ПРИБЛИЖЕНИЕ СПЛАЙНАМИ
(Вычислительные системы)
1984 год Выпуск 106

УДК 517.518.86

# ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ПОДХОД К СПЛАЙНАМ В ВЫПУКЛОМ МНОЖЕСТВЕ

В.В. Вершинин

Экстремальное свойство интерполяционных кубических сплайнов послужило основой для абстрактного определения сплайнов [1,2], состоящего в следующем. Пусть даны три гильбертовых пространства $X$, $Y$, $Z$ и два линейных непрерывных оператора $T: X \to Y$ и $A: X \to Z$, $\operatorname{im} A = Z$, $\operatorname{im} T = Y$. Тогда пространство сплайнов определяется равенством $S = \{s \in X: (T(s), T(x))_Y = 0$ для всех $x \in \ker A\}$.

Пусть $z \in Z$. Элементы $\sigma \in A^{-1}(z)$, такие, что

$$\|T(\sigma)\|_Y = \min_{x \in A^{-1}(z)} \|T(x)\|_Y \tag{1}$$

характеризуются следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 1 [2]. *Для того чтобы для элемента $\sigma \in A^{-1}(z)$ выполнялось условие (1), необходимо и достаточно, чтобы существовал такой элемент $\lambda \in Z$, что $T^*T(\sigma) = A^*(\lambda)$.*

СЛЕДСТВИЕ 1 [2]. *Элемент $\sigma$, удовлетворяющий условию (1), принадлежит пространству сплайнов $S$; более того, для каждого элемента $s \in S$ выполняется условие (1) при $z = A(s)$.*

В случае классических кубических сплайнов $X = W_2^2[a,b]$, $Y = L_2[a,b]$, $Z = R^{N+1}$, $T(f) = \dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}$, $A(f) = (f(x_0), \dots, f(x_N))$, где

$x_i$, $i = 0,\dots,N$, есть узлы сетки $\Delta$ на $[a,b]$, $\Delta$: $a = x_0 < x_1 < \dots$ $\dots < x_N = b$, $\lambda = (\lambda_0,\dots,\lambda_N)$, где $\lambda_i$ есть разрыв третьей производной сплайна $s$ в узле $x_i$: $\lambda_i = s'''(x_i+0) - s'''(x_i-0)$. В общем случае из того, что $A$ есть оператор "на", следует, что $\lambda$ определяется однозначно и мы будем называть этот элемент $\lambda \in Z$ **вектором разрывов** сплайна $s$.

Хорошо известна предложенная Аттея [3] замена ограничений типа равенств, возникающих при интерполировании, ограничениями типа неравенств. В этом случае развита интересная теория [2]. Пусть $Z = R^n$ и $A = \{k_1,\dots,k_n\}$, т.е. оператор $A$ есть набор функционалов $k_i$. Тогда $A^*(r_1,\dots,r_n) = \sum_i r_i k_i$. Пусть $C = \{x \in X:\ \alpha_i \le k_i(x) \le \beta_i$, $i = 1,\dots,n;\ \alpha_i \le \beta_i;\ \alpha_i, \beta_i \in R\}$. Задача состоит в нахождении элементов $\sigma \in C$, таких что

$$\|T(\sigma)\|_Y = \min_{x \in C} \|T(x)\|_Y . \qquad (2)$$

Такие элементы $\sigma$ характеризуются следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 2 [2]. **Для того чтобы выполнялось условие (2), необходимо и достаточно, чтобы**

$$T^*T(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i k_i , \qquad (3)$$

**где** $\lambda_i \le 0$, **если** $k_i(\sigma) = \beta_i$, $\lambda_i \ge 0$, **если** $k_i(\sigma) = \alpha_i$, $\lambda_i = 0$, **если** $\alpha_i < k_i(\sigma) < \beta_i$.

СЛЕДСТВИЕ 2 [2]. **Элемент** $\sigma$, **удовлетворяющий условию (2), принадлежит пространству сплайнов, его вектором разрывов является вектор** $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$.

