П Р И Б Л И Ж Е Н И Е   С П Л А Й Н А М И
(Вычислительные системы)
1984 год		Выпуск 106

УДК 519.651

ЛАГРАНЖЕВА ИНТЕРПОЛЯЦИЯ КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ УЗЛАМИ

Б.М. Шумилов

В работах [1, с.193-198, 2] исследовалась задача лагранжевой интерполяции кубическими и параболическими сплайнами с наложением дополнительных условий на величины скачков производных сплайнов. Это позволило получать интерполянты, имеющие существенные практические преимущества. В частности, удалось построить устойчивые алгоритмы рекуррентного вычисления коэффициентов сплайна по мере поступления значений интерполируемой функции (см. также [3]). Недостатком полученных сплайнов является то, что они имеют меньшую гладкость - непрерывно дифференцируемы для кубического случая, непрерывны или даже разрывны для параболического случая. В настоящей работе мы избавляемся от этого недостатка за счет введения дополнительных узлов склейки сплайна.

§1. Вывод определяющих соотношений

Пусть на отрезке $[a,b]$ в узлах сетки Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ заданы значения некоторой функции $f_i = f(x_i)$, $i = 0, 1,\ldots,N$. Введем дополнительные узлы $\bar{x}_i = x_i + \gamma_i h_i$, $h_i = x_{i+1} - x_i$, $0 < \gamma_i < 1$, $i = 0,1,\ldots, N-1$, и образуем сетку δ : $x_0 < \bar{x}_0 < x_1 < < \bar{x}_1 < \ldots < \bar{x}_{N-1} < x_N$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Лагранжевым кубическим сплайном с дополнительными узлами назовем кубический сплайн $S(x)$ дефекта 1 с узлами на сетке δ , удовлетворяющий условиям $S(x_i) = f_i$, $i = 0,1,\ldots,N$, причем выполняются соотношения $\alpha_i(S''(x_{i+1}) - S''(x_i)) = h_i(S'''(\bar{x}_i+ +0)-S'''(\bar{x}_i-0))$, $i=0,1,\ldots,N-1$, где α_i - заданные числа.

При $\alpha_i = 0$ сплайн $S(x)$ имеет три непрерывные производные в точке $\bar{x}_i$, т.е. на интервале $[x_i, x_{i+1}]$ совпадает с кубическим многочленом. Если $\alpha_i = 0$ для всех i, то получаем кубический сплайн дефекта I с узлами на сетке Δ. Для однозначного определения сплайна можно использовать краевые условия, рассмотренные в [I,с.97]. Например, условия типа I: $S'(x_k) = f'(x_k)$, $k = 0, N$; типа П: $S''(x_k) = f''(x_k)$, $k = 0, N$, или типа Ш: $S^{(r)}(x_0) = f^{(r)}(x_N)$, $r = 1,2$ (периодические краевые условия).

Положим $m_i = S'(x_i)$, $i = 0,1,\dots,N$. Тогда для $x \in [x_i, x_{i+1}]$ имеем

$$
\begin{aligned}
S(x) &= f_i + m_i h_i t + \frac{m_{i+1} - m_i}{2} h_i t^2 + \\
&+ \left(\frac{f_i - f_{i+1}}{h_i} + \frac{m_i + m_{i+1}}{2} \right) \frac{h_i}{\varepsilon_i} \left[2\alpha_i (t - \gamma_i)_+^3 + \right. \\
&\left. + 2(1 - \alpha_i(1 - \gamma_i)) t^3 - 3(1 - \alpha_i \gamma_i (1 - \gamma_i)) t^2 \right], \qquad (1)
\end{aligned}
$$

где $t = (x - x_i)/h_i$, $\varepsilon_i = 1 + \alpha_i \gamma_i (1 - \gamma_i)(1 - 2\gamma_i)$, $x_+^3 = [\max(0, x)]^3$.

