И
(Вычислительные системы)
1984 год Выпуск 106

УДК 519.65

О ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ МНОГОЧЛЕНАМИ ЛАГРАНЖА ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ

В.Л. Мирошниченко

Введение

Классическим аппаратом приближения функций является интерполяция многочленами Лагранжа. По разным причинам на практике обычно ограничиваются многочленами невысоких степеней. В данной работе найдены точные по порядку и константам оценки приближения функции и ее производных многочленами Лагранжа третьей степени. Оценки получены при минимальных требованиях к гладкости интерполируемой функции, обеспечивающих максимально возможные порядки приближения. Кроме того, показано, что константы в этих оценках не могут быть уменьшены и при любых более высоких требованиях к гладкости интерполируемой функции.

На практике при интерполяции функций часто используются кубические сплайны класса C^2 с так называемыми граничными условиями типа IУ [3], которые не требуют задания дополнительной информации на концах промежутка интерполяции. Погрешность приближения для этого случая подробно исследована в [3,5,6]. Если число узлов интерполяции равно четырем, то сплайн с граничными условиями типа IУ совпадает с интерполяционным многочленом Лагранжа третьей степени. Это обстоятельство послужило поводом к детальному изучению оценок погрешности полиномами Лагранжа, так как известные классические результаты по некоторым причинам, которые обсуждаются ниже, оказались неудовлетворительными. Отметим, что большинство полученных в данной работе оценок без доказательства приведено в [5,6].

Пусть в узлах $x_0 < x_1 < x_2 < x_3$ заданы значения $f_i = f(x_i)$, $i = 0,1,2,3$, функции $f(x)$. Многочлен Лагранжа третьей степени

$L(x)$, удовлетворяющий условиям $L(x_i) = f_i$, $i=0,1,2,3$, записывается в виде

$$L(x) = f_0 + (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] + \\ + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f[x_0,x_1,x_2,x_3]. \qquad (1)$$

Здесь

$f[x_i,x_{i+1}] = (f_{i+1}-f_i)/h_i, h_i = x_{i+1}-x_i$, $i=0,1,2$;

$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}] = \{f[x_{i+1},x_{i+2}]-f[x_i,x_{i+1}]\}/(h_i+h_{i+1})$, $i=0,1$;

$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]\}/(h_0+h_1+h_2)$ –

разделенные разности соответственно первого, второго и третьего порядков.

Обозначим $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.

Как обычно, под $C^k[a,b]$ понимается класс функций $\varphi(x)$ с непрерывной k-й производной на промежутке $[a,b]$ и нормой

$$\|\varphi\|_{C[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |\varphi(x)|.$$

В [I,c.I56] для $f(x) \in C^{4+r}[x_0,x_3]$ в точке $x\in[x_0,x_3]$ выведено явное представление погрешности

$$f^{(r)}(x) - L^{(r)}(x) = \sum_{j=0}^{r} \frac{r!}{(r-j)!(4+j)!} f^{(4+j)}(\xi_j)\,\omega^{(r-j)}(x), \qquad (2)$$
$$r = 0,1,2,3,$$

где $\xi_j \in [x_0, x_3]$. Отсюда

$$\|f^{(r)}(x)-L^{(r)}(x)\|_{C[x_i,x_{i+1}]} \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{r} \frac{r!}{(r-j)!(4+j)!} \|\omega^{(r-j)}\|_{C[x_i,x_{i+1}]} \|f^{(4+j)}\|_{C[x_0,x_3]} ,$$
$$i=0,1,2 \; ; \quad r=0,1,2,3.$$

Вычисляя теперь величины $\|\omega^{(r)}\|_{C[x_i,x_{i+1}]}$ и определяя их максимальные значения при условиях $h_i \le H = \max\{h_0,h_1,h_2\}$, а также принимая во внимание соотношение $\|\omega^{(r-j)}\|_{C[x_i,x_{i+1}]} = O(H^{5-r})$, справедливое при $j \ge 1$, нетрудно получить

$$\|L(x) - f(x)\|_{C[x_i, x_{i+1}]} \le K_{0,i} H^4 \|f^{IV}\|_C, \tag{3}$$

$$\|L^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)\|_{C[x_i, x_{i+1}]} \le K_{r,i} H^{4-r} \|f^{IV}\|_C + O(H^{5-r}), \tag{4}$$

$$i=0,1,2; \quad r=1,2,3,$$

где $\|f^{IV}\|_C = \|f^{IV}\|_{C[x_0, x_3]}$, постоянные $K_{r,i}$ не зависят от f, $K_{r,0} = K_{r,2}$. Значения $K_{r,i}$, $r=0,1,2,3$; $i=0,1$, приведены в таблице.

Таблица

i	r = 0	r = I	r = 2	r = 3
0	$\frac{16}{384}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{3}{2}$
I	$\frac{9}{384}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{3}{4}$

Характерная особенность оценок (4) состоит в наличии "хвостов" порядка $O(H^{5-r})$. Таким образом, оценки носят асимптотический характер, и поэтому пользоваться ими можно фактически только при достаточно малых H, когда есть уверенность, что "хвосты" малы по сравнению с главными членами погрешности. Кроме того, довольно жесткими являются требования к гладкости функции $f(x)$. Например, при получении оценки приближения первой производной предполагается, что $f(x) \in C^5[x_0, x_3]$. То, что это требование чрезмерно, следует из полученного в [I,с.I58] соотношения

$$L'(x) - f'(x) = -\frac{1}{3!} f^{IV}(\xi)(x-\xi_0)(x-\xi_1)(x-\xi_2),$$

где $\xi \in [x_0, x_3]$, $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,1,2$. Отсюда нетрудно вывести, что

$$\|L'(x) - f'(x)\|_{C[x_i, x_{i+1}]} \le 4K_{1,i} H^3 \|f^{IV}\|_C, \; i = 0,1,2. \tag{5}$$

В данном случае снижение требований к гладкости $f(x)$ привело к значительному увеличению постоянных в оценках. Это верно и для оценок приближения второй и третьей производных. Однако справедливости ради, отметим, что в (5) в отличие от (4) отсутствуют "хвосты".

В целом обоим рассмотренным типам оценок свойственны определенные недостатки.

Основные результаты

В данной работе оценки погрешности будут получены в предположении $f(x) \in W^4_\infty[x_0, x_3]$, т.е. функция $f(x)$ считается трижды непрерывно дифференцируемой и $f^{IV}(x) \in L_\infty[x_0, x_3]$, где символом $L_\infty[x_0, x_3]$ обозначен класс функций $\varphi(x)$ ограниченных в существенном [2], при этом

$$\|\varphi\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in[x_0,x_3]} |\varphi(x)|.$$

ТЕОРЕМА I. Если $f(x) \in W^4_\infty[x_0, x_3]$, то

$$\|L^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)\|_{C[x_i, x_{i+1}]} \le K_{r,i} H^{4-r} \|f^{IV}\|_\infty,$$

$$i=0,1,2; \quad r=0,1,2,3, \tag{6}$$

где $K_{r,0}$, $K_{r,1}$ даны в таблице и $K_{r,2}=K_{r,0}$.

Доказательство теоремы будет приведено ниже. Отметим некоторые особенности оценок (6). Во-первых, они получены при более слабых требованиях к $f(x)$, нежели оценки (3)-(5). Во-вторых, оценки (6) не содержат "хвостов", характерных для (4), и в то же время константы в (6) такие же, как в (3), (4). В-третьих, постоянные $K_{r,i}$ в (6) уменьшить нельзя. Чтобы убедиться в этом, очевидно, достаточно указать функцию $f(x)$ и узлы x_i такие, что (6) дает точное значение погрешности (или ее точную верхнюю грань).