Случай, когда $C$ есть произвольное выпуклое замкнутое множество в $X$, рассматривался Лораном [2,с. 443]. В этой постановке не участвуют пространство $Z$ и оператор $A$, поэтому нельзя говорить о решении как о сплайне в смысле принадлежности пространству $S$.

Менее известна интересная постановка задачи предложенная Аттея в [4]. Пусть в пространстве $Z$ зафиксировано выпуклое замкнутое множество $C_Z \subset Z$. Пусть $C_X = A^{-1}(C_Z) \subset X$. Задача состоит в нахождении таких $\sigma \in C_X$, что

$$\|T(\sigma)\|_Y = \min_{x \in C_X} \|T(x)\|_Y \ . \tag{4}$$

Эта постановка задачи о сплайне в выпуклом множестве включает задачу (2). Действительно, в этом случае $Z = R^n$, $A = (k_1, \dots, k_n)$, $C_Z$ есть параллелепипед $[\alpha_1, \beta_1] \times \dots \times [\alpha_n, \beta_n]$, $C = C_X = A^{-1}(C_Z)$. С другой стороны, при этой постановке имеет место характеризация решения задачи (4), аналогичная теорема 2. Теорема о существовании и характеризации была доказана впервые Аттея [4]. Наша цель дать элементарное доказательство этой теоремы, не использующее аппарата выпуклого анализа. Мы будем предполагать, что $\ker T + C_X$ замкнуто в $X$.

ТЕОРЕМА 3. *Решение задачи (4) существует. Для того чтобы $\sigma \in C_X$ было решением этой задачи, необходимо и достаточно существование элемента $\lambda \in Z$, такого, что $T^*T(\sigma) = A^*(\lambda)$ (т.е. $\sigma$ является сплайном с вектором разрывов $\lambda$) и*

$$(\lambda, c - A(\sigma)) \geq 0 \quad \text{для всех } c \in C_Z. \tag{5}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Геометрически последнее характеризационное условие означает, что либо $\lambda = 0$, либо гиперплоскость, ортогональная к $\lambda$ и проходящая через точку $A(\sigma)$ (т.е. множество тех $x \in X$, что $(\lambda, x) = (\lambda, A(\sigma))$, является опорной к множеству $C_Z$ и $\lambda$ направлен в то полупространство, где лежит $C_Z$. Очевидно, что в случае, когда $C_Z$ есть параллелепипед, условия характеризации (5) превращаются в условия для величин $\lambda_i$ из соотношения (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть элемент $\sigma \in C_X$ будет решением задачи (4), $c \in C_Z$ и пусть элемент $f \in X$ таков, что $A(f) = c - A(\sigma)$. Тогда $\sigma + \alpha f \in C_X$ при $0 \leq \alpha \leq 1$ и, следовательно, $(T(\sigma + \alpha f), T(\sigma + \alpha f)) \geq (T(\sigma), T(\sigma))$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Имеем $(T(\sigma + \alpha f), T(\sigma + \alpha f)) = (T(\sigma), T(\sigma)) + 2\alpha (T(\sigma), T(f)) + \alpha^2 (T(f), T(f))$.

Выбирая достаточно малое положительное $\alpha$, получаем, что $(T(\sigma), T(f)) \geq 0$. В частности, если $c = A(\sigma)$, то $f = f_0 \in \ker A$, и в этом случае получаем, что $(T(\sigma), T(f_0)) = 0$ для всех $f_0 \in \ker A$. Это означает, что $\sigma$ принадлежит пространству сплайнов $S$, откуда следует, что $(T(\sigma), T(f)) = (\lambda, A(f)) = (\lambda, c - A(\sigma)) \geq 0$.

Обратно, пусть $\sigma$ есть сплайн, такой что $(\lambda, c - A(\sigma)) \geq 0$ для любого $c \in C_Z$. Имеем

$(T(f), T(f)) - (T(\sigma), T(\sigma)) = (T(f)-T(\sigma), T(f)-T(\sigma))+$

$+ 2(T(\sigma), T(f-\sigma)), \quad f \in X,$

$(T(\sigma), T(f-\sigma)) = (T^*T(\sigma), f-\sigma) = (\lambda, A(f)-A(\sigma))$ .