Условие непрерывности $S''(x)$ в узлах сетки Δ дает следующую систему определяющих соотношений для нахождения параметров сплайна:

$$
\begin{aligned}
P_{i-1} \lambda_i m_{i-1} &+ (1 + P_{i-1} \lambda_i + Q_i \mu_i) m_i + Q_i \mu_i m_{i+1} = \\
&= (1 + 2Q_i) \mu_i \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} + (1 + 2P_{i-1}) \lambda_i \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}, \qquad (2)
\end{aligned}
$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1,$$

где

$$\lambda_i = 1 - \mu_i = h_i / (h_{i-1} + h_i),$$

$$P_i = (1 + \gamma_i (1 - \gamma_i^2) \alpha_i) / \varepsilon_i,$$

$$Q_i = (1 - \gamma_i (1 - \gamma_i)(2 - \gamma_i) \alpha_i) / \varepsilon_i.$$

К этим уравнениям можно добавить соотношения, вытекающие из краевых условий. Например, для граничных условий типа I имеем $m_0 = f'(x_0)$, $m_N = f'(x_N)$.

Во всех случаях матрицы систем имеют строгое диагональное преобладание, если выполнено условие

$$|\alpha_i| < \frac{1}{\gamma_i(1-\gamma_i)}, \qquad i = 0,1,\ldots,N-1. \tag{3}$$

Это обеспечивает однозначную разрешимость систем, а следовательно, существование и единственность соответствующих им лагранжевых кубических сплайнов с дополнительными узлами.

Отметим некоторые варианты выбора параметров α_i. Если $\alpha_i = [\gamma_i(1-\gamma_i)(2-\gamma_i)]^{-1}$ для всех i (или $\alpha_i=-[\gamma_i(1-\gamma_i^2)]^{-1}$), то система (2) становится двухдиагональной и неизвестные m_i можно определять рекуррентным образом. Если положить $\alpha_k = [\gamma_k(1-\gamma_k)\times(2-\gamma_k)]^{-1}$ и $\alpha_{k-1}= -[\gamma_{k-1}(1-\gamma_{k-1}^2)]^{-1}$, то из k-го уравнения системы имеем

$$m_k = \mu_k \frac{f_{k+1}-f_k}{h_k} + \lambda_k \frac{f_k-f_{k-1}}{h_{k-1}}. \tag{4}$$

Как нетрудно проверить, первая и вторая производные сплайна $S(x)$ в узле x_k совпадают с соответствующими производными квадратной параболы, интерполирующей значения $f(x)$ в точках x_{k-1}, x_k, x_{k+1}. При этом система (2) распадается на две изолированные подсистемы, что может быть использовано для распараллеливания вычислений. При $\alpha_i= 0$ для всех $i\neq k$ и $\alpha_k= [\gamma_k(1-\gamma_k)(2-\gamma_k)]^{-1}$ (или $\alpha_k = -[\gamma_k(1-\gamma_k^2)]^{-1}$ сплайн $S(x)$ будет состоять из двух кубических сплайнов дефекта I с узлами на сетке Δ, гладко склеенных вплоть до второй производной в точке $\bar{x}_k$. Коэффициенты одного из этих сплайнов определяются независимо от коэффициентов другого, что позволяет использовать такой выбор α_i, например, для устранения осцилляций, присущих обычному кубическому сплайну (см. [I,2]).

Иногда бывает удобно использовать запись сплайна $S(x)$ через значения $M_i = S''(x_i)$, $i = 0,1,\ldots,N$. Тогда для $x\in[x_i,x_{i+1}]$ имеем

$$\begin{aligned} S(x) = {} & f_i(1-t) + f_{i+1}t + \frac{h_i^2}{6}\{\alpha_i(M_{i+1}-M_i)\times \\ & \times[(1-\gamma_i)(2\gamma_i-\gamma_i^2-t^2)t + (t-\gamma_i)_+^3] - \\ & - t(1-t)[(2-t)M_i + (1+t)M_{i+1}]\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Условие непрерывности $S'(x)$ в узлах сетки Δ эквивалентно следующей системе соотношений:

$$p_{i-1}\mu_i M_{i-1} + (3 - p_{i-1}\mu_i - q_i\lambda_i)M_i + q_i\lambda_i M_{i+1} =$$

$$= \frac{6}{h_{i-1}+h_i}\left(\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i} - \frac{f_i-f_{i-1}}{h_{i-1}}\right),\ i = 1,2,\ldots,N-1,$$

где $p_i = P_i\varepsilon_i$, $q_i = Q_i\varepsilon_i$. К этим уравнениям добавляются соотношения, вытекающие из граничных условий. Например, для краевых условий типа II имеем $M_0 = f''(x_0)$, $M_N = f''(x_N)$.

