П Р И Б Л И Ж Е Н И Е   С П Л А Й Н А М И
(Вычислительные системы)
1984 год   Выпуск 106

УДК 519.65

РАСХОДИМОСТЬ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ СПЛАЙНОВ НЕЧЕТНОЙ СТЕПЕНИ

Ю.С. Волков

Введение

Рассмотрим на интервале $[a, b]$ некоторую последовательность разбиений $\{\Delta: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b,\ N = 1, 2, \ldots\}$. Пусть каждый $(b-a)$-периодический сплайн s_Δ степени $n = 2r+1$, дефекта 1 по соответствующему разбиению Δ интерполирует заданные в узлах сетки Δ значения f_i, $i = 0, 1, \ldots, N$, периодической на $[a, b]$ функции f. Существование и единственность таких сплайнов показаны в [1].

Обозначим $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \ldots, N-1$; $H = \max\limits_i h_i$. В качестве характеристики сетки Δ будем рассматривать величину

$$\rho_\Delta = \max_{|i-j|=1} h_i/h_j .$$

Наша цель заключается в выяснении тех ограничений на ρ_Δ, которые необходимы для того, чтобы при $H \to 0$ последовательность $\{s_\Delta^{(k)}\}$ равномерно сходилась к $f^{(k)}$ для любой $(b-a)$-периодической функции $f \in C^k$, $k = 0, \ldots, n$.

Для $r = 0$ эта задача элементарна. Случай кубической сплайн-интерполяции ($r = 1$) хорошо изучен [2-5]. Ограничения на ρ_Δ здесь нужны только при $k = 0$ и $k = 3$, причем эти ограничения одинаковы: $\rho_\Delta < (3+\sqrt{5})/2$. Вопрос об условиях сходимости интерполяционных сплайнов пятой степени ($r = 2$; $k = 0$) исследовался автором [6]. Подобные результаты для сплайнов более высоких степеней в литературе отсутствуют.

В данной работе найдены условия на характеристику ρ_Δ, при которых возможна расходимость последовательности $\|s_\Delta^{(k)} - f^{(k)}\|_\infty$, $k = 0, 1, \ldots, r-1, r+2, \ldots, n$, при $H \to 0$ (как обычно, $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}\{|f(x)|: a \le x \le b\}$). Эти условия даются в терминах нулей обобщенных многочленов Эйлера-Фробениуса (см., например, [7]). Полученные ограничения на ρ_Δ, как частный случай, содержат известные ограничения для кубических сплайнов.

Первые два параграфа статьи вспомогательные. В §I изучаются свойства нулей обобщенных многочленов Эйлера-Фробениуса, кроме известных свойств приводятся новые. В §2 исследуется поведение некоторого сплайна на геометрической сетке, т.е. сетке с постоянным растяжением. Основной материал изложен в §3, где с помощью сплайна, рассмотренного в §2, строится пример расходящегося интерполяционного процесса. Последний параграф посвящен вопросам практического построения интерполяционных периодических сплайнов нечетной степени. Здесь исследуется зависимость чисел обусловленности матриц систем уравнений, которые приходится решать при построении, от неравномерности используемых сеток. Даются некоторые рекомендации по способам построения сплайнов.

§I. Обобщенные многочлены Эйлера-Фробениуса

Пусть δ_ν: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_\nu$ - геометрическая сетка, заданная параметрами $h > 0$, $q > 0$: $h_i = x_{i+1} - x_i = q^i h$, $i = 0, \ldots, \nu-1$. Считаем, что сетка δ_ν продолжена влево от точки a и вправо от x_ν с сохранением геометричности.

Любой сплайн степени n, заданный на сетке δ_ν, представим в виде разложения по нормализованным B-сплайнам $B_{np}(x)$, $p = -n, \ldots$ $\ldots, \nu-1$, степени n, для которых на каждом интервале $[x_i, x_{i+1}]$ сетки δ_ν имеет место [2, с.24] рекуррентное соотношение

$$B_{np}(x) = \frac{x - x_p}{x_{p+n} - x_p} B_{n-1,p}(x) + \frac{x_{p+n+1} - x}{x_{p+n+1} - x_{p+1}} B_{n-1,p+1}(x), B_{0p}(x) \equiv \delta_{ip}. \quad (1)$$

ЛЕММА I. При $t \in [0,1]$ на геометрической сетке выполнено тождество

$$B^{(k)}_{np}(x_i + th_i) = q^k B^{(k)}_{n,p+1}(x_{i+1} + th_{i+1}) . \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО для $k = 0$ проводится методом математической индукции по n. Далее, дифференцируя полученное тождество, получаем (2) при $k \geq I$.

Выражение

$$\Pi_n(\lambda;q) = B_{n,i-n}(x_i) + \lambda B_{n,i-n+1}(x_i) + \ldots + \lambda^{n-1} B_{n,i-1}(x_i)$$

в силу леммы I не зависит от i ; будем его рассматривать как многочлен по λ . Ясно, что $\Pi_1(\lambda; q) \equiv 1$.

ЛЕММА 2. При $q \neq 1$ для многочленов $\Pi_n(\lambda;q)$ справедливо рекуррентное соотношение

$$\Pi_{n+1}(\lambda;q) = (q^{n+1}-1)^{-1}\{(q^{n+1}-\lambda)\,\Pi_n(\lambda;q)-q^n(1-\lambda)\Pi_n(\lambda/q;q)\}. \qquad (3)$$

При $q=1$ (равномерная сетка)

$$\Pi_{n+1}(\lambda;1) = (n+1)^{-1}\{(1+n\lambda)\Pi_n(\lambda;1)-\lambda(1-\lambda)\Pi_n'(\lambda;1)\}. \qquad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО легко получается путем подстановки в левую часть выражения для $\Pi_{n+1}(\lambda;q)$ с последующим использованием тождества (I).