Возьмем равномерно с шагом h расположенные узлы x_i ($h_0=h_1 = h_2=h$) и положим $f_0(x) = x^4/24$. Так как $f_0^{IV}(x) \equiv 1$ и $f_0^{(k)}(x) \equiv 0$ при $k > 4$, то из (2) получаем

$$R^{(r)}(x) = L^{(r)}(x) - f_0^{(r)}(x) = -\omega^{(r)}(x)/24, \quad r=0,1,2,3. \tag{7}$$

Нетрудно вычислить

$$\|R\|_{C[x_1,x_2]} = \frac{1}{24}\|\omega\|_{C[x_1,x_2]} = |\omega(x_1+h/2)|/24 = 9h^4/384,$$

$$\|R\|_{C[x_0,x_1]} = |\omega(x_0 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}h)|/24 = h^4/16,$$

$$\|R'\|_{C[x_0,x_1]} = |\omega'(x_0)|/24 = h^3/4,$$

$$\|R'\|_{C[x_1,x_2]} = |\omega'(x_1)|/24 = h^3/12,$$

$$\|R''\|_{C[x_0,x_1]} = |\omega''(x_0)|/24 = 11h^2/12,$$

$$\|R''\|_{C[x_1,x_2]} = |\omega''(x_1+h/2)|/24 = 5h^2/24 ;$$

$$\|R'''\|_{C[x_0,x_1]} = |\omega'''(x_0)|/24 = 3h/2.$$

Учитывая, что $\|f_0^{IV}\|_\infty = 1$, из (6) при $i = 0, I$; $r = 0, I, 2$ и $i = 0$, $r = 3$ получаем такие же результаты. Для случая $i = I$, $r = 3$ возьмем x_i так, чтобы выполнялись условия $h_0 = \alpha h$, $h_1 = h_2 = h$, где $\alpha > 0$ – достаточно малое число. Тогда $\|R'''\|_{C[x_1,x_2]} = |\omega'''(x_1)|/24 = (3-\alpha)h/4$. Из (6) имеем $\|R'''\|_{C[x_1,x_2]} \le 3h/4$, что является точной верхней гранью погрешности. Таким образом, все оценки (6) неулучшаемы. Более того, их нельзя улучшить даже при большей, чем в теореме I, гладкости функции $f(x)$, так как неулучшаемость показана на примере функции, которая является многочленом четвертой степени и, следовательно, бесконечно дифференцируема.

Если ограничиться случаем равномерного расположения узлов x_i, то оценки (6) можно улучшить только при $i = I$, $r = 3$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть узлы x_0, x_1, x_2, x_3 образуют равномерную сетку с шагом h. Если $f(x) \in W^4[x_0, x_3]$, то

$$\|L'''(x) - f'''(x)\|_{C[x_1,x_2]} \le \frac{7}{12} h \|f^{IV}\|_\infty . \qquad (8)$$

Если $f(x) \in C^4[x_0, x_3]$, то

$$\|L'''(x) - f'''(x)\|_{C[x_1,x_2]} \le \frac{h}{2} \|f^{IV}\|_C + \frac{h}{8} \omega(f^{IV}), \qquad (9)$$

где

$$\omega(f^{IV}) = \max_i \max_{x',x'' \in [x_i, x_{i+1}]} |f^{IV}(x') - f^{IV}(x'')|.$$

Вывод оценок (8), (9) будет приведен ниже. Покажем, что постоянные 7/I2 и I/2 в этих оценках уменьшить нельзя. Действительно, для функции $f_0(x) = x^4/24$ из (7) имеем $f'''(x_1) - L'''(x_1) = h/2$, что доказывает неулучшаемость постоянной I/2 в (9), так как $\|f_0^{IV}\|_C = 1$ и $\omega(f_0^{IV}) = 0$. Положим $f_1(x) = (x-x_1)^4 \operatorname{sign}(x-x_1)/24$. Очевидно $f_1(x) \in W^4_\infty[x_0, x_3]$, $\|f_1^{IV}\|_\infty = 1$, $f_1'''(x_1) = 0$. Учитывая, что $L'''(x_1) = 6f_1[x_0, x_1, x_2, x_3]$, имеем $L'''(x_1) - f_1'''(x_1) = 7h/12$. Что и требовалось показать,

О погрешности приближения многочленами Лагранжа произвольной степени

Пусть $L_N(x)$ - полином Лагранжа, интерполирующий значения $f_i=f(x_i)$ функции $f(x)$, известные в узлах сетки Δ: $x_0<x_1<\ldots$ $\ldots<x_N$. Если $f(x)$ - достаточно гладкая функция, то верно [I, с.156] равенство

$$f^{(r)}(x)-L_N^{(r)}(x)=\sum_{j=0}^{r}\frac{r!}{(r-j)!(N+1-j)!}f^{(N+1+j)}(\xi_j)\omega_N^{(r-j)}(x),$$

где $\xi_j\in[x_0,x_N]$, $\omega_N(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_N)$.

Полученные в настоящей работе результаты, а также ряд других соображений позволяют нам высказать предположение, что при оценке погрешности в этом соотношении можно ограничиться оценкой главного члена.

ГИПОТЕЗА. Если $f(x)\in W_\infty^{N+1}[x_0,x_N]$, то

$$\|f^{(r)}(x)-L_N^{(r)}(x)\|_{C[x_i,x_{i+1}]}\le K_{r,i}^{(N)}H^{N+1-r}\|f^{(N+1)}\|_\infty,$$

$$r=0,1,\ldots,N;\quad i=0,1,\ldots,N-1,$$

где $\quad H=\max\limits_i(x_{i+1}-x_i)$,

$$K_{r,i}^{(N)}=\frac{r!H^{-(N+1-r)}}{(r-j)!(N+1-j)!}\sup_{\{\Delta\}}\|\omega_N^{(r)}\|_{C[x_i,x_{i+1}]},$$

$\{\Delta\}$ - множество сеток таких, что $\max\limits_i(x_{i+1}-x_i)\le H$. Постоянные $K_{r,i}^{(N)}$ уменьшить нельзя.

В данной работе гипотеза доказана при $N=3$. Она верна и при $N=I$ (см. например, [3, с.44]), а также, как сообщил нам Б.И.Квасов, при $N=2$. При несколько более жестких требованиях к $f(x)$, а именно в предположении $f(x)\in C^{N+1}[x_0,x_N]$, утверждение верно для $r=0$ при любом N. Попытка доказательства гипотезы при $N\ge4$ с помощью техники, использованной в случае $N=3$, наталкивается на серьезные технические трудности. Лишь для равномерной сетки можно надеяться на успех, если применить ЭВМ [3].

Помимо самостоятельного интереса доказательство гипотезы важно с точки зрения распространения на сплайны высоких степеней граничных условий, аналогичных граничным условиям типа IУ для кубических сплайнов [7].

Доказательство теоремы I

Из соображений симметрии ясно, что оценка для отрезка $[x_2, x_3]$ будет совпадать с оценкой для $[x_0, x_1]$. Поэтому достаточно рассмотреть случаи $x \in [x_0, x_1]$ и $x \in [x_1, x_2]$.