При выполнении условия (3) разрешимость полученных систем следует из единственности соответствующих им лагранжевых кубических сплайнов. Однако наличие диагонального преобладания в матрицах систем при этом не гарантировано. Пусть, в частности, $\alpha_i = [\gamma_i(1-\gamma_i)(2-\gamma_i)]^{-1}$ для всех i. Тогда $q_i = 0$, $p_i = 3/(2-\gamma_i)$ и величина диагонального преобладания равна $r_i = 3 - 2p_{i-1}\mu_i = 3(2\lambda_i - \gamma_{i-1})/(2-\gamma_{i-1})$. Эта величина больше нуля, если $\gamma_{i-1} < 2\lambda_i$, что накладывает ограничение на расположение дополнительных узлов вида $0 < \gamma_i < 2\lambda_{i+1}$, $i = 0,1,\ldots,N-2$. При этом максимум диагонального преобладания достигается при $\gamma_i \to 0$, а при $0 < \gamma_i \le 3\lambda_{i+1} - 1$ величина $r_i \ge 1$. Аналогично при $\alpha_i = -[\gamma_i(1-\gamma_i^2)]^{-1}$, $i = 0,1,\ldots,N-1$, имеем $r_i = 3(1+\gamma_i-2\lambda_i)/(1+\gamma_i)$. Отсюда вытекают ограничения $\gamma_i + 1 \ge 2\lambda_i$, и максимум диагонального преобладания в этом случае получается при $\gamma_i \to 1$. Отметим, что при равномерном расположении узлов основной и дополнительной сеток величина диагонального преобладания в обоих случаях равна единице.

Если $\alpha_k = [\gamma_k(1-\gamma_k)(2-\gamma_k)]^{-1}$ и $\alpha_{k\pm1} = 0$, то $r_k = 3 - 2\mu_k \ge 1$ независимо от расположения узлов, а $r_{k+1} = 3 - 2p_k\mu_{k+1} - 2\lambda_{k+1} = (2\lambda_{k+1} - \gamma_k(3-2\lambda_{k+1}))/(2-\gamma_k)$. Последняя величина больше нуля при $0 < \gamma_k < 2\lambda_{k+1}/(3-2\lambda_{k+1})$, и она стремится к единице при $\gamma_k \to 0$, $\lambda_{k+1} \to 1$.

Введенное понятие лагранжева кубического сплайна можно обобщить аналогично [2,4]. При этом получаются кубические сплайны, вообще говоря, дефекта 2 на основной сетке Δ. В частности, сплайн "наименьшей работы" имеет m_i, $i = 1,2,\ldots,N-1$, вида (4).

§2. Оценки погрешности интерполяции

Обозначим

$$H = \max_i h_i ,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{a\le x\le b} |f(x)| ,$$

$$\rho = \max_{|i-j|=1} \frac{h_i}{h_j} .$$

С целью упрощения выкладок мы исследуем лишь некоторые случаи выбора параметров α_i, γ_i.