Полученные соотношения для многочленов $\Pi_n(\lambda;q)$ показывают, что последние с точностью до постоянного множителя совпадают с обобщенными многочленами Эйлера-Фробениуса [7-9], которые являются обобщением хорошо известных многочленов Эйлера-Фробениуса ($q = 1$) (см., например, [10,11]).

В дальнейшем нам потребуются некоторые свойства нулей $\lambda_1,\ldots$ $\ldots,\lambda_{n-1}$ многочленов $\Pi_n(\lambda;q)$ или, что то же самое, обобщенных многочленов Эйлера-Фробениуса.

1^0. Нули λ_p, $p = 1,\ldots,n-1$, многочлена $\Pi_n(\lambda;q)$ простые, вещественные, отрицательные, и, если перенумеровать их в порядке убывания, удовлетворяют неравенствам

$$\lambda_{n-1}< q\lambda_{n-2}< \lambda_{n-2}< \ldots< q\lambda_1< \lambda_1< 0 \quad \text{при} \quad q > 1,$$

$$\lambda_{n-1}< q\lambda_{n-1}< \lambda_{n-2}< \ldots< q\lambda_2< \lambda_1< 0 \quad \text{при} \quad 0 < q < 1.$$

2^0. Нули $\lambda_p= \lambda_p(q)$ являются строго убывающими функциями от q и $K_1 q^p\le \lambda_p(q) \le K_2 q^p$ для всех p . Константы $K_1, K_2< 0$ не зависят от p и q .

3^0. Для $p \le \left[\frac{n}{2}\right]$

$$\lambda_p > -q^p, \qquad \lambda_{n-p} < -q^{n-p}; \qquad (5)$$

$$\lambda_p(q)\lambda_{n-p}(q) = q^n, \qquad \lambda_p(q)\lambda_{n-p}(q^{-1})= 1. \qquad (6)$$

4^0. При $q\neq 1$ числа $\lambda_1(q),\ldots,\lambda_{n-1}(q)$ являются корнями уравнения

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (-1)^{n-m}/(q^m - \lambda) = 0. \qquad (7)$$

Перечисленные свойства нулей обобщенных многочленов Эйлера-Фробениуса можно найти в работах [7-9]. Следующий результат вытекает из соотношений (6).

ЛЕММА 3. Для $k = 0,\dots, n$ справедливы равенства

$$\frac{\lambda_p(q)}{q^k} = \frac{\lambda_p(1/q)}{1/q^{n-k}}, \qquad p = 1,\dots, n-1.$$

ТЕОРЕМА I. Функции $\lambda_2(q)/q,\dots,\lambda_{n-1}(q)/q$ строго убывают по q, а функция $\lambda_1(q)/q$ либо тоже строго убывает, либо не зависит от q.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [I2] показано, что числа $-\lambda_1, \dots$ $\dots, -\lambda_{n-1}$ суть собственные числа матрицы $AD(q)$, где $D(q) = \operatorname{diag}\{q, q^2,\dots, q^{n-1}\}$, A – некоторая осцилляционная $(n-1)\times(n-1)$-матрица.

Напомним, матрица называется вполне положительной (неотрицательной), если все ее миноры положительны (неотрицательны). Вполне неотрицательная матрица называется осцилляционной [I3,с.92], если некоторая ее степень вполне положительна.

Важное свойство осцилляционных матриц заключается в том, что все их собственные числа положительные и простые. Произведение осцилляционной матрицы на невырожденную вполне неотрицательную есть снова осцилляционная матрица.

Пусть $q_1 > q_2 > 0$. Любая вещественная линейная комбинация матриц $\frac{1}{q_1} AD(q_1)$ и $\frac{1}{q_2} AD(q_2)$ имеет только вещественные собственные числа, так как умножение осцилляционной матрицы на матрицу $I_m = \operatorname{diag}\{-1,\dots,-1,1,\dots,1\}$ (первые m диагональных элементов равны –I) оставляет собственные числа вещественными [I4,теорема I.3]. Все собственные числа матрицы $\frac{1}{q_1} AD(q_1) - \frac{1}{q_2} AD(q_2)$ неотрицательны. Следовательно, применяя теорему 3.3 Лакса [I5], получаем, что $-\lambda_p(q_1)/q_1 \ge -\lambda_p(q_2)/q_2$, $p = 1,\dots, n-1$. Поскольку $\frac{\partial}{\partial\lambda} \Pi_n(\lambda_p;q) \ne 0$, то функции $\lambda_p(q)$ аналитические, а значит, аналитические и $\lambda_p(q)/q$. В соответствии с теоремой единственности аналитических функций, функции $\lambda_1(q)/q,\dots,\lambda_{n-1}(q)/q$ либо строго убывают, либо не зависят от q. Но не убывать может только функция $\lambda_1(q)/q$ (свойство 2^0). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Полностью аналогично доказывается, что функции $\lambda_1(q)/q^{n-1},\dots,\lambda_{n-2}(q)/q^{n-1}$ строго возрастают, а функция $\lambda_{n-1}(q)/q^{n-1}$ либо тоже строго возрастает, либо не зависит от q.