Пусть $x \in [x_0, x_1]$. Вначале получим интегральное представление величины $R(x) = L(x) - f(x)$. В соответствии с общей техникой получения оценок погрешности [3], для этого нужно заменить значения f_i в $L(x)$ их разложениями по формуле Тейлора [2] с остаточным членом в интегральном виде

$$f_i = f(x) + (x_i - x)f'(x) + \frac{1}{2}(x_i - x)^2 f''(x) + \frac{1}{6}(x_i - x)^3 f'''(x) + \frac{1}{6}\int_x^{x_i} (x_i - v)^3 f^{IV}(v)dv \tag{10}$$

и затем сгруппировать слагаемые в полученном выражении $R(x)$ так, чтобы интегралы брались по непересекающимся отрезкам $[x_0, x]$, $[x, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$. Однако в рассматриваемом случае описанный способ требует громоздких вычислений. Мы воспользуемся другим, более удобным с точки зрения объема выкладок способом.

Записывая f_0 по формуле (10) с $x = x_1$, имеем

$$f[x_0, x_1] = f_1' - \frac{1}{2}h_0 f_1'' + \frac{1}{6}h_0^2 f_1''' - \frac{1}{6h_0}\int_{x_1}^{x_0} (x_0 - v)^3 f^{IV}(v)dv.$$

Сделав в интеграле замену переменной $v - x_0 = \tau h_0$, получаем

$$f[x_0, x_1] = f_1' - \frac{1}{2}h_0 f_1'' + \frac{h_0^2}{6}f_1''' - \frac{h_0^3}{6}\int_0^1 \tau^3 f^{IV}(x_0 + \tau h_0)d\tau . \tag{11}$$

Таким же образом, используя разложения для f_0 и f_2 в точке x_1, находим

$$f[x_0, x_1, x_2] = f_1''/2 + (h_1 - h_0)f_1'''/6 +$$

$$+\frac{\lambda_1 h_1^2}{6}\int_0^1(1-\tau)^3 f^{IV}(x_1+\tau h_1)d\tau+\frac{\mu_1 h_0^2}{6}\int_0^1 \tau^3 f^{IV}(x_0+\tau h_0)d\tau, \quad (12)$$

где $\lambda_i = h_i/(h_{i-1}+h_i)$, $\mu_i = 1-\lambda_i$.

Далее,

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{f_1'''}{6}+\frac{1}{6(h_0+h_1+h_2)}\Big\{-\mu_1 h_0^2\int_0^1\tau^3 f^{IV}(x_0+\tau h_0)d\tau+$$

$$+\lambda_2 h_2^2\int_0^1(1-\tau)^3 f^{IV}(x_2+\tau h_2)d\tau+h_1\int_0^1\psi(\tau)f^{IV}(x_1+\tau h_1)d\tau\Big\}, \quad (13)$$

где $\psi(\tau)=h_2-h_1+3h_1(1-\tau)-\lambda_1 h_1(1-\tau)^3+\mu_2 h_1\tau^3$.

Подставляя (II)-(I3) в (I) и обозначая $(x-x_0)/h_0 = t$, получаем

$$R(x)=r-\frac{th_0^4}{6}\int_0^1\tau^3\Big\{1+(1-t)\mu_1\Big[1+\frac{h_0(1-t)+h_1}{h_0+h_1+h_2}\Big]\Big\}f^{IV}(x_0+\tau h_0)d\tau+$$

$$+\int_0^1\varphi_1(t,\tau)f^{IV}(x_1+\tau h_1)d\tau+\int_0^1\varphi_2(t,\tau)f^{IV}(x_2+\tau h_2)d\tau,$$

где $r=f_0+th_0f_1'+\frac{1}{2}th_0^2(t-2)f_1''+\frac{1}{6}th_0^3(3-3t+t^2)f_1'''-f(x)$,

$$\varphi_1(t,\tau)=\frac{1}{6}h_0^2h_1t(1-t)\Big[\frac{h_0(1-t)+h_1}{h_0+h_1+h_2}\psi(\tau)-\lambda_1h_1(1-\tau)^3\Big],$$

$$\varphi_2(t,\tau)=\frac{\lambda_2h_0^2h_2^2t(1-t)[(1-t)h_0+h_1]}{6(h_0+h_1+h_2)}(1-\tau)^3.$$

Заменяя в выражении для r величины f_0 и $f(x)$ их разложениями в точке x_1 по формуле Тейлора, находим

$$r=\frac{1}{6}\int_{x_1}^{x_0}(x_0-v)^3f^{IV}(v)dv-\frac{1}{6}\int_{x_1}^{x}(x-v)^3f^{IV}(v)dv.$$

После замены переменной $v-x_0 = \tau h_0$, имеем

$$r = \frac{h_0^4}{6}\left\{\int_0^1 \tau^3 f^{IV}(x_0+\tau h_0)d\tau + \int_t^1 (t-\tau)^3 f^{IV}(x_0+\tau h_0)d\tau\right\} .$$

В итоге

$$R(x) = \int_0^t \varphi(t,\tau)f^{IV}(x_0+\tau h_0)d\tau + \int_t^1 \varphi_0(t,\tau)f^{IV}(x_0+\tau h_0)d\tau +$$

$$+ \int_0^1 \varphi_1(t,\tau)f^{IV}(x_1+\tau h_1)d\tau + \int_0^1 \varphi_2(t,\tau)f^{IV}(x_2+\tau h_2)d\tau. \qquad (14)$$

Здесь

$$\varphi(t,\tau) = (1-t)h_0^4\tau^3 A/6, \quad \varphi_0(t,\tau) = h_0^4[(t-\tau)^3+(1-t)\tau^3 A]/6,$$

$$A = 1-t\mu_1\left[1 + \frac{(1-t)h_0+h_1}{h_0+h_1+h_2}\right].$$

Из (14) получаем

$$|R(x)| \le \|f^{IV}\|_\infty \left\{\int_0^t|\varphi(t,\tau)|d\tau + \int_t^1|\varphi_0(t,\tau)|d\tau +\right.$$

$$\left.+ \int_0^1|\varphi_1(t,\tau)|d\tau + \int_0^1|\varphi_2(t,\tau)|d\tau\right\}. \qquad (15)$$

Очевидно, $\varphi_2(t,\tau) \ge 0$. Из тождества

$$1 - t\mu_1\left[1 + \frac{h_0(1-t)+h_1}{h_0+h_1+h_2}\right] = \lambda_1\left(1 - \frac{th_0}{h_0+h_1+h_2}\right)[(1-t)\mu_1+\lambda_1]$$

следует $A \ge 0$, и поэтому $\varphi(t,\tau) \ge 0$.

Покажем, что $\varphi_0(t,\tau) \ge 0$ при $\tau \in [t,1]$. Действительно, экстремальными точками функции $\eta(t) = (t-\tau)^3+(1-t)\tau^3 A$ будут точки $\tau_1 = t/[1+\sqrt{A(1-t)}]$, $\tau_2 = t/[1-\sqrt{A(1-t)}]$, из которых $\tau_1 \le t$. Легко проверить, что $\eta''(\tau_2) \le 0$. Поэтому в точке τ_2 может быть только максимум функции $\eta(\tau)$. Таким образом,

$$\min_{\tau\in[t,1]} \eta(t) = \min\{\eta(t),\eta(1)\}.$$

Так как $\eta(t) = (1-t)t^3A \ge 0$ и

$$\eta(1) = t(1-t)\left\{\lambda_1\left(1 - \frac{h_0}{h_0+h_1+h_2}\right) + (1-t)\left(1 - \frac{\mu_1 h_0}{h_0+h_1+h_2}\right)\right\} \ge 0,$$

то $\eta(\tau) \ge 0$ при $\tau \in [t,1]$ и, следовательно, $\varphi_0(t,\tau) \ge 0$.