Если $f \in C_X$, тогда $(T(f), T(f)) \geq (T(\sigma), T(\sigma))$.

Характеризация доказана, рассмотрим вопрос о существовании. Поскольку множество $C_X + \ker T$ замкнуто, то, рассуждая, как в [2, с.187], легко показать, что и $T(C_X)$ замкнуто. Действительно, пусть $\tilde{T}$ есть сужение $T$ на $(\ker T)^\perp$, а $U = \tilde{T}^{-1}$. Тогда $U$ - линейный непрерывный оператор и $T(C_X) = U^{-1}((C_X + \ker T) \cap (\ker T)^\perp)$.

Существование решения задачи (4) следует из существования элемента минимальной нормы в выпуклом замкнутом множестве. Теорема доказана.

Частным случаем теоремы 3 является теорема о существовании и характеризации сплайн-отображения [5]. В этом случае $X$ есть пространство отображений $f = (f_1, \ldots, f_n)$ из параллелепипеда $\Omega \subset R^m$ в $R^n$, таких что $f_h \in W_2^q(\Omega)$, $h = 1, \ldots, n$, $\Omega = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_m, b_m]$, $q = (q_1, \ldots, q_m)$. На $\Omega$ имеется сетка $\Delta = \Delta_1 \times \ldots \times \Delta_m$, $\Delta_j : a_j = x_0^j < \ldots$ $\ldots < x_{N_j}^j = b_j$, $j = 1, \ldots, m$. Оператор $A$ вычисляет значения отображения $f$ и его производных до порядка $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$, $\mu_j \leq q_j$ в узлах сетки $\Delta$, $Z = R^M$, где $M = n \cdot \sum_{j=1}^{m} \mu_j (N_j + 1)$. Пространство $Y$ есть произведение пространств вида $L_2(B)$, где $B$ - это параллелепипед $\Omega$ и его сечения. Оператор $T$ строится с использованием операторов дифференцирования. В задаче о сплайн-отображении фиксируются выпуклые замкнутые множества $C_i^\nu \subset R^n$ ($i$ и $\nu$ - мультииндексы, $\nu < \mu$) такие, что $D^\nu f(x_i) \in C_i^\nu$, $x_i \in \Delta$. Тогда имеем $C_Z = \prod_{i,\nu} C_i^\nu$.

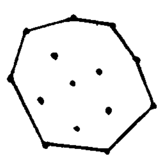

Рис. I

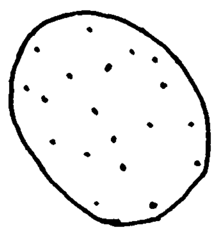

Рис. 2

Теорема характеризации в этом случае [5] особенно близка к теореме 3.

Теорема 3 может применяться для сглаживания экспериментальных данных, когда неизвестна точность эксперимента, а возможна его повторяемость. В этом случае значение измеряемой величины в узлах сетки $\Delta$ можно представить точкой в пространстве $R^{N+1}$, а затем взять выпуклую оболочку (рис. I) или другое выпуклое замкнутое множество $C_Z$, содержащее несколько таких точек (рис. 2). И затем строить сплайн в выпуклом замкнутом множестве, соответствующем $C_Z$.

## Литература


I. ATTEIA M. Fénéralisation de la définition et des propriétés des "spline-fomtions".-In: C.R.Acad.Sci. Paris, 1965, v.260, p.3550-3553.

2. ЛОРАН П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. -М.: Мир, 1975. - 496 с.

3. ATTEIA M. Fonction-spline avec contraintes lineaires type inégalité.-6$^e$ Cngrès de l'AFIRO, Nancy, mai 1967, p.1.42-1.54.

4. ATTEIA M. Fonctian-spline definies sur un ensamble convexe.-Num.Meth., 1968, N 12, p.192-210.

5. ВЕРШИНИН В.В. О сплайн-отображениях.-В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 87). Новосибирск, 1981, с.43-52.



Поступила в ред.-изд.отд.
22 октября 1984 года