§2. О сплайнах на геометрической сетке

В этом параграфе исследуем поведение $\|s^{(k)}\|_\infty$ при $\nu\to\infty$ в зависимости от q для сплайна $s(x)$ степени $n = 2r+1$, заданного на геометрической сетке δ_ν соотношениями

$$s(a) = 1,\quad s(x_i) = 0,\ i=1,\dots,\nu, \tag{8}$$

$$s^{(2m-1)}(x_j)=0,\quad m=1,\dots,r;\quad j=0,\nu. \tag{9}$$

Существование и единственность такого сплайна следуют, например, из основного тождества [I,с.I5I] для полиномиальных сплайнов.

Используя нормализованные B-сплайны, можно записать

$$s(x) = \sum_{p=i-n}^{i} b_p B_{np}(x),\quad x\in[x_i,x_{i+1}].$$

Для нахождения коэффициентов b_p в разложении по B-сплайнам выпишем получаемую из условий (8), (9) систему уравнений:

$$b_{-n}B^{(2m-1)}_{n,-n}(x_0)+\dots+b_{-1}B^{(2m-1)}_{n,-1}(x_0)=0,\quad m=1,\dots,r, \tag{10.1}$$

$$b_{-n}B_{n,-n}(x_0)+\dots+b_{-1}B_{n,-1}(x_0)=1, \tag{10.2}$$

$$b_{i-n}B_{n\,i-n}(x_i)+\dots+b_{i-1}B_{n\,i-1}(x_i)=0,\quad i=1,\dots,\nu, \tag{10.3}$$

$$b_{\nu-n}B^{(2m-1)}_{n\,\nu-n}(x_\nu)+\dots+b_{\nu-1}B^{(2m-1)}_{n\,\nu-1}(x_\nu)=0,\quad m=1,\dots,r. \tag{10.4}$$

Так как коэффициенты при неизвестных в уравнениях (I0.3) не зависят от i (лемма I), то решение этих уравнений можно искать в виде $b_p=\lambda^p$. Корнями $\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}$ соответствующего характеристического уравнения являются нули обобщенных многочленов Эйлера-Фробениуса (см. §I) и, в соответствии со свойством I^0, имеем

$$b_p = \sum_{j=1}^{2r} c_j\lambda_j^p,\quad p=-n+1,\dots,\nu-1. \tag{11}$$

Неизвестное b_{-n} выразим из соотношения (10.2):

$$b_{-n} = \sum_{j=1}^{2r} c_j \lambda_j^{-n} + 1/B_{n,-n}(a). \tag{12}$$

Потребовав,чтобы решение (11),(12) удовлетворяло (10.1) и (10.4), с учетом леммы 1, получаем относительно коэффициентов $c_1,\dots,c_{2r}$ систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{2r} c_j \sum_{p=-n}^{-1} \lambda_j^p B_{np}^{(2m-1)}(a) = -B_{n,-n}^{(2m-1)}(a)/B_{n,-n}(a), \quad m=1,\dots,r,$$

$$\sum_{j=1}^{2r} c_j \lambda_j^{\nu} \sum_{p=-n}^{-1} \lambda_i^p B_{np}^{(2m-1)}(a) = 0, \; m=1,\dots,r.$$

Запишем ее в векторной форме

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2\Lambda_{2\nu}^{-1} \\ \vdots & \vdots \\ A_1\Lambda_{1\nu} & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{c}_1 \\ \vdots \\ \Lambda_{2\nu}\bar{\bar{c}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

где $\Lambda_{1\nu} = \mathrm{diag}\{\lambda_1^{\nu},\dots,\lambda_r^{\nu}\}$, $\Lambda_{2\nu} = \mathrm{diag}\{\lambda_{r+1}^{\nu},\dots,\lambda_{2r}^{\nu}\}$, A_1 и A_2 суть $r \times r$-матрицы, элементы которых соответственно равны

$$a_{ij}^1 = \sum_{p=-n}^{-1} \lambda_j^p B_{np}^{(2i-1)}(a), \quad a_{ij}^2 = \sum_{p=-n}^{-1} \lambda_{r+j}^p B_{np}^{(2i-1)}(a),$$

$$\bar{b} = [-B'_{n,-n}(a)/B_{n,-n}(a), -B'''_{n,-n}(a)/B_{n,-n}(a), \dots, -B_{n,-n}^{(2r-1)}(a)/B_{n,-n}(a)]^T,$$

$$\bar{c}_1 = (c_1,\dots,c_r)^T, \quad \bar{c}_2 = (c_{r+1},\dots,c_{2r})^T.$$

Так как сплайн s определяется условиями (8), (9) однозначно, то система (13) однозначно разрешима. Решая ее по правилу Крамера, при $\nu \to \infty$ имеем

$$c_j = \frac{\det \tilde{A}_j A_2 + O\left(\left|\frac{\lambda_r}{\lambda_{r+1}}\right|^{\nu}\right)}{\det A_1 A_2 + O\left(\left|\frac{\lambda_r}{\lambda_{r+1}}\right|^{\nu}\right)}, \quad j=1,\dots,r,$$

$$c_j = \frac{O\left(\left|\frac{\lambda_r}{\lambda_j}\right|^{\nu}\right)}{\det A_1A_2 + O\left(\left|\frac{\lambda_r}{\lambda_{r+1}}\right|^{\nu}\right)}, \quad j=r+1,\dots,2r.$$