Рассмотрим теперь функцию $\varphi_1(t,\tau)$ при $t \in [0,1]$, $\tau \in [0,1]$. Прежде всего заметим, что

$$\psi(\tau) = h_2\lambda_2 + h_1(1-\tau)[3-\lambda_1(1-\tau)^2 - \mu_2(1+\tau+\tau^2)] >$$

$$> h_1(1-\tau)[3-(1-\tau)^2-(1+\tau+\tau^2)]=h_1(1-\tau)(1+\tau-2\tau^2) \ge 0. \quad (16)$$

Поэтому

$$\frac{(1-t)h_0+h_1}{h_0+h_1+h_2}\psi(\tau) - h_1\lambda_1(1-\tau)^3 \ge \frac{\psi(\tau)h_1}{h_0+h_1+h_2} - h_1\lambda_1(1-\tau)^3 \ge$$

$$\ge \frac{h_1^2}{h_0+h_1}\{-1+3(1-\tau)-\lambda_1(1-\tau)^3+\tau^3\} = h_1\lambda_1(1-\tau)^3 =$$

$$= \lambda_1 h_1(1-\tau)[3-(1+\lambda_1)(1-\tau)^2-(1+\tau+\tau^2)]$$

$$> \lambda_1 h_1(1-\tau)[3-2(1-\tau)^2-(1+\tau+\tau^2)] = 3\lambda_1 h_1\tau(1-\tau)^2 \ge 0 .$$

Следовательно, в формуле для $\varphi_1(t,\tau)$ множитель в квадратных скобках положителен. В итоге $\varphi_1(t,\tau) \ge 0$.

Таким образом в (I5) в подынтегральных выражениях можно опустить знак модуля. Вычисляя интегралы и выполняя тождественные преобразования, получаем

$$|R(x)| \le \frac{1}{24}t(1-t)h_0^2[h_0(1-t) + h_1][h_0(1-t) + h_1+h_2]\|f^{IV}\|_\infty.$$

Очевидно, $h_0(1-t)+h_1 \le (2-t)H$ и $h_0(1-t)+h_1+h_2 \le (3-t)H$, где $H = \max\{h_0,h_1,h_2\}$. Поэтому $|R(x)| \le \frac{H^4}{24}\|f^{IV}\|_\infty t(1-t)(2-t)(3-t)$. Имеем $t(1-t)(2-t)(3-t) = u(2-u)$, где $u = 3t-t^2$, причем $u \in [0,2]$. Максимальное значение выражения $u(2-u)$ достигается при $u=1$ и равно I. Окончательно $|R(x)| \le \|f^{IV}\|_\infty H^4/24$, и тем самым теорема I доказана при $i=0$, $r=0$.

Дифференцируя (I4) по x и учитывая, что $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{h_0}$, $\varphi(t,t) = \varphi_0(t,t)$,

$$\frac{\partial\varphi(t,t)}{\partial t} = \frac{\partial\varphi_0(t,t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2\varphi(t,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\varphi_0(t,t)}{\partial t^2},$$

получаем

$$R^{(r)}(x) = h_0^{-r}\left\{\int_0^t \frac{\partial^r\varphi}{\partial t^r} f^{IV}(x_0+\tau h_0)d\tau + \int_t^1 \frac{\partial^r\varphi_0}{\partial t^r} f^{IV}(x_0+\tau h_0)d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 \frac{\partial^r\varphi_1}{\partial t^r} f^{IV}(x_1+\tau h_1)d\tau + \int_0^1 \frac{\partial^r\varphi_2}{\partial t^r} f^{IV}(x_2+\tau h_2)d\tau\right\}, \qquad (17)$$

$$r = 1,2,3.$$

Отсюда

$$|R^{(r)}(x)| \le h_0^{-r}\|f^{IV}\|_\infty \left\{\int_0^t \left|\frac{\partial^r\varphi}{\partial t^r}\right|d\tau + \int_t^1 \left|\frac{\partial^r\varphi_0}{\partial t^r}\right|d\tau + \int_0^1 \left|\frac{\partial^r\varphi_1}{\partial t^r}\right|d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 \left|\frac{\partial^r\varphi_2}{\partial t^r}\right|d\tau\right\}, \qquad (18)$$

$$r = 1,2,3.$$

Найдем оценку для $|R'(x)|$. К сожалению, функции $\partial\varphi_i/\partial t$ не являются знакопостоянными, что практически исключает аналитическое вычисление интегралов в (I8). Мы оценим $|R'(x)|$ другим методом, который использовался в [3] при исследовании погрешности приближения кубическими сплайнами класса C^2.

Обозначим через $S_3(x)$ кубический эрмитов сплайн, удовлетворяющий условиям $S_3(x_j) = f_j$, $S_3'(x_j) = f_j'$, $j = 0,1,2,3$.

Согласно [3, с.59], при $x \in [x_i, x_{i+1}]$ имеем

$$S_3(x) = (1-t)^2(1+2t)f_i + t^2(3-2t)f_{i+1} +$$

$$+\, h_i t(1-t)^2 f_i' - h_i(1-t)t^2 f_{i+1}', \quad t = (x - x_i)/h_i. \tag{19}$$

Очевидно, многочлен Лагранжа $L(x)$ при $x \in [x_i, x_{i+1}]$ может быть записан в виде $L(x) = (1-t)^2(1+2t)f_i + t^2(3-2t)f_{i+1} + h_i t(1-t)^2 L'(x_i) - h_i t^2(1-t)L'(x_{i+1})$. Следовательно,

$$|L'(x) - S_3'(x)| = |(1-t)(1-3t)[L'(x_i) - f_i'] - t(2-3t)[L'(x_{i+1}) - f_{i+1}']| \le$$

$$\le (1-t)|1-3t||R'(x_i)| + t|2-3t||R'(x_{i+1})|. \tag{20}$$

Так как

$$|R'(x)| \le |L'(x) - S_3'(x)| + |S_3'(x) - f'(x)| \tag{21}$$

и оценка для $|S_3'(x)-f'(x)|$ известна [3, с.67], то для того, чтобы оценить $|R'(x)|$, достаточно иметь оценки $|R'(x_i)|$ и $|R'(x_{i+1})|$. С этой целью используем неравенство (18). При $x=x_0$ $(t=0)$ находим

$$|R'(x_0)| \le h_0^{-1} \|f^{IV}\|_\infty \sum_{i=0}^{2} \int_0^1 \left|\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}\right)_{t=0}\right| d\tau, \tag{22}$$

где функции

$$\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial t}\right)_{t=0} = \frac{h_0^4}{6}\left\{3\tau^2 - \tau^3\left[1 + \mu_1\left(1 + \frac{h_0+h_1}{h_0+h_1+h_2}\right)\right]\right\},$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\right)_{t=0} = \frac{h_0^2 h_1}{6}\left[\frac{\phi(\tau)(h_0+h_1)}{h_0+h_1+h_2} - \lambda_1 h_1 (1-\tau)^3\right],$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}\right)_{t=0} = \frac{\lambda_2 h_0^2 h_2^2 (h_0+h_1)(1-\tau)^3}{6(h_0+h_1+h_2)},$$

неотрицательны при $\tau \in [0,1]$. Это позволяет легко вычислить интегралы в (22). В результате

$$|R'(x_0)| \le \frac{1}{24} h_0(h_0+h_1)(h_0+h_1+h_2)\|f^{IV}\|_\infty \le \frac{H^3}{4}\|f^{IV}\|_\infty. \tag{23}$$