ЛЕММА I. Пусть $f(x)\in W^3_\infty[a,b]$. Если $S(x)$ удовлетворяет граничным условиям типа I, то $|m_i - f'_i| \le C_1 H^2 \|f'''\|_\infty$, $i = 0,1,\dots,N$, где $C_1 = 1/6$ при $\alpha_i = [\gamma_i(1-\gamma_i)(2-\gamma_i)]^{-1}$, $0<\gamma_i\le 3-2\sqrt{2}$ (или $\alpha_i = -[\gamma_i(1-\gamma_i^2)]^{-1}$, $2\sqrt{2}-2\le\gamma_i<1$), $i = 0,1,\dots,N-1$; $C_1 = 39/150$ при $|\alpha_i|\le 8/3$, $\gamma_i = 1/2$, $i = 0,1,\dots,N-1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим методику, которая использовалась в [I] при доказательстве аналогичного результата для кубических сплайнов. Для величин $\tilde q_i = m_i - f'_i$ имеем систему

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde q_0 = 0,\\
&P_{i-1}\lambda_i\tilde q_{i-1} + (1+P_{i-1}\lambda_i + Q_i\mu_i)\tilde q_i + Q_i\mu_i\tilde q_{i+1} = \tilde c_i,\\
&\qquad\qquad i = 1,2,\dots,N-1,\\
&\tilde q_N = 0 ,
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где

$$\tilde c_i = (1+2Q_i)\mu_i\,\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i} + (1+2P_{i-1})\lambda_i\,\frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} -$$

$$- P_{i-1}\lambda_i f'_{i-1} - (1+P_{i-1}\lambda_i + Q_i\mu_i)f'_i - Q_i\mu_i f'_{i+1} .$$

Используя формулу Тейлора, получаем

$$\tilde c_i = \mu_i h_i^2 \int_0^1 \varphi(1-\tau, Q_i) f'''(x_i + \tau h_i)\,d\tau \; +$$

$$+\lambda_i h_{i-1}^2 \int_0^1 \varphi(\tau,\ P_{i-1}) f'''(x_{i-1}+\tau\, h_{i-1}) d\tau,$$

где $\varphi(\tau,\ P_i) = (\frac{1}{2} + P_i)\tau^2 - P_i\tau$.

Разбивая интегралы на участки знакопостоянства функции φ по переменной τ и применяя неравенство Гёльдера, находим

$$|\tilde{c}_i| \le \max\left\{ \frac{4Q_i^3 + 3Q_i + 1}{(1+2Q_i)^2},\ \frac{4P_{i-1}^3 + 3P_{i-1} + 1}{(1+2P_{i-1})^2} \right\} \frac{H^2}{6} \|f'''\|_\infty .$$

В частности, при $\alpha_i = -[\gamma_i(1-\gamma_i^2)]^{-1}$, $i = 0,\dots,N-1$, имеем $P_{i-1} = 0$, $Q_i = 1/\gamma_i$ и

$$|\tilde{c}_i| \le \max\left\{ \frac{4+3\gamma_i^2+\gamma_i^3}{\gamma_i(2+\gamma_i)^2},\ 1 \right\} \frac{H^2}{6} \|f'''\|_\infty . \tag{7}$$

Таким образом, при рекуррентной интерполяции "справа налево" целесообразно выбирать значения $2\sqrt{2}-2 \le \gamma_i < 1$. Тогда коэффициент в оценке (7) минимален и равен I/6. Аналогично при рекуррентной интерполяции "слева направо" коэффициент I/6 обеспечивается при $0 < \gamma_i \le 3-2\sqrt{2}$.

Если же $\gamma_i = 1/2$, $i = 0,\dots, N-1$, то при всех $|\alpha_i| \le 8/3$ имеем $0 \le P_{i-1},\ Q_i \le 2$ и $|\tilde{c}_i| \le \frac{39}{150} H^2 \| f''' \|_\infty$.

Поскольку во всех рассмотренных случаях матрица системы (6) имеет диагональное преобладание $r_i \ge 1$, то из следствия Д.I [I] получаем утверждение леммы I.

Те же самые оценки справедливы для краевых условий типа П и Ш.