Покажем, что $\det A_1A_2 \not\equiv 0$ и $\det \tilde{A}_rA_2 \not\equiv 0$, как функции от q. Действительно, пусть $q=1$ (равномерная сетка). В этом случае $a^2_{ij} = -\lambda^{n+1}_{r+1-j}\, a^1_{i,r+1-j}$, ибо $\lambda_{r+j} = \lambda^{-1}_{r+1-j}$ и $B^{(2i-1)}_{n,-n+p}(a) = -B^{(2i-1)}_{n,-1-p}(a)$. Тогда $A_2 = -\bar{A}_1\Lambda$, где матрица $\bar{A}_1$ получается из A_1 перестановкой ее столбцов в обратном порядке, а $\Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda^{n+1}_r,\dots,\lambda^{n+1}_1\}$. Поэтому систему (13) при $q=1$ можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} A_1 & -\bar{A}_1 \\ \vdots & \vdots \\ A_1\Lambda_{1\nu} & -A_1\Lambda_{2\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{c}_1 \\ \vdots \\ \Lambda\bar{c}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда, если $\det A_1 = 0$, то и матрица этой системы вырождена, чего быть не может. Далее, сплайн $s(x)$ можно симметричным образом распространить за точку a и рассматривать полученную конструкцию как сплайн с краевыми условиями, заданными в узлах $x_{-\nu}$ и x_ν. При $\nu\to\infty$ сплайн $s(x)$ перейдет в фундаментальный сплайн на всей прямой [10]. Так как при $\nu\to\infty$ число r естественно не меняется, то понятно, что коэффициенты b_p, $p=0,\dots,2r-1$, будут стремиться к соответствующим коэффициентам разложения этого фундаментального сплайна по базису из B-сплайнов. Поэтому из (11) вытекает, что предельное значение величины c_r совпадает с аналогичным коэффициентом из [10, с. 129-130], который отличен от нуля. Следовательно, $\det \tilde{A}_rA_2 \neq 0$ при $q=1$. Кроме того, нули функций $\det A_1A_2$ и $\det \tilde{A}_rA_2$ отделены друг от друга. В самом деле, определитель является аналитической функцией от элементов матрицы, и так как $\lambda_1,\dots,\lambda_{2r}$ суть простые нули многочлена $\Pi_n(\lambda;q)$ при любом q (свойство 1^0), то $\lambda_p(q)$ аналитические по q. Поэтому выражения $\det A_1A_2$, $\det \tilde{A}_rA_2$, являясь суперпозициями указанных аналитических функций, суть аналитические функции по q.

Обозначим $Q = \{q\in\mathbb{R}:\ q>0,\ \det A_1A_2 \neq 0,\ \det\tilde{A}_rA_2\neq 0\}$. Будем считать, что показатель геометричности q сетки δ_ν принадлежит Q.

Подставим полученные выражения для c_j, $j=1,\dots,2r$, в (11). Имеем

$$b_p = \sum_{j=1}^{r} c_j \lambda_j^p + \sum_{j=r+1}^{2r} \lambda_j^p \, O\left(\left|\frac{\lambda_r}{\lambda_j}\right|^{\nu}\right) =$$

$$= \lambda_r^p \left[c_r + \sum_{j=1}^{r-1} \frac{\det \tilde{A}_j}{\det A_1} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_r}\right)^p + \sum_{j=r+1}^{2r} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_r}\right)^p O\left(\left|\frac{\lambda_r}{\lambda_j}\right|^{\nu}\right)\right],$$

$$p = -n+1, \ldots, \nu-1 .$$

Тогда для $t \in [0,1]$, $\varkappa = \left[\frac{\nu}{2}\right]$, применяя лемму I, получаем

$$s^{(k)}(x_\varkappa + th_\varkappa) = \sum_{p=-n}^{0} \frac{1}{q^{k\varkappa}} \lambda_r^\varkappa \, [\lambda_r^p c_r + O(1)] B_{np}^{(k)}(x_0 + th_0) .$$

Так как B-сплайны линейно независимы, то существуют значения $t \in [0,1]$, для которых $\sum_{p=-n}^{0} \lambda_r^p c_r B_{np}^{(k)}(x_0 + th_0) \neq 0$. Следовательно, для достаточно больших ν имеет место оценка

$$\|s^{(k)}\|_\infty > C \frac{1}{h^k} \left|\frac{\lambda_r}{q^k}\right|^{\nu/2} \tag{14}$$

с константой $C > 0$, не зависящей от ν.

§3. Расходимость процесса интерполяции

Пусть задана последовательность разбиений Δ_ν: $a = x_{\nu 0} < x_{\nu 1} < \ldots$ $\ldots < x_{\nu N_\nu} = b$, $\nu = 1,2,\ldots$. Обозначим $h_{\nu i} = x_{\nu i+1} - x_{\nu i}$, $i = 0, I, \ldots, N_\nu - 1$, $H_\nu = \max_i h_{\nu i}$, $\rho_\nu = \max_{|i-j|=1} h_{\nu i}/h_{\nu j}$.

Будем считать, что операторы $S_\nu^{(k)}: C \to C$ ставят в соответствие k-й производной $(b-a)$-периодической функции $f \in C^k$, $k = 0, \ldots, n$, k-ю производную периодического сплайна степени $n = 2r+1$, дефекта I, интерполирующего f в узлах сетки Δ_ν. Корректность определения этих операторов при $k \geq 1$ следует из того, что периодические функции, имеющие одну и ту же k-ю производную, могут отличаться только на константу, но в этом случае соответствующие интерполяционные сплайны имеют одинаковые k-е производные. Как обычно,

$$\|S_\nu^{(k)}\| = \sup_{\|f^{(k)}\|_\infty \leq 1} \|S_\nu^{(k)} f^{(k)}\|_\infty .$$

Так же, как в §I, пусть $0>\lambda_1(q)>\lambda_2(q)>\ldots>\lambda_{n-1}(q)$ — нули обобщенных многочленов Эйлера-Фробениуса (или $\Pi_n(\lambda;q)$), которые также являются корнями уравнения (7).