При $x = x_1$ $(t=1)$ из (18) получаем

$$|R'(x_1)| \le h_0^{-1}\|f^{IV}\|_\infty\left\{\int_0^1\left|\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=1}\right|d\tau + \sum_{i=1}^{2}\int_0^1\left|\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}\right)_{t=1}\right|d\tau\right\},$$

где функции

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=1} = -\frac{h_0^4\tau^3}{6}\left(1-\mu_1-\frac{\mu_1 h_1}{h_0+h_1+h_2}\right),$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right)_{t=1} = -\frac{h_0^2h_1^2}{6}\left[\frac{\psi(\tau)}{h_0+h_1+h_2}-\lambda_1(1-\tau)^3\right],$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\right)_{t=1} = -\frac{\lambda_2 h_0^2 h_1 h_2^2(1-\tau)^3}{6(h_0+h_1+h_2)}$$

неположительны при $\tau\in[0,1]$. Вычисляя интегралы, имеем $|R'(x_1)| \le \le\frac{1}{24}h_0h_1(h_1+h_2)\|f^{IV}\|_\infty$, что приводит к оценке

$$|R'(x_1)| \le \frac{1}{12}H^3\|f^{IV}\|_\infty. \tag{24}$$

Возвращаясь теперь к (21) и учитывая (20), (23), (24), а также оценки для эрмитовой интерполяции [3, с.67], получаем:
при $x\in[x_0, x_0+h_0/3]$, $t\in[0,1/3]$,

$$|R'(x)| \le \left\{\frac{h_0^3}{12}t(1-t)(1-2t)+\frac{H^3}{12}[3(1-t)(1-3t)+t(2-3t)]\right\}\|f^{IV}\|_\infty \le$$

$$\le\frac{H^3}{12}[3-4t-5t(1-t)-2t^2(1-t)]\|f^{IV}\|_\infty \le \frac{H^3}{4}\|f^{IV}\|_\infty, \tag{25}$$

при $x\in[x_0+2h_0/3, x_1]$, $t\in[2/3,1]$,

$$|R'(x)| \le \left\{\frac{h_0^3}{12}t(1-t)(2t-1)+\frac{H^3}{12}[3(1-t)(3t-1)+\right.$$

$$\left.+t(3t-2)]\right\}\|f^{IV}\|_\infty \le \frac{H^3}{12}(-3+9t-3t^2-2t^3)\|f^{IV}\|_\infty \le \frac{H^3}{4}\|f^{IV}\|_\infty. \tag{26}$$

Далее, из (21) вытекает неравенство

$$|R'(x)| \le \|S_3'(x)-f'(x)\|_C + |L'(x)-S_3'(x)|. \tag{27}$$

Так как $\|S_3'(x)-f'(x)\|_C \le \sqrt{3}\,H^3\|f^{IV}\|_\infty/216$ (см. [3, с.60]), то, учитывая (20), (23) и (24), отсюда при $x\in[x_0+h_0/3,\ x_0+2h_0/3]$, $t\in\in[1/3,2/3]$ имеем

$$|R'(x)| \le H^3\|f^{IV}\|_\infty \{\sqrt{3}/216 + (-3+14t-12t^2)/12\} \le$$

$$\le H^3\|f^{IV}\|_\infty\{\sqrt{3}/216 + 13/144\} < H^3\|f^{IV}\|_\infty/4. \qquad (28)$$

Объединяя (25), (26), (28), приходим к утверждению теоремы I для $i=0$, $r=1$.

Теперь получим оценку для $R''(x)$. Так же, как и в предыдущем случае, ее нельзя вывести путем непосредственного вычисления интегралов в (I8). Снова применим "обходной" маневр. Пусть $S_1(x)$ – сплайн первой степени, интерполирующий значения f''_i в узлах x_i: $S_1(x) = (1-t)f''_i + tf''_{i+1}$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$.

Очевидно, $L''(x) = (1-t)L''(x_i) + tL''(x_{i+1})$, и поэтому

$$|R''(x)| \le |S_1(x) - f''(x)| + (1-t)|R''(x_i)| +$$

$$+ t|R''(x_{i+1})|, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]. \qquad (29)$$

Так как

$$|S_1(x) - f''(x)| \le \frac{1}{2}t(1-t)h_i^2\|f^{IV}\|_\infty, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \qquad (30)$$

(см. [3,с.46]), то для получения оценки $|R''(x)|$ при $x \in [x_0, x_1]$ достаточно оценить $|R''(x_0)|$ и $|R''(x_1)|$.

Из (I8) имеем

$$|R''(x_0)| \le h_0^{-2}\|f^{IV}\|_\infty \sum_{i=0}^{3} \int_0^1 \left|\left(\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial t^2}\right)_{t=0}\right| d\tau, \qquad (31)$$

где функции

$$\left(\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial t^2}\right)_{t=0} = \frac{h_0^4}{3}\left(-3\tau + \mu_1\tau^3\frac{3h_0 + 2h_1 + h_2}{h_0 + h_1 + h_2}\right),$$

$$\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}\right)_{t=0} = \frac{h_0^2h_1}{3}\left[-\frac{(2h_0+h_1)\psi(\tau)}{h_0 + h_1 + h_2} + \lambda_1h_1(1-\tau)^3\right],$$

$$\left(\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2}\right)_{t=0} = -\frac{\lambda_2h_0^2h_2^2(1-\tau)^3(2h_0 + h_1)}{h_0+h_1+h_2}$$

неположительны при $\tau \in [0,1]$. Из (3I) легко получаем

$$|R''(x_0)| \le \frac{1}{12}(3h_0^2+h_1^2+4h_0h_1+2h_0h_2+h_1h_2)\|f^{IV}\|_\infty \le \frac{11H^2}{12}\|f^{IV}\|_\infty. \quad (32)$$

Далее, из (I8) при $x=x_1$ находим

$$|R''(x_1)| \le h_0^{-2}\|f^{IV}\|_\infty\left\{\int_0^1\left|\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)_{t=1}\right|d\tau + \sum_{i=1}^{2}\int_0^1\left|\left(\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial t^2}\right)_{t=1}\right|d\tau\right\}, \quad (33)$$

где

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)_{t=1} = \frac{\mu_1h_0^4(2h_1+h_2)\tau^3}{3(h_0+h_1+h_2)},$$

$$\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}\right)_{t=1} = \frac{h_0^2h_1}{3}\left[\frac{(h_0-h_1)\phi(\tau)}{h_0+h_1+h_2} + \lambda_1h_1(1-\tau)^3\right],$$

$$\left(\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2}\right)_{t=1} = \frac{\lambda_2h_0^2h_2^2(h_0-h_1)(1-\tau)^3}{3(h_0+h_1+h_2)}.$$

Первая из этих функций всегда неотрицательна, чего нельзя сказать о двух других. Однако при $h_0 \ge h_1$ они также неотрицательны, и в этом случае из (33) имеем $|R''(x_1)| \le \frac{1}{12}\{(h_0-h_1)(h_1+h_2)+h_0h_1\}\|f^{IV}\|_\infty = \frac{h_0}{12}\{(1-\alpha)(\alpha h_0+h_2)+\alpha h_0\}\|f^{IV}\|_\infty \le \frac{H^2}{12}(1+\alpha-\alpha^2)\|f^{IV}\|_\infty$,

где $\alpha = h_1/h_0 \le 1$. Так как $\alpha-\alpha^2 \le 1/4$, то

$$|R''(x_1)| \le \frac{5}{48}H^2\|f^{IV}\|_\infty, \quad \text{если} \quad h_0 \ge h_1. \quad (34)$$