ЛЕММА 2. Пусть $f(x) \in W_\infty^3[a,b]$. Если $S(x)$ удовлетворяет граничным условиям одного из типов I – Ш и каждый из параметров α_i равен $[\gamma_i(1-\gamma_i)(2-\gamma_i)]^{-1}$ при $0 < \gamma_i \le \lambda_{i+1}$ (или $-[\gamma_i(1-\gamma_i^2)]^{-1}$ при $\lambda_i \le \gamma_i < 1$), то

$$|M_i - f_i''| \le \frac{2\sqrt{2}-1}{3} (1+\rho) H \|f'''\|_\infty, \quad i = 0, 1, \dots, N .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай граничных условий типа П. Для величин $\tilde{Q}_i = M_i - f''_i$ имеем систему

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{Q}_0 = 0, \\ &p_{i-1}\mu_i\tilde{Q}_{i-1} + (3-p_{i-1}\mu_i - q_i\lambda_i)\tilde{Q}_i + q_i\lambda_i\tilde{Q}_{i+1} = \tilde{d}_i, \\ &\qquad\qquad i = 1,2,\dots, N-1, \\ &\tilde{Q}_N = 0, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где

$$\tilde{d}_i = \frac{6}{h_{i-1}+h_i}\left(\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}\right) -$$

$$- p_{i-1}\mu_i f''_{i-1} - (3-p_{i-1}\mu_i - q_i\lambda_i)f''_i - q_i\lambda_i f''_{i+1}\ .$$

Используя формулу Тейлора, при $\alpha_i = [\gamma_i(1-\gamma_i)(2-\gamma_i)]^{-1}$ (т.е. $q_i=0$, $p_i = 3/(2-\gamma_i)$) получаем

$$\tilde{d}_i = 3\lambda_i h_i \int_0^1 (1-\tau)^2 f'''(x_i + \tau h_i)d\tau +$$

$$+3\mu_i h_{i-1}\int_0^1 \left(\frac{1}{2-\gamma_{i-1}} - \tau^2\right) f'''(x_{i-1} + \tau h_{i-1})d\tau\ .$$

Применяя к интегралам неравенство Гёльдера, находим

$$|\tilde{d}_i| \le \left(\lambda_i h_i + \mu_i h_{i-1}\left[\frac{4}{(2-\gamma_{i-1})^{3/2}} - \frac{1+\gamma_{i-1}}{2-\gamma_{i-1}}\right]\right)\|f'''\|_\infty,$$
$$i = 1,2,\dots, N-1.$$

Так как при $0 < \gamma_i \le \lambda_{i+1}$ матрица системы (8) имеет диагональное преобладание, то из следствия Д.I [I] имеем

$$|\tilde{Q}_i| \le \max_{1\le i\le N-1}\frac{|\tilde{d}_i|}{r_i} \le \max_{1\le i\le N-1}\frac{\max(h_{i-1},h_i)}{3(2\lambda_i - \gamma_{i-1})} \times$$

$$\times \max_{\substack{0<\lambda_i<1 \\ 0<\gamma_{i-1}\le\lambda_i}} \left\{ 3\lambda_i - 1 - \gamma_{i-1} + 4\,\frac{1-\lambda_i}{(2-\gamma_{i-1})^{1/2}} \right\} \|f'''\|_\infty \le$$

$$\le \frac{2\sqrt{2}-1}{3}\, H \max_i \frac{h_{i-1}+h_i}{h_i} \|f'''\|_\infty \le \frac{2\sqrt{2}-1}{3}(1+p)\|f'''\|_\infty .$$

Такая же оценка получается и при $\alpha_i = -[\gamma_i(1-\gamma_i^2)]^{-1}$, $\lambda_i \le \gamma_i < 1$, а также при остальных типах краевых условий. Лемма 2 доказана.

Оценим теперь погрешность приближений, получаемых с помощью лагранжевых кубических сплайнов с дополнительными узлами.

ТЕОРЕМА I. Если $S(x)$ интерполирует функцию $f(x)\in W^3_\infty[a,b]$ и удовлетворяет граничным условиям одного из типов I–III, то

$$\|f^{(r)} - S^{(r)}\|_{C[a,b]} \le C_r H^{3-r}\|f'''\|_\infty , \quad r = 0,1, \tag{9}$$

где $C_0 = 5/96$, $C_1 = 1/6$ при

$$\alpha_i = [\gamma_i(1-\gamma_i)(2-\gamma_i)]^{-1}, \quad 0 < \gamma_i \le 3-2\sqrt{2}, \quad i = 0,\dots,N-1, \tag{10}$$