Основной результат данного параграфа содержит

ТЕОРЕМА 2. Для любого фиксированного ρ, удовлетворяющего неравенствам

$$\lambda_r(\rho)\le-\rho^k\ ,\quad k=0,1,\ldots,r-1, \tag{15}$$

$$\lambda_r(\rho)\le-\rho^{n-k},\quad k=r+2,\ldots,n\ , \tag{16}$$

существуют $(b-a)$-периодическая функция $f\in C^k$ и последовательность сеток $\{\Delta_\nu\}$ с ограничениями

$$\lim_{\nu\to\infty} H_\nu=0\ ,\quad \rho_\nu=\rho \tag{17}$$

такие, что для периодических сплайнов $S_\nu^{(0)}f$ степени $n=2r+1$, интерполирующих f в узлах сеток Δ_ν, последовательность $\|S_\nu^{(k)}f^{(k)}-f^{(k)}\|_\infty\to\infty$ при $\nu\to\infty$. Более того, неравенства (I5), (I6) при $k=0,1$ $(k=n-1,n)$ эквивалентны неравенствам $\rho\ge\rho_n^{(k)}$, где $\rho_n^{(k)}$ — нуль монотонной функции $1+\lambda_r(\rho)/\rho^k$ (соответственно $1+\lambda_r(\rho)/\rho^{n-k}$).

ЗАМЕЧАНИЕ I. Неравенство (I5) при $\rho\ge\tilde\rho_n^{(k)}$ выполнено для $k=2,\ldots,r-1$, где $\tilde\rho_n^{(k)}$ — нуль монотонной функции $1+\lambda_{r-k+1}(\rho)/\rho$. Аналогично неравенство (I6) при $\rho\ge\tilde\rho_n^{(k)}$ выполнено для $k=r+2,\ldots$ $\ldots,n-2$, где $\tilde\rho_n^{(k)}$ — нуль монотонной функции $1+\lambda_{r-n+k+1}(\rho)/\rho$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В условиях теоремы 2 и замечания I $\rho_n^{(k)}=\rho_n^{(n-k)}$, $k=0,1$ и $\tilde\rho_n^{(k)}=\tilde\rho_n^{(n-k)}$, $k=2,\ldots,r-1$.

Истинность замечания I следует из свойства I^0. Лемма 3 является основанием для замечания 2.

Прежде чем доказывать теорему 2, докажем две леммы.

ЛЕММА 4. Операторы $S_\nu^{(k)}$, $k=0,\ldots,n$, линейны и ограничены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку линейность очевидна, докажем вторую часть утверждения. Ограниченность $S_\nu^{(0)}=S_\nu$ следует из пред -

ставления

$$(S_\nu f)(x) = \sum_{i=1}^{N_\nu} f(x_{\nu i}) F_{\nu i}(x),$$

где $F_{\nu i}$ - периодический фундаментальный сплайн n-й степени на сетке Δ_ν, однозначно определяемый условиями $F_{\nu i}(x_{\nu j}) = \delta_{ij}$.

Для $(b-a)$-периодической функции $f \in C^k$, $k \geq 1$, справедливо [I6, с.302] представление

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{2}{b-a} \int_a^b D_k\left(2\pi \frac{x-t}{b-a}\right) f^{(k)}(t)\, dt ,$$

где $$a_0 = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) dt,$$

$$D_k(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^k} \cos\left(mx - \frac{\pi k}{2}\right) \text{ - функции Бернулли.}$$

Тогда, учитывая, что $\sum_i F_{\nu i} \equiv 1$, получаем

$$\|(S_\nu f)^{(k)}\|_\infty \leq \left\| \sum_{i=1}^{N_\nu} \left[\frac{2}{b-a} \int_a^b \left| D_k\left(2\pi \frac{x_i - t}{b-a}\right) \right| dt \right] |F_{\nu i}^{(k)}| \right\|_\infty \|f^{(k)}\|_\infty ,$$

что и доказывает ограниченность $\|S_\nu^{(k)}\|$, $k = 1, \ldots, n$.

Определим множество индексов $I_h = \{i : h_{\nu i} \geq h, h_{\nu i-1} \geq h,\ h > 0,\ i = 1, \ldots, N_\nu - 1\}$. Считаем, что сетка Δ_ν продолжена за границы $[a, b]$ по периодичности.

ЛЕММА 5. *При $h > 0$ справедливо неравенство*

$$\|S_\nu^{(k)}\| > K h^k \left\| \sum_{i \in I_h} |F_{\nu i}^{(k)}| \right\|_\infty$$

с константой $K > 0$, зависящей только от k.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого многочлена $p(x)$ степени m имеет место [I6, с.24I] неравенство

$$|p^{(k)}(x)| \le \frac{1}{(\beta-\alpha)^k}\,\sigma_{mk} \max_{\alpha\le x\le\beta} |p(x)|, \quad x\in[\alpha,\beta] ,$$

с константой σ_{mk}, зависящей только от m и k .