При $h_0 < h_1$ из (33) находим

$$|R''(x_1)| \le \frac{1}{12(h_0+h_1+h_2)}\left\{\mu_1h_0^2(2h_1+h_2) + \lambda_2h_2^2(h_1-h_0) + 4h_1\int_0^1|\nu(\tau)|d\tau\right\}\|f^{IV}\|_\infty, \quad (35)$$

где $\nu(\tau) = (h_0-h_1)\phi(\tau) + h_1\lambda_1(1-\tau)^3(h_0+h_1+h_2) = (h_0-h_1)[2h_1+h_2-3h_1\tau+\mu_2h_1\tau^3]+\lambda_1h_1(2h_1+h_2)(1-\tau)^3$. Так как $\nu(0)=h_0\mu_1(2h_1+h_2) > 0$ и $\nu(1)=h_2\lambda_2(h_0-h_1) < 0$, то уравнение $\nu(\tau)=0$ имеет корень $\tau^*(h_0,$

$h_1, h_2) \in [0,1]$. Воспользовавшись теоремой Бюдана-Фурье [4], легко проверить, что на отрезке $[0,1]$ этот корень единствен. Далее, учитывая очевидное соотношение

$$\int_0^1 |\nu(\tau)|\,d\tau = 2\int_0^{\tau^*} \nu(\tau)\,d\tau - \int_0^1 \nu(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}(1-\tau^*)\,\nu(\tau^*)\,,$$

из (35) получаем

$$|R''(x_1)| \le \frac{1}{12}\,\|f^{IV}\|_\infty \Big\{ \Phi(h_0,h_1,h_2) -$$

$$- 2\tau^*[h_1(3-3\tau^*+(\tau^*)^2) + h_2(3-\mu_2(\tau^*)^2)]\,\frac{h_1(h_1-h_0)}{h_0+h_1+h_2} \Big\} \le$$

$$\le \|f^{IV}\|_\infty\,\Phi(h_0,h_1,h_2)/12\,,$$

где

$$\Phi(h_0,h_1,h_2) = \frac{(h_1-h_0)(h_1+h_2)^2 + h_0^2(2h_1+h_2)}{h_0+h_1+h_2}\,.$$

Нетрудно проверить, что

$$\frac{\partial^2 \Phi(h_0,h_1,h_2)}{\partial h_0^2} > 0 \quad \text{при} \quad 0 \le h_0 \le h_1.$$

Поэтому максимальное значение функции $\Phi(h_0,h_1,h_2)$ достигается либо при $h_0 = 0$, либо при $h_0 = h_1$. Имеем $\Phi(0,h_1,h_2) = h_1(h_1+h_2) > \Phi(h_1,h_1,h_2) = h_1^2$. Следовательно, при $h_0 < h_1$ справедлива оценка

$$|R''(x_1)| \le \frac{1}{12}\,h_1(h_1+h_2)\,\|f^{IV}\|_\infty \le \frac{1}{6}\,H^2\|f^{IV}\|_\infty\,, \tag{36}$$

которая, как показывает сравнение с (34), верна и при $h_0 \ge h_1$.

Теперь, используя оценки (30), (32) и (36), из (29) при $x \in [x_0,x_1]$ находим $|R''(x)| \le \frac{1}{12}H^2\|f^{IV}\|_\infty(11-3t-6t^2) \le \frac{11}{12}H^2\|f^{IV}\|_\infty$. Отсюда вытекает утверждение теоремы при $i = 0$, $r = 2$.

Сравнительно несложен случай $i = 0$, $r = 3$. Действительно, функции

$$\frac{\partial^3\varphi}{\partial t^3} = -\frac{\mu_1 h_0^5 \tau^3}{h_0+h_1+h_2}\,, \qquad \frac{\partial^3\varphi_0}{\partial t^3} = h_0^4\Big(1 - \frac{\mu_1 h_0 \tau^3}{h_0+h_1+h_2}\Big)\,,$$

$$\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial t^3}=\frac{h_0^3h_1\psi(\tau)}{h_0+h_1+h_2}, \qquad \frac{\partial^3\varphi_2}{\partial t^3}=\frac{\lambda_2h_0^3h_2^2(1-\tau)^3}{h_0+h_1+h_2}$$

знакопостоянны, и из (I8) вытекает $|R'''(x)| \le \| f^{IV}\|_\infty \{h_0(1-t) + \frac{1}{4}[-\mu_1h_0^2(1-4t+6t^2-4t^3) - \lambda_1h_1^2 + 3h_1h_2+3h_1^2+h_2^2]/(h_0+h_1+h_2)\}$; Максимум правой части достигается при $t=0$. Поэтому $|R'''(x)| \le \|f^{IV}\|_\infty[h_0 + (2h_1+h_2-h_0)/4] \le \frac{3}{2}H\|f^{IV}\|_\infty$, что влечет (6) при $i=0$, $r=3$.

Пусть теперь $x\in[x_1,x_2]$. Процесс получения интегрального представления для $R(x)$ здесь вполне аналогичен рассмотренному выше случаю $x\in[x_0,x_1]$. Различие состоит лишь в том, что после подстановки (II)-(I3) в (I) следует ввести обозначение $(x-x_1)/h_1=t$. В конечном итоге

$$R^{(r)}(x) = h_1^{-r}\left\{\int_0^1 \frac{\partial^r\tilde\varphi_0}{\partial t^r}f^{IV}(x_0+\tau h_0)d\tau + \int_0^t \frac{\partial^r\tilde\varphi_1}{\partial t^r}f^{IV}(x_1+\tau h_1)d\tau + \int_t^1 \frac{\partial^r\tilde\varphi_2}{\partial t^r}f^{IV}(x_1+\tau h_1)d\tau + \int_0^1 \frac{\partial^r\tilde\varphi_3}{\partial t^r}f^{IV}(x_2+\tau h_2)d\tau\right\}, \tag{37}$$

$$r=0,1,2,3,$$

где

$$\tilde\varphi_0(t,\tau) = -\mu_1h_0^2h_1^2\tau^3B(t), \quad \tilde\varphi_3(t,\tau) = -\lambda_2h_1^2h_2^2(1-\tau)^3C(t),$$

$$B(t)=\frac{t(1-t)[(1-t)h_1+h_2]}{6(h_0+h_1+h_2)}, \quad C(t)=\frac{t(1-t)[h_0+th_1]}{6(h_0+h_1+h_2)},$$

$$\tilde\varphi_1(t,\tau) = h_1^4\{\tau^3(1-t)(1-t\mu_2)/6 + B(t)[\mu_2\tau^3-\lambda_1(1-\tau)^3-3\tau+1-h_0/h_1]\},$$

$$\tilde\varphi_2(t,\tau) = h_1^4\{(1-\tau)^3t[1-(1-t)\lambda_1]/6 + C(t)[-\mu_2\tau^3+\lambda_1(1-\tau)^3-3(1-\tau)+1-h_2/h_1]\}.$$

Функции $\tilde\varphi_0(t,\tau)$, $\tilde\varphi_3(t,\tau)$ неположительны при $t,\tau\in[0,1]$. Покажем, что для каждого $t \in [0,1]$ функция $\tilde{\varphi}_1(t,\tau)$ неположительна при $\tau \in [0,t]$, а $\tilde{\varphi}_2(t,\tau)$ при $\tau \in [t,1]$. Из тождества

$$\tau \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_1}{\partial \tau^2} - 2 \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial \tau} = 6h_1^4 B(t)[1-(1-\tau)\lambda_1]$$

