П Р И Б Л И Ж Е Н И Е   С П Л А Й Н А М И
(Вычислительные системы)

1984 год   Выпуск 106

УДК 519.651

О КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ ДЛЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ

Т. Жанлав

В настоящей работе формулируются два типа краевых условий для интерполяционных кубических сплайнов в терминах коэффициентов их представления через B-сплайны. Показывается эквивалентность одного из них краевым условием типа IV [1]. Другой тип на равномерной сетке эквивалентен оптимальным краевым условиям [3].

Пусть $S(x)$ - кубический сплайн класса $C^2[a, b]$, интерполирующий функцию $f(x)$ на сетке Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$, т.е.

$$S_i = S(x_i) = f_i, \quad i = 0,\ldots,N. \tag{1}$$

Всякий кубический сплайн класса $C^2[a, b]$ допускает представление [1] в виде

$$S(x) = \sum_{j=-1}^{N+1} \alpha_j B_j(x), \tag{2}$$

где $B_j(x)$ - нормализованные B-сплайны, а α_j связаны с величинами $m_i = S'(x_i)$, $M_i = S''(x_i)$ соотношениями

$$\alpha_j = S_j + \frac{h_j - h_{j-1}}{3} m_j - \frac{h_j h_{j-1}}{6} M_j, \quad j = 0,\ldots,N. \tag{3}$$

Условия интерполяции приводят к $(N+1)$ уравнениям

$$\alpha_{i-1}B_{i-1}(x_i)+\alpha_i B_i(x_i)+\alpha_{i+1}B_{i+1}(x_i)=f_i, \quad i=0,\ldots,N, \tag{4}$$

с $(N+3)$ неизвестными. Для однозначного определения неизвестных α_j необходимо добавить еще два уравнения. Рассмотрим линейные функционалы

$$\hat{\alpha}_j = f_j + \frac{1}{3(h_j+h_{j-1})}\left[h_j^2\frac{f_j-f_{j-1}}{h_{j-1}} - h_{j-1}^2\frac{f_{j+1}-f_j}{h_j}\right], j=1,\dots,N-1, \quad (5)$$

являющиеся коэффициентами локально-аппроксимационного кубического сплайна [I-2]. В [2] показано, что для достаточно гладких функций $f(x)$ они близки к коэффициентам интерполяционного сплайна α_j. Используем этот факт для задания дополнительных уравнений. А именно потребуем

$$\alpha_1 = \hat{\alpha}_1, \qquad \alpha_{N-1} = \hat{\alpha}_{N-1}. \quad (6)$$

Тогда приходим к системе

$$\alpha_{i-1}B_{i-1}(x_i)+\alpha_i B_i(x_i)+\alpha_{i+1}B_{i+1}(x_i) = f_i, \quad i=0,1, \quad (7')$$

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_2 B_2(x_2) + \alpha_3 B_3(x_2) = f_2-\hat{\alpha}_1 B_1(x_2),\\ &\alpha_{i-1}B_{i-1}(x_i)+\alpha_i B_i(x_i)+\alpha_{i+1}B_{i+1}(x_i)=f_i, \quad i=3,\dots,N-3,\\ &\alpha_{N-3}B_{N-3}(x_{N-2})+\alpha_{N-2}B_{N-2}(x_{N-2})=f_{N-2}-\hat{\alpha}_{N-1}B_{N-1}(x_{N-2})\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

$$\alpha_{i-1}B_{i-1}(x_i)+\alpha_i B_i(x_i)+\alpha_{i+1}B_{i+1}(x_i)=f_i, \quad i=N-1,N. \quad (7'')$$

ТЕОРЕМА. Для интерполяционного кубического сплайна $S(x)$ краевые условия (6) эквивалентны краевым условиям типа IУ [I], т.е.

$$S'''(x_p-0) = S'''(x_p+0), \quad p=1,N-1. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, так как $S(x)$ – интерполяционный сплайн для функции $f(x)$, то формулу (5) можно записать в виде

$$\hat{\alpha}_j = S_j + \frac{1}{3(h_j+h_{j-1})}\left[h_j^2\frac{S_j-S_{j-1}}{h_{j-1}} - h_{j-1}^2\frac{S_{j+1}-S_j}{h_j}\right].$$

Используя разложения S_{j-1}, S_{j+1} по формуле Тейлора в точке $x=x_j$, получаем

$$\hat{\alpha}_j = \alpha_j + \frac{h_j^2 h_{j-1}^2}{18(h_j+h_{j-1})}(S'''_{j-0} - S'''_{j+0}), \quad j=1,\dots,N-1,$$

откуда сразу следует утверждение теоремы.

Поскольку мы показали эквивалентность краевых условий (6) и условий типа IУ, для которых сплайн существует и единственен [I], то разрешимость системы (7')-(7") очевидна.