Для каждого $x\in[a,b]$ определим эрмитов сплайн s_x степени $2k+1$ (см. [2,гл.П, §10]) на сетке Δ_ν условиями

$$s_x(x_{\nu i}) = \begin{cases} \dfrac{h^k}{\sigma_{2k+1,k}} \operatorname{sign} F^{(k)}_{\nu i}(x), & i \in I_h , \\ 0, \quad i \in \{0,1,\dots, N_\nu\}\setminus I_h & , \end{cases}$$

$$s^{(j)}_x(x_{\nu i}) = 0, \quad i = 0,1,\dots,N_\nu; \quad j = 1,\dots, k .$$

На каждом интервале $[x_{\nu i}, x_{\nu i+1}]$ s_x является многочленом степени $2k+1$ и, так как в точках $x_{\nu i}$ и $x_{\nu,i+1}$ производная s'_x имеет нули кратности k , то либо $s'_x \equiv 0$, либо $s'_x(t) \ne 0$ при $t\in(x_{\nu i}, x_{\nu,i+1})$. Следовательно, $\|s_x\|_\infty = \max\limits_i |s_x(x_{\nu i})| = h^k/\sigma_{2k+1,k}$. Поэтому

$$\|s^{(k)}_x\|_\infty \le \frac{\sigma_{2k+1,k}}{h^k}\|s_x\|_\infty = 1 .$$

Тогда

$$\|S^{(k)}_\nu\| = \sup_{\|f^{(k)}\|_\infty\le 1} \Big\| \sum_{i=1}^{N_\nu-1} f(x_{\nu i})F^{(k)}_{\nu i}\Big\|_\infty \ge \max_{a\le x\le b}\Big|\sum_{i\in I_h} s_x(x_{\nu i})F^{(k)}_{\nu i}(x)\Big| =$$

$$= h^k/\sigma_{2k+1,k} \Big\| \sum_{i\in I_h} |F^{(k)}_{\nu i}| \Big\|_\infty .$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2. Согласно теореме Банаха-Штейнгауза необходимым условием равномерной сходимости последовательности линейных ограниченных операторов $S^{(k)}_\nu$ является ограниченность последовательности норм этих операторов. Покажем, что сетки Δ_ν, $\nu = 1,2,\dots$, можно подобрать так, что при выполнении (17) последовательность $\|S^{(k)}_\nu\|$ будет неограниченной.

Зафиксируем число $q\in Q$. Алгоритм построения последовательности $\{\Delta_\nu\}$, $\nu = 1,2,\dots,$ состоит в следующем. Разделим $[a,b]$ на n_ν равных частей длиной $\tilde H_\nu = (b-a)/n_\nu$. На каждом из отрезков

$[a + m\widetilde{H}_\nu, a+(m+1)\widetilde{H}_\nu]$, $m=0,\dots,n-1$, построим разбиение $a + m\widetilde{H}_\nu = x_{\nu,2m\nu} < x_{\nu,2m\nu+1} < \dots < x_{\nu,2m\nu+2\nu} = a + (m+1)\widetilde{H}_\nu$ так, что $h_{\nu,2m\nu+i} = h_{\nu,2m\nu+2\nu-i-1} = q^i h_\nu$, $i = 0,\dots,\nu-1$, где $h_\nu = \widetilde{H}_\nu/2(1+q+\dots+q^{\nu-1})$.

Очевидно, построенная таким образом последовательность сеток удовлетворяет условиям (I7) для $\rho = \max\{q, q^{-1}\}$.

В силу леммы 5

$$\|S_\nu^{(k)}\| > K\, h_\nu^k \,\|\sum_{m=1}^{n\nu} F^{(k)}_{\nu,2m\nu}\|_\infty. \tag{18}$$

Функция $s(x) = \sum_{m=1}^{n\nu} F_{\nu,2m\nu}(x)$ является периодическим на $[a,b]$ сплайном степени n. Построим по разбиению интервала $[a,a+\widetilde{H}_\nu]$ периодический сплайн n-й степени (периода $\widetilde{H}_\nu$), принимающий на концах этого интервала значение I, а во всех внутренних узлах 0. Данный сплайн, продолженный по периодичности на $[a,b]$, в силу единственности, совпадет с $s(x)$. Кроме того, функция $s(x)$ симметрична относительно точек $x=a$ и $x=a+\widetilde{H}_\nu/2$ (если считать, что $s(x)$ продолжена на всю вещественную прямую), следовательно, нам достаточно рассмотреть сплайн $s(x)$ лишь на отрезке $[a, a+\widetilde{H}_\nu/2]$. Кроме того, из симметрии также следует, что на концах отрезка нечетные производные этого сплайна равны нулю. Поведение $\|s^{(k)}\|_\infty$ при $\nu \to \infty$ для такого сплайна исследовалось в §2. Из (I8) и (I4) имеем

$$\|S_\nu^{(k)}\| > \widetilde{C}\left|\frac{\lambda_r}{q}\right|^{\nu/2}, \quad \widetilde{C} = CK > 0$$

для достаточно больших ν.

Заметим, что в силу леммы 3 для доказательства теоремы достаточно рассмотреть случай $q \ge 1$: если при $\rho = q$ растет $\|S_\nu^{(k)}\|$, то при $\rho = \frac{1}{q}$ растет $\|S_\nu^{(n-k)}\|$, верно и наоборот.

Итак, пусть $q \ge 1$. Для значений $k \ge r$ величина $\left|\frac{\lambda_r}{q^k}\right|$ не может быть больше I (свойство 3^0). Из свойства 2^0 следует, что $\left|\frac{\lambda_r}{q^k}\right| > 1$, $k = 0,\dots,r-1$, для достаточно больших значений q и, таким образом, при произвольном ν имеем

$$\sup\{\|S_\nu^{(k)}\|:\ q\in\{q:\lambda_r(q)<-q^k\}\cap Q\}=\infty\ ,$$
$$k=0,\dots,r-1.$$

Поскольку $\|S_\nu^{(k)}\|$ – непрерывная функция аргументов $x_{\nu 1},\dots$ $\dots,x_{\nu N_\nu-1}$, ее супремум должен быть бесконечностью, когда q принадлежит замыканию множества $\{q:\lambda_r(q)<-q^k\}\cap Q$.