заключаем, что при всех τ, при которых $\partial\tilde{\varphi}_1/\partial\tau = 0$, имеет место неравенство $\partial^2\tilde{\varphi}_1/\partial\tau^2 \ge 0$. Поэтому функция $\tilde{\varphi}_1(t,\tau)$ не может принимать максимального значения при $\tau \in (0,t)$. Оно достигается либо при $\tau = 0$, либо при $\tau = t$. Имеем

$$\tilde{\varphi}_1(t,0) = h_1^4 B(t)\left(\frac{h_0}{h_0+h_1} - \frac{h_0}{h_1}\right) \le 0,$$

$$\tilde{\varphi}_1(t,t) = t(1-t)h_1^4\{t^2(1-t\mu_2)+[(1-t)h_1+h_2]\alpha(h_0,h_1,h_2,t)\}/6,$$

где $\alpha(h_0,h_1,h_2,t) = [t^3\mu_2-\lambda_1(1-t)^3-3t+1-h_0/h_1]/(h_0+h_1+h_2)$. Так как

$$\frac{\partial\alpha}{\partial h_0} = (h_0+h_1+h_2)^{-2}\left\{-(1-t)^2(2+t) - \frac{\lambda_1 h_2(1-t)^3}{h_0+h_1} - \lambda_2\ 1+\frac{h_2}{h_1} - t^3\right\} < 0,$$

то $\alpha(h_0,h_1,h_2,t) \le \alpha(0,h_1,h_2,t) = (t^3\mu_2-3t^2+t^3)/(h_1+h_2)$ и $6\tilde{\varphi}_1(t,t) \le t^3(1-t)h_1^4(1-t\mu_2)(t+t\mu_2-2) \le 0$. Тем самым показано, что $\tilde{\varphi}_1(t,\tau) \le 0$, $\tau \in [0,t]$. Аналогично выводится неравенство $\tilde{\varphi}_2(t,\tau) \le$ ≤ 0, $\tau \in [t,1]$.

Используя неположительность функций $\tilde{\varphi}_i(t,\tau)$, из (37) получаем

$$|R(x)| \le \|f^{IV}\|_\infty\left\{-\int_0^1\tilde{\varphi}_0 d\tau - \int_0^t\tilde{\varphi}_1 d\tau - \int_t^1\tilde{\varphi}_2 d\tau - \int_0^1\tilde{\varphi}_3 d\tau\right\} =$$

$$= \|f^{IV}\|_\infty\, t(1-t)h_1^2(h_0+th_1)(h_2+(1-t)h_1)/24 \le$$

$$\le \|f^{IV}\|_\infty H^4 t(1-t)[2+t(1-t)]/24 \le \|f^{IV}\|_\infty H^4\, 9/384.$$

Отсюда следует (6) при $i = I$, $r = 0$.

Для вывода оценки $|R'(x)|$ воспользуемся неравенствами (2I) и (27). Выше для $|R'(x_1)|$ установлена оценка (24). Очевидно, она же справедлива для $|R'(x_2)|$. Поэтому при $x \in [x_1, x_1 + h_1/3]$, $t \in [0,1/3]$ имеем

$$|R'(x)| \le \|f^{IV}\|_\infty \{t(1-t)(1-2t)h_1^3 + H^3[(1-t)(1-3t) +$$

$$+ t(2-3t)]\}/12 \le \frac{H^3}{12}(1-2t)[1+t(1-t)]\|f^{IV}\|_\infty \le \frac{H^3}{12}\|f^{IV}\|_\infty, \quad (38)$$

Точно так же при $x \in [x_1+2/3h_1, x_2]$ получаем

$$|R'(x)| \le \frac{H^3}{12}(2t-1)[1+t(1-t)]\|f^{IV}\|_\infty \le \frac{H^3}{12}\|f^{IV}\|_\infty. \quad (39)$$

Наконец, при $x \in [x_1+h_1/3, x_1+2h_1/3]$, находим

$$|R'(x)| \le H^3\|f^{IV}\|_\infty \left\{\frac{\sqrt{3}}{216} + \frac{-1+6t-6t^2}{12}\right\} < \frac{H^3}{12}\|f^{IV}\|_\infty ,$$

что вместе с (38), (39) влечет (6) для $i=r=1$.

Функции

$$\frac{\partial^2\tilde{\varphi}_0}{\partial t^2} = -\mu_1 h_0^2 h_1^2 \tau^3 B''(t), \quad \frac{\partial^2\tilde{\varphi}_3}{\partial t^2} = -\lambda_2 h_1^2 h_2^2 (1-\tau)^3 C''(t),$$

$$\frac{\partial^2\tilde{\varphi}_1}{\partial t^2} = h_1^4\{\tau^3\mu_2/3 + B''(t)[\mu_2\tau^3-\lambda_1(1-\tau)^3-3\tau+1-h_0/h_1]\},$$

$$\frac{\partial^2\tilde{\varphi}_2}{\partial t^2} = h_1^4\{(1-\tau)^3\lambda_1/3+C''(t)[\lambda_1(1-\tau)^3-\mu_2\tau^3-2+3\tau-h_2/h_1]\}$$

линейны по переменной t, и, как легко проверить,

$$\frac{\partial^2\tilde{\varphi}_i(1/3,\tau)}{\partial t^2} \ge 0, \quad \frac{\partial^2\tilde{\varphi}_i(2/3,\tau)}{\partial t^2} \ge 0, \quad \tau \in [0,1], \quad i=0,1,2,3.$$

Следовательно, $\dfrac{\partial^2\tilde{\varphi}_i(t,\tau)}{\partial t^2} \ge 0$, если $\dfrac{1}{3} \le t \le \dfrac{2}{3}$, $\tau \in [0,1]$, $i=0,1,2,3$.

Учитывая этот факт, из (37) при $x \in [x_1+h_1/3, x_1+2h_1/3]$ имеем $|R''(x)| \le \|f^{IV}\|_\infty (1-3t+3t^2)h_1^2 + [h_0+(3t-1)h_1][(2-3t)h_1+h_2]\}/12 \le$ $\le H^2\|f^{IV}\|_\infty [1+6t(1-t)]/12$. Отсюда

$$|R''(x)| \le \frac{5}{24} H^2\|f^{IV}\|_\infty, \quad t \in [1/3, 2/3], \quad (40)$$

и, кроме того,

$$|R''(x_1+h_1/3)| \le \frac{7}{36}H^2\|f^{IV}\|_\infty, \quad |R''(x_1+2h_1/3)| \le \frac{7}{36}H^2\|f^{IV}\|_\infty. \quad (41)$$

Пусть $S(x)$ – многочлен первой степени, интерполирующий значения f''_1 и $f''(x_1+h_1/3)$: $S(x) = f''_1(1-3t)+3tf''(x_1+h_1/3)$, $t \in [0, 1/3]$. Тогда

$$|R''(x)| \le |S(x)-f''(x)| + |S(x) - L''(x)|, \quad x\in[x_1, x_1+h_1/3]. \quad (42)$$

Согласно [3,с.44], имеем

$$|S(x)-f''(x)| \le \frac{1}{8}\left(\frac{h_1}{3}\right)^2\|f^{IV}\|_\infty \le \frac{H^2}{72}\|f^{IV}\|_\infty. \quad (43)$$

Далее, принимая во внимание (36) и (4I), получаем

$$|S(x)-L''(x)| \le (1-3t)|R''(x_1)|+3t|R''(x_1+h_1/3)| \le$$

$$\le \max\{|R''(x_1)|, |R''(x_1+h_1/3)|\} \le \frac{7}{36}H^2\|f^{IV}\|_\infty. \quad (44)$$

Теперь из (42)-(44) следует $|R''(x)| \le \frac{5}{24}H^2\|f^{IV}\|_\infty$, $t \in [2/3, 1]$. Очевидно, такая же оценка справедлива при $t \in [2/3, 1]$. Объединяя эти результаты с (40), приходим к утверждению теоремы I при $i = I$, $r = 2$.