или

$$\alpha_i = -[\gamma_i(1-\gamma_i^2)]^{-1}, \quad 2\sqrt{2}-2 \le \gamma_i < 1, \quad i = 0,\dots,N-1, \tag{11}$$

и $C_0 = 181/2400$, $C_1 = 39/150$ при

$$\gamma_i = 1/2, \quad |\alpha_i| \le 8/3, \quad i = 0,\dots,N-1. \tag{12}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначение $\varphi(t) = (3(1-\alpha_i\gamma_i(1-\gamma_i)) - 2(1-\alpha_i(1-\gamma_i))t)/\epsilon_i$. Из формулы (I) следует, что для $x\in[x_i,\bar{x}_i]$

$$S(x) - f(x) = (2t - t^2 - t^2\varphi(t))\frac{h_i}{2}(m_i - f_i') +$$

$$+ t^2(1-\varphi(t))\frac{h_i}{2}(m_{i+1} - f_{i+1}') + \frac{h_i^3}{2} I(t), \tag{13}$$

$$0 \le t \le \gamma_i ,$$

где в силу формулы Тейлора

$$I(t) = t^2 \int_t^1 [1-\varphi(t)\,\tau](1-\tau) f'''(x_i+\tau h_i)\,d\tau +$$

$$+ \int_0^t [2t - t^2 - t^2\varphi(t) - (1-t^2\varphi(t))\tau]\,\tau\, f'''(x_i+\tau h_i)\,d\tau \;.$$

Оценивая интегралы посредством неравенства Гёльдера, находим $|I(t)| \le \frac{1}{6}\phi(t)\|f'''\|_\infty$, где

$$\phi(t) = \begin{cases} \phi_1(t,\ t^2\varphi(t)), & 0 \le t \le \bar t\ , \\ \phi_1(1-t,\ 1-t^2\varphi(t)), & \bar t \le t \le \gamma_i\ . \end{cases}$$

Здесь $\phi_1(t,\ t^2\varphi(t)) = t^2\varphi(t) + \dfrac{6t^2}{\varphi(t)} - \dfrac{2t^2}{\varphi^2(t)} - 3t^2 - 2t^3$. Отсюда при выполнении условий (II) получаем

$$3-2t \le \varphi(t) \le \min\{2+\sqrt{2} - (9+4\sqrt{2})t/6,\ 1/t\},$$

$$0 \le t \le \bar t = \frac{3\gamma_i(2-\gamma_i) - \gamma_i\sqrt{3(4+4\gamma_i-5\gamma_i^2)}}{4(\gamma_i^2+\gamma_i+1)}\ ,$$

$$\max\{1/t,\ 3-2t\} \le \varphi(t) \le 2+\sqrt{2} - (9+4\sqrt{2})t/6,$$

$$\bar t \le t \le 2\sqrt{2} - 2,$$

$$3-2t \le \varphi(t) \le (4+t-2t^2)/(3t),\quad 2\sqrt{2}-2 \le t \le \gamma_i\ .$$

В условиях (I0) находим

$$1 + (4\sqrt{2}+4)t/3 \le \varphi(t) \le (5-2t)/3\ ,$$

$$0 \le t \le \gamma_i \le \bar t \le (-3\gamma_i + \sqrt{3\gamma_i(8-5\gamma_i)})/(4-4\gamma_i)\ .$$

Если выполнены условия (I2), то при $0 \ge \alpha_i \ge -8/3$ имеем

$$3-2t \le \varphi(t) \le \min\{5 - 14t/3,\ 1/t\},$$

$$0 \le t \le \bar t = [3(4-\alpha_i) - \sqrt{16 - 8\alpha_i + 9\alpha_i^2}]/(16-8\alpha_i),$$

$$1/t \le \varphi(t) \le 5 - 14t/3,\quad \bar t \le t \le 1/2\ .$$

При $0 \le \alpha_1 \le 8/3$ получаем $1+3t/2 \le \varphi(t) \le 3-2t$, $0 \le t \le 1/2 \le \bar{t}$.