Учитывая определение множества Q и то, что прообраз замкнутого множества при непрерывном отображении замкнут, заключаем, что замыкание множества $\{q:\lambda_r(q)<-q^k\}\cap Q$ есть $\{q:\ \lambda_r(q)\le -q^k\}$. Более того, по теореме I для $k=0,1$ оно совпадает с множеством $\{q:q\ge\rho_n^{(k)},\ \lambda_r(\rho_n^{(k)})=-\rho_n^{(k)}\}$. Теорема доказана.

§4. Обусловленность матриц при интерполяции сплайнами

На практике построение интерполяционных сплайнов требует решения систем линейных уравнений. Из этих систем насчитываются какие-либо параметры сплайна, используя которые можно по явным формулам вычислять значения интерполяционного сплайна и его производных. Если есть свобода в выборе параметров, то останавливаются обычно на коэффициентах разложения сплайна по B-сплайнам или узловых значениях каких-либо его производных. Вычислительные затраты в этих случаях будут минимальны, так как матрицы получаемых систем имеют наиболее простую структуру – ленточную, ширина ленты равна степени сплайна. Но и указанные параметры сплайна не равноправны. Ясно, что предпочтение отдается тем, которые находятся с наименьшей вычислительной погрешностью, т.е. на которые менее всего сказывается влияние ошибок округления.

Наша дальнейшая цель – исследовать зависимость числа обусловленности указанных ленточных матриц от неравномерности сетки в периодическом случае. Под числом обусловленности матрицы $A=(a_{ij})_{i,j=1}^N$ понимаем величину $\mathrm{cond}(A)=\|A\|\cdot\|A^{-1}\|$, где $\|A\|=\max\limits_{1\le i\le N}\sum\limits_{j=1}^N|a_{ij}|$. Такая норма матрицы согласована с нормой $\|\bar x\|=\max\limits_{1\le i\le N}|x_i|$ вектора $\bar x=(x_1,\dots,x_N)^T$.

Итак, по заданным в узлах сетки Δ: $a=x_0<x_1<\dots x_N=b$ отрезка $[a,b]$ значениям $f_i=f(x_i)$ периодической функции f периода $b-a$ требуется построить периодический интерполяционный сплайн S степени $n=2r+1$.

Рассмотрим вначале построение сплайна в виде разложения по базису из периодических нормализованных В-сплайнов B_{nj}, $j = 1,\dots,N$ [I7,§8.I]. Из условий интерполяции имеем

$$A_0\bar{b} = \bar{f}, \qquad (19)$$

где $A_0 = (B_{nj}(x_i))^N_{ij=1}$, $\bar{b}=(b_1,\dots,b_N)^T$, $\bar{f} = (f_{r+2},\dots,f_N,f_1,\dots,f_{r+1})^T$.

Используя тоерему 2 и повторяя рассуждения, проделанные в [2, с. I43-I44] для кубических сплайнов, получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. **Если локальная характеристика сетки $\rho_\Delta \ge \rho_n^{(0)}$, то число обусловленности матрицы A_0 системы (I9) может быть как угодно большим.**

Что касается систем уравнений относительно узловых значений производных сплайна, то для сплайна произвольной нечетной степени на неравномерной сетке в [I, с. III] имеется только система для нахождения узловых значений M_j, $j=1,\dots,N$, $2r$-й производной сплайна степени $n = 2r+1$:

$$A_{2r}\bar{M} = D_{2r}\bar{f}, \quad \bar{M} = (M_1,\dots,M_N)^T. \qquad (20)$$

В правой части этой системы стоит вектор, i-й компонентой которого является величина разделенной разности от функции f (с учетом ее периодичности) порядка $2r$, по точкам $x_{i-r},\dots,x_{i+r}$, умноженная на $(2r)!$. Элементы a_{ij} матрицы A_{2r} обладают свойствами

$$a_{ij} \ge 0,\ i,j=1,\dots,N;\ \sum_j a_{ij} = 1,\ i = 1,\dots,N. \qquad (21)$$

Пусть $f \in C^{2r}$. Обозначим $f_i^{(2r)} = f^{(2r)}(x_i)$, $\bar{f}^{(2r)}= (f_1^{(2r)},\dots,f_N^{(2r)})^T$, $\omega(g;h) = \max\{|g(x')-g(x'')|:|x'-x''| \le h;\ x',x''\in[a,b]\}$.

Тогда при $x\in[x_i,x_{i+1}]$ имеем

$$|S^{(2r)}(x) - f^{(2r)}(x)| \le |(M_i-f_i^{(2r)})(1-t) + (M_{i+1}-f_{i+1}^{(2r)})t| +$$

$$+ |f_i^{(2r)}(1-t) + f_{i+1}^{(2r)}t-f(x)| \le \|\bar{M}-\bar{f}^{(2r)}\| + |f^{(2r)}(\theta_i) - f(x)| \le$$

$$\le \|A_{2r}^{-1}\|\|D_{2r}\bar{f} - A_{2r}\bar{f}\| + \omega(f^{(2r)};H),$$

где $t \in (x-x_i)/h_i$, $\theta_i\in [x_i,x_{i+1}]$. По свойству разделенных разностей существует точка $\xi_i \in (x_{i-r},x_{i+r})$ такая, что $(D_{2r}\bar{f})_i =$

$= f^{(2r)}(\xi_i)$. Из (2I) по теореме о среднем заключаем, что $(A_{2r}\bar{f})_i = f^{(2r)}(\eta_i)$ для некоторой точки $\eta_i \in [x_{i-r}, x_{i+r}]$. Следовательно, $\|D_{2r}\bar{f} - A_{2r}\bar{f}\| = \max |f^{(2r)}(\xi_i) - f^{(2r)}(\eta_i)| \le 2r\omega(f^{(2r)}; H)$. В итоге $\|S^{(2r)} - f^{(2r)}\|_\infty \le (1+2r\|A_{2r}^{-1}\|)\omega(f^{(2r)}; H)$.