Нетрудно проверить, что все функции $\partial^3\tilde{\varphi}_i/\partial t^3$ знакопостоянные при $\tau \in [0,1]$. Оценивая интегралы в (37), получаем

$$|R'''(x)| \le \|f^{IV}\|_\infty \gamma(t, h_0, h_1, h_2)/4, \quad (45)$$

где $\gamma(t,h_0,h_1,h_2) = [\mu_1 h_0^2+\lambda_2 h_2^2 + \mu_2 h_1^2(1-2t^4) + \lambda_1 h_1^2[1-2(1-t)^4] + 2h_1^2(1-6t+6t^2) + 4th_0h_1 + 4(1-t)h_1h_2]/(h_0+h_1+h_2)$.

Из соотношения $\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial t^2} = 24h_1^2[1-\lambda_1(1-t)^2 - \mu_2 t^2]/(h_0+h_1+h_2) > 0$

следует, что функция $\gamma(t,\dots)$ принимает максимальное значение либо при $t = 0$, либо при $t = 1$. Имеем $\gamma(0,h_0,h_1,h_2) = 2h_1+h_2-h_0 + 2\mu_1 h_0^2/(h_0+h_1+h_2)$, $\gamma(1,h_0,h_1,h_2) = \gamma(0, h_2, h_1, h_0)$. Из последнего равенства видно, что достаточно оценить $\gamma(0,h_0,h_1,h_2)$. Покажем, что

$$\gamma(0,h_0,h_1,h_2) \le \gamma(0,h_0,h_1,H) \le \gamma(0,h_0,H,H) \le$$

$$\le \gamma(0,0,H,H) = 3H. \quad (46)$$

Действительно, $\gamma(0,h_0,h_1,H) - \gamma(0,h_0,h_1,h_2)=(H-h_2)[1-2\mu_1 h_0^2/(h_0 + h_1+h_2)/(h_0 + h_1+H)]\geq 0$, так как $2h_0/(h_0+h_1+H) < 1$. Аналогично

$$\gamma(0,h_0,H,H) - \gamma(0,h_0,h_1,H) =$$

$$= 2(H-h_1)\left\{1 - \frac{\mu_1 h_0^2}{(h_0+H)(h_0+2H)}\left[2 - \frac{h_1}{h_0+h_1+H}\right]\right\} \geq 0,$$

$$3H - \gamma(0,h_0,H,H) = h_0\left\{1 - \frac{2h_0^2}{(h_0+H)(h_0+2H)}\right\} \geq 0.$$

Таким образом, $\gamma(t,h_0,h_1,h_2) \leq 3H$, и из (45) следует (6) для $r = 3$, $i = 2$. Теорема I доказана полностью.

Доказательство теоремы 2

На равномерной сетке имеем $\gamma(0,h_0,h_1,h_2) = \gamma(1,h_0,h_1,h_2)=7/3$, и оценка (8) вытекает из (45).

Как было отмечено выше, функции $\partial^3\tilde{\varphi}_i / \partial t^3$ знакопостоянны. Поэтому при $f(x) \in C^4[x_0,x_3]$ в равенстве (37) можно применить теорему о среднем для интегралов. Имеем

$$R'''(x) = h^{-3}\left\{f^{IV}(\xi_0)\int_0^1 \frac{\partial^3\tilde{\varphi}_0}{\partial t^3}d\tau + f^{IV}(\xi_1)\int_0^t \frac{\partial^3\tilde{\varphi}_1}{\partial t^3}d\tau + \right.$$

$$\left. + f^{IV}(\tilde{\xi}_1)\int_t^1 \frac{\partial^3\tilde{\varphi}_2}{\partial t^3}d\tau + f^{IV}(\xi_2)\int_0^1 \frac{\partial^3\tilde{\varphi}_3}{\partial t^3}d\tau\right\} =$$

$$= h\{-f^{IV}(\xi_0) + [-1+t^4+(1-t)^4-12t^2]f^{IV}(\xi_1) +$$

$$+[1-t^4-(1-t)^4+12(1-t)^2]f^{IV}(\tilde{\xi}_1) + f^{IV}(\xi_2)\}/24,$$

где $x_0 \leq \xi_0 \leq x_1$, $x_1 \leq \xi_1,\tilde{\xi}_1 \leq x_2$, $x_2 \leq \xi_3 \leq x_3$. Пусть $t \leq 1/2$. Преобразуя $R'''(x)$ к виду

$$R'''(x) = h\{12(1-2t)f^{IV}(\tilde{\xi}_1) + [f^{IV}(\xi_2) - f^{IV}(\xi_0)] +$$

$$+ [1-t^4-(1-t)^4+12t^2][f^{IV}(\tilde{\xi}_1) - f^{IV}(\xi_1)]\}/24$$

и учитывая, что $|f^{IV}(\xi_2)-f^{IV}(\xi_0)| \leq 3\omega(f^{IV})$, $|f^{IV}(\tilde{\xi}_1)-f^{IV}(\xi_1)| \leq$

$\leq \omega(f^{IV})$, , получаем

$$|R'''(x)| \leq (1-2t)\|f^{IV}\|_C h/2 + [4-t^4-(1-t)^4+12t^2]h\omega(f^{IV})/24 =$$

$$= [(1-2t)\|f^{IV}\|_C + t\omega(f^{IV})]h/2 +$$

$$+ h[4-t^4-(1-t)^4-12t(1-t)]\omega(f^{IV})/24.$$

Так как $\omega(f^{IV}) \leq 2\|f^{IV}\|_C$, то отсюда $|R'''(x)| \leq \|f^{IV}\|_C h/2 + h\omega(f^{IV})/8$, $x \in [x_1, x_1+h/2]$. При $x \in [x_1+h/2, x_2]$ такой же результат получается, если записать $R'''(x)$ в виде $R'''(x) = h\{-12[1-2(1-t)]f^{IV}(\xi_1) + [f^{IV}(\xi_2)-f^{IV}(\xi_0)] - [1 - t^4 - (1-t)^4 + 12(1-t)^2][f^{IV}(\xi_1) - f^{IV}(\tilde{\xi}_1)]\} / 24$. Доказательство теоремы 2 завершено.

Литература

1. БЕРЕЗИН И.С., ЖИДКОВ Н.П. Методы вычислений, т.I. - М.: Наука, 1966. - 632 с.

2. НИКОЛЬСКИЙ С.М. Квадратурные формулы. - М.: Наука, 1974. - 223 с.

3. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. -М.: Наука, 1980. - 352 с.

4. КОРН Г., КОРН Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: Наука, 1968. - 720 с.

5. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. О погрешности приближения кубическими интерполяционными сплайнами. I. -В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 93). Новосибирск, 1982, с. 3-29.

6. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. О погрешности приближения кубическими интерполяционными сплайнами. II. -В кн.: Методы сплайн-функций в численном анализе (Вычислительные системы, вып. 98). Новосибирск, 1983, с. 51-66.

7. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Об интерполяции и аппроксимации сплайнами. -В кн.: Проблемы обработки информации (Вычислительные системы, вып. 100). Новосибирск, 1983, с. 83-100.

Поступила в ред.-изд.отд.
5 ноября 1984 года