Для $x \in [\bar{x}_i, x_{i+1}]$ функция $\psi(x)$ выглядит аналогично полученной выше. Тогда в силу леммы I из (I3) находим $|S(x) - f(x)| \le$ $\le [\frac{1}{12}\psi(x)+t(1-t)C_1]H^3\|f'''\|_\infty$, и так как максимум $\{\frac{1}{12}\psi_1(t,t^2\varphi(t))+$ $+ t(1-t)C_1\}$, $0 \le t \le \bar{t} \le 1$, достигается при $t=\bar{t}=1/2$, что соответствует $\gamma_1 = 1$ или $\alpha_1 = 0$, и равен $(1+24C_1)/96$, а в остальных точках допустимой области значение коэффициента получается меньше, то первая из оценок (9) установлена.

Дифференцируя (I3), аналогично получаем $|S'(x) - f'(x)| \le$ $\le H^2\|f'''\|_\infty A(t)$, где

$$A(t) = \begin{cases} \psi_2(t, \omega), & 0 \le t \le t_1, \\ \frac{1}{12}\left[\frac{4(\omega-1)(3+(\omega-1)^2-12u)}{\omega^2} + 6u - \omega\right] + C_1(\omega-1), & t_1 \le t \le t_2, \\ \psi_2(1-t,\omega), & t_2 \le t \le \gamma_1, \end{cases}$$

$$\omega = \omega(t) = 2t\varphi(t) + t^2\varphi'(t), \quad u = t(1-t),$$

$$\psi_2(t,\omega) = C_1(1-2t) + [2(\omega-2t)^3/\omega^2 + 6u - \omega]/12.$$

При выполнении условий (II) имеем

$$6u \le \omega(t) \le \min\{2-2t,\ t(8+4\sqrt{2} - (9+4\sqrt{2})t)/2\},$$
$$0 \le t \le t_1 = \gamma_1(1+\gamma_1-\sqrt{\gamma_1})/(\gamma_1^2 + \gamma_1 + 1),$$

$$\max\{2-2t,\ 6u\} \le \omega(t) \le t(8 + 4\sqrt{2} -(9+4\sqrt{2})t)/2,$$
$$t_1 \le t \le 2-\sqrt{2},$$

$$\max\{\min\{6u,\ t(8+4\sqrt{2}-(9+4\sqrt{2})t)/2\},\ 2t\} \le \omega(t) \le 2-3t^2/2,$$
$$2-\sqrt{2} \le t \le t_2 \le 2\gamma_1/(\gamma_1^2 + \gamma_1 + 1),$$

$$\max\{t(8+4\sqrt{2}-(9+4\sqrt{2})t)/2,\ 2(1-t^2)\} \le \omega(t) \le \min\{2t,\ 6u\},$$
$$t_2 \le t \le \gamma_1 .$$

Если выполнены условия (10), то

$$2+4(\sqrt{2}+1)t \le \omega(t) \le 2t(2-t), \quad 0 \le t \le \gamma_i \le t_1 ,$$

$$t_1=(\sqrt{\gamma_i}-\gamma_i)/(1-\gamma_i) \le t_2=(\sqrt{\gamma_i(4-3\gamma_i)}-\gamma_i)/(2-2\gamma_i) .$$

При выполнении условий (12) получаем

$$2t(1+t) \le \omega(t) \le \min\{2t(5-7t), 2-2t\},$$

$$0 \le t \le t_1=[16-3\alpha_i-\sqrt{9\alpha_i^2+64}]/12/(2-\alpha_i) ,$$

$$\max\{2-2t, 2t(1+t)\} \le \omega(t) \le 2t(5-7t),$$

$$t_1 \le t \le 1/2 .$$

Отсюда вытекает оценка (9) при $r = 1$. Теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. Если $S(x)$ интерполирует функцию $f(x)\in W^3_\infty[a,b]$ и удовлетворяет граничным условиям одного из типов I–III, а каждый из параметров α_i равен $[\gamma_i(1-\gamma_i)(2-\gamma_i)]^{-1}$ при $0<\gamma_i\le\lambda_{i+1}$ (или $-[\gamma_i(1-\gamma_i^2)]^{-1}$ при $\lambda_i\le\gamma_i<1$), то