В силу теоремы 2 для $r \ge 2$ существуют функция $f \in C^{2r}$ и последовательность сеток Δ_ν с характеристиками $\rho_{\Delta_\nu} \ge \rho_n^{(2r)}$ такие, что $H \to 0$ и $\|S^{(2r)} - f^{(2r)}\|_\infty \to \infty$ при $\nu \to \infty$. Так как в этом случае $\omega(f^{(2r)}; H) \to 0$, то неограниченно возрастает последовательность $\|A_{2r}^{-1}\| = \mathrm{cond}\,(A_{2r})$. Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 4. Если локальная характеристика сетки $\rho_\Delta \ge \rho_n^{(2r)}$, то при $r \ge 2$ число обусловленности матрицы A_{2r} системы (20) может быть как угодно большим.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае кубических сплайнов ($r = 1$) известно [2], что $\mathrm{cond}(A_{2r}) \le 3$ независимо от сетки.

При наличии систем относительно узловых значений других производных сплайна степени $n = 2r + 1$ подобным образом можно показать, что если элементы a_{ij} матрицы A_k системы для нахождения узловых значений k-й производной сплайна обладают свойствами (2I), то $\mathrm{cond}(A_k)$ нельзя ограничить константой, не зависящей от сетки при $k = 1, \dots, r-1, r+2, \dots, n$.

В итоге мы приходим к следующему выводу. Если локальная характеристика ρ_Δ сетки Δ для некоторого k удовлетворяет неравенству (I5) или (I6), то использование систем относительно узловых значений k-й производной сплайна может привести к значительной потере точности при интерполяции. Поэтому, чтобы избежать решения систем с плохо обусловленной матрицей при построении интерполяционного сплайна степени $2r+1$ на произвольных неравномерных сетках, мы рекомендуем пользоваться системами относительно узловых значений производных порядка r или $r+1$. Например, для кубических сплайнов в этом случае число обусловленности не превосходит 3.

В заключение автор выражает благодарность В.Л.Мирошниченко за полезные обсуждения и поддержку данной работы.

Литература

I. АЛБЕРГ Дж., НИЛЬСОН Э., УОЛШ Дж. Теория сплайнов и ее приложения. -М.: Мир, I972. - 3I6 с.

2. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, I980. - 352 с.

3. MARSDEN M.J. Cubic spline interpolation of continuous functions.-J.Approxim.Theory,1974,v.10,N 2,p.103-111.

4. ЗМАТРАКОВ Н.Л. Сходимость интерполяционного процесса для параболических и кубических сплайнов. -В кн.: Труды МИАН СССР, 1975, т. 138, с. 71-93.

5. ЗМАТРАКОВ Н.Л. Равномерная сходимость третьих производных интерполяционных кубических сплайнов. -В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 72). Новосибирск, 1977, с.10-29.

6. ВОЛКОВ Ю.С. Необходимые условия равномерной сходимости интерполяционных сплайнов четвертой и пятой степеней. -В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 93). Новосибирск, 1982, с.30-38.

7. FENG Y.Y.,KOZAK J. On generalized Euler-Frobenius Polinomial.-J.Approxim.Theory,1981,v.32,N 4,p.327-338.

8. MICCHELLI C.A. Cardinal L-splines.-In: Studies in spline functions and approximation theory (S.Karlin,C.A.Micchelli, A.Pinkus, I.J.Schoenberg eds.-New York,Academic Press,1976,p.203-250.

9. МАЛЮКОВ А.А., ОРЛОВ И.И. Свойства некоторых матриц теории кусочно-полиномиальной интерполяции на сетке с постоянным растяжением. -Сиб. мат.журн., 1978, т.9, № 2, с. 343-352.

10. СТЕЧКИН С.Б., СУББОТИН Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. -М.: Наука, 1976. - 248 с.

11. SCHOENBERG I.J. Cardinal spline interpolation. Regional Conf.series in appl.math.,v.12.-Philadelphia,SIAM,1973.-125 p.

12. MICCHELLI C.A. Oscillation matrices and cardinal spline interpolation.)In: Studies in spline functions and approximation theory (S.Karlin, C.A.Micchelli, A.Pinkus, I.J.Schoenberg eds.). New York, Academic Press,1976,p.163-201.

13. ГАНТМАХЕР Ф.Р., КРЕЙН М.Г.Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. -М.-Л.: Гостехиздат, 1950. - 360 с.

14. KARLIN S., PINKUS A. Oscillation properties of generalized characteristic polinomials for totally positive and positive definite matrices.- Linear Algebra Applic.,1974,v.8,N 4,p.281-312.

15. LAX P.D. Differential equations, defference equations and matrix theory.- Comm.Pure Appl.Math.,1958,v.11, N 2,p.175-194.

16. ТИМАН А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. -М.: Физматгиз, 1960. - 624 с.

17. SCHUMAKER L.L. Spline Functions: Basic Theorty.- New York: Wiley,1981. - 553 p.

Поступила в ред.-изд.отд.
29 марта 1984 года