Известно [I], что система (7) имеет матрицу с диагональным преобладанием, если

$$\rho < (1+\sqrt{13})/2, \quad \rho = \max_{|i-j|=1} h_i/h_j . \tag{9}$$

При этом система решается обычным методом монотонной прогонки, после чего неизвестные $\alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_N, \alpha_{N+1}$ вычисляются с помощью уравнений (7'), (7"). Таким образом, сплайн однозначно определяется. Если условия (9) нарушены, то рекомендуется использовать метод немонотонной прогонки [I,4]. Во всех случаях систему (7')-(7") можно рассматривать, как эффективный способ реализации краевых условий типа IУ.

Рассмотрим еще один вариант краевых условий

$$\alpha_1-\alpha_2=\hat\alpha_1-\hat\alpha_2, \quad \alpha_{N-1}-\alpha_{N-2}=\hat\alpha_{N-1}-\hat\alpha_{N-2}. \tag{10}$$

Присоединяя (IO) к системе (4), получаем

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_1-\alpha_2=\hat\alpha_1-\hat\alpha_2,\\ &\alpha_{i-1}B_{i-1}(x_i)+\alpha_iB_i(x_i)+\alpha_{i+1}B_{i+1}(x_i)=f_i, \quad i=2,\dots,N-2,\\ &-\alpha_{N-2}+\alpha_{N-1}=\hat\alpha_{N-1}-\hat\alpha_{N-2}.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Систему (II) можно записать в терминах величин m_i или M_i. Используя формулу (3), получаем

$$\alpha_2-\alpha_1=\frac{h_0+h_1+h_2}{3}\left(m_1+\frac{h_1}{2}M_1\right).$$

Если учесть [I], что

$$M_1=-6\frac{f_1-f_0}{h_0}+\frac{2}{h_0}(m_0+2m_1),$$

то имеем

$$\alpha_2-\alpha_1=\frac{h_0+h_1+h_2}{3}\left[-3h_1\frac{f_1-f_0}{h_0}+\frac{h_1}{h_0}m_0+\left(1+\frac{2h_1}{h_0}\right)m_1\right].$$

Аналогичное преобразование можно сделать в разности $\alpha_{N-2}-\alpha_{N-1}$.

В результате система (II) в терминах m_i записывается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} & m_0+\left(2+\frac{h_0}{h_1}\right)m_1 = \frac{3h_0}{h_1(h_0+h_1+h_2)}(\hat\alpha_2-\hat\alpha_1) + 3\cdot\frac{f_1-f_0}{h_0}, \\ & \lambda_i m_{i-1}+2m_i+\mu_i m_{i+1}=c_i, \qquad i = 1,\dots,N, \\ & \left(2+\frac{h_{N-1}}{h_{N-2}}\right)m_{N-1}+m_N = \frac{3h_{N-1}}{h_{N-2}(h_{N-3}+h_{N-2}+h_{N-1})}(\hat\alpha_{N-1}-\hat\alpha_{N-2})+3\frac{f_N-f_{N-1}}{h_{N-1}} \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

где

$$\lambda_i = h_i/(h_{i-1}+h_i), \quad \mu_i = 1 - \lambda_i,$$

$$c_i = 3\lambda_i\frac{f_i-f_{i-1}}{h_{i-1}} + 3\mu_i\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i}.$$

Последовательно исключая из (I2) m_0, m_1 и m_N, m_{N-1}, приходим к системе с диагональным преобладанием для неизвестных m_i, $i = 2, \dots, N-2$. Отсюда вытекает однозначная разрешимость системы (I2), и, следовательно, кубический интерполяционный сплайн с краевыми условиями (I0) существует и единствен. Отметим, что на равномерной сетке система (I2) совпадает с системой для оптимальных краевых условий [3].

При выполнении условий (9) система (II) решается методом монотонной прогонки. Затем величины $\alpha_{-1}, \alpha_{N+1}$ находятся из (4) при $i = 0, N$.

Автор выражает искреннюю благодарность В.Л.Мирошниченко за ценные замечания, высказанные по существу затронутого вопроса.

Литература

I. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. -М.: Наука. I980. - 352 с.

2. ЖАНЛАВ Т. О представлении интерполяционных кубических сплайнов через В-сплайны. -В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 87). Новосибирск, I98I, с. 3-I0.

3. BEHFOROOZ L.H., Papamichel N. End conditions for cubic spline interpolation.-J.Inst.Math.Applics,1979,v.23,p.355-366.

4. САМАРСКИЙ А.А., НИКОЛАЕВ Е.С. Методы решения сеточных уравнений. -М.: Наука, I978. - 592 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
2I марта I984 года