$$\|f''-S''\|_{C[a,b]} \le \left(\frac{8\sqrt{2}-1}{6}+\frac{4\sqrt{2}-2}{3}\rho\right) H\,\|f'''\|_\infty .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (5) для $x\in[x_i,\bar{x}_i]$ имеем $S''(x)-f''(x)=h_iI_2(t)+(1-\beta t)(M_i-f''_i)+\beta t(M_{i+1}-f''_{i+1})$, $0\le t\le\gamma_i$, где $\beta=1-\alpha_i(1-\gamma_i)$,

$$I_2(t)=(\beta t-1)\int_0^t f'''(x_i+\tau h_i)d\tau+\beta t\int_t^1 f'''(x_i+\tau h_i)d\tau .$$

При $\alpha_i=-[\gamma_i(1-\gamma_i^2)]^{-1}$ в силу леммы 2 получаем $|S''(x)-f''(x)|\le \le H\|f'''\|_\infty B(t)$, где

$$B(t)=\begin{cases} t(1+\beta)-2\beta t+C, & 0\le t\le 1/\beta ,\\ t(\beta-1)+(2\beta t-1)C, & 1/\beta\le t\le\gamma_i ,\end{cases}$$

$$C=(2\sqrt{2}-1)(1+\rho)/3.$$

Максимум полученного выражения достигается при $t = \gamma_i = 1$ и равен $2C + 1/2$. Если $\alpha_i = [\gamma_i(1-\gamma_i)(2-\gamma_i)]^{-1}$, то $|S''(x)-f''(x)| \le \le (t(1-\beta)+(1-2\beta t)C)H \|f'''\|_\infty$, $0 \le t \le \gamma_i$. Здесь максимум достигается при $t = \gamma_i = 0$ и равен $2C + 1/2$. Такой же результат справедлив и при $x \in [\bar{x}_i, x_{i+1}]$. Теорема 2 доказана.

При определенных соотношениях между сеткой Δ и параметрами α_i, γ_i можно существенно повысить точность приближения интерполируемой функции и ее производных в некоторых точках. Например, нетрудно убедиться, что для случая равномерной сетки Δ и $\alpha_i = \alpha$, $\gamma_i = 1/2$, $i = 0,\dots, N-1$, при любых $|\alpha| \le 8/3$ и $f(x) \in W^4_\infty[a, b]$ порядок погрешности приближения первой производной в узлах увеличивается на единицу: $m_i - f'_i = O(H^3)$, $i = 0,\dots,N$. То же самое справедливо при рекуррентной интерполяции на любой неравномерной сетке, если для случая $\alpha_i = [\gamma_i(1-\gamma_i)(2-\gamma_i)]^{-1}$ выбирать значения $\gamma_i = \lambda_{i+1}$, а для $\alpha_i = -[\gamma_i(1-\gamma_i^2)]^{-1}$ положить $\gamma_i = \lambda_i$. Проведенные автором и Баклановой Л.В. численные эксперименты подтверждают правильность полученных теоретических результатов.

Литература

1. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. -М.: Наука, 1980. - 352 с.

2. КВАСОВ Б.И. Параболические Х-сплайны. - В кн.: Методы сплайн-функций в численном анализе (Вычислительные системы, вып. 98). Новосибирск, 1983, с. 3-19.

3. ГОЛЬДЕНБЕРГ Л.М., КЛИМОНТОВ В.Е., СЕРЕДИНСКИЙ А.В. Рекуррентные методы построения интерполяционных сплайн-функций. -Автоматика и телемеханика, 1979, № 3, с. 173-176.

4. BEHFOROOZ G.H., PAPAMICHAEL N., WORSEY A.J. A class of piecewise - cubic interpolatory polynomials.- J.Inst.Maths.Applics, 1980, v.25, N 1, p.53-65.

Поступила в ред.-изд.отд.
10 октября 1984 года