ЛОГИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРОБЛЕМЫ МОЗ
(Вычислительные системы)
1985 год Выпуск 107

УДК 510.6

ПРИНЦИП КОЛЛЕКЦИИ И КВАНТОР СУЩЕСТВОВАНИЯ

В.Ю.Сазонов

Введение

В работе предлагается некоторое неклассическое исчисление секвенций RBC ("релятивизация к ресурсным границам с коллекцией"), одной из аксиом которого является известный теоретико-множественный принцип коллекции [1] для любых формул A:

$$(\mathrm{Coll})\ \forall x < a\, \exists y A \to \exists b \forall x < a\, \exists y < b A.$$

Средствами теории доказательств для RBC получен аналог теоремы Харропа [5] или Е-свойства для интуиционистской логики (см. следствие 1 теоремы о релятивизации; ранее этот результат упоминался в [2,4]). А именно по любому выводу $\mathrm{RBC} \vdash \exists y A(x,y)$ можно эффективно построить терм $t(x)$ и вывод $\mathrm{RBC} \vdash \exists y < t(x) A(x,y)$.

Тем же методом, каким доказывается нарушение закона исключенного третьего в формальной арифметике с Е-свойством (т.е. со ссылкой на невыводимость непротиворечивости), можно показать, что будет не (полностью) классическим и любое логическое исчисление с вышеприведенным свойством. Другое обоснование этого приведено в следующем разделе. Однако если совсем не рассматривать в языке формулы с неограниченными кванторами, то получим, по существу, классическое логическое исчисление $\mathrm{RB}\Delta_0$ (без Coll!). Показано, что принцип коллекции по Σ-формулам A интерпретируется в $\mathrm{RB}\Delta_0$ путем подходящей релятивизации неограниченных кванторов существования. Отсюда следует консервативность расширения с помощью принципа Σ-коллекции классических теорий, аксиомы которых содержат только ограниченные кванторы (неограниченные внешние кванторы всеобщности, как обычно, опускаются; см. следствие 2 теоремы о релятивизации). При этом используется одно естественное обобщение теоремы об устранении сечений [2].

Недостатком исчисления RBC является отсутствие в его языке импликации и неограниченного квантора всеобщности. Но их введение с сохранением вышеупомянутых результатов требует существенного пересмотра предлагаемого ниже подхода к построению исчисления (и его семантики). Это будет сделано в другой статье.

По существу, настоящее исследование связано с поиском формального аппарата в поддержку тезиса: не использовать потенциальную осуществимость - значит релятивизовать построения и рассуждения к ресурсным границам, т.е. - учитывать эти границы, а не отвлекаться от них. Подробнее об этом тезисе и о связи его и принципа коллекции с логическим анализом понятий и проблем теории сложности сказано в [2-4]. Фактически, принцип коллекции прямо выражает требование релятивизации кванторов к ресурсным границам и является скорее логическим принципом, а не специальной аксиомой, характеризующей предметную область. Приведенный аналог E-свойства исчисления RBC, очевидно, также находится в согласии с этой установкой и даже в значительной степени ее определяет.

Интерпретируя $<$ как отношение принадлежности $\in$, мы можем рассмотреть исчисление RBC (или его вариант) как логику для некоторой теории множеств, в которой (в отличие от ZF или KP [I]) все рассуждения и построения "релятивизуются к множествам". Принятый в традиционных аксиоматизациях теории множеств способ "отсечения" парадоксов кажется довольно искусственным. С одной стороны, вместо неограниченной свертки $\{x|A(x)\}$ разрешено употреблять только ограниченную - $\{x \in a|A(x)\}$. С другой стороны, и в свертке (в случае ZF), и в схеме фундирования (в случае KP) A может содержать неограниченные кванторы. Представляется более последовательным полное ограничение этих схем до Δ_0-свертывания (как в KP) и до Δ_0-фундирования. Принцип (Δ_0 - или Σ-) коллекции оправдан приведенным выше обсуждением (или упомянутым результатом о его консервативности). Взамен неограниченного фундирования теперь следовало бы принять правило введения теоретико-множественных рекурсивных функций. Особо отметим аксиому существования множества-степени (и арифметической экспоненты) как неприемлемую, даже если постулирована конечность всех множеств, в отличие, скажем, от аксиомы существования транзитивного замыкания произвольного множества. С другой стороны, ничто не мешает нам "локально" усилить такую теорию множеств аксиомой, гарантирующей существование одного транзитивного множества - модели для ZF.

Однако более детальное исследование этих вопросов требует отдельного рассмотрения.

Автор благодарен Д.И.Свириденко за ряд полезных замечаний.

I. Исчисление RB

Фиксируем первичный предикат $x<y$, означающий, что x лежит в пределах границы y. В общем случае мы не делаем никаких предположений о транзитивности или рефлексивности $<$. В зависимости от интерпретации это может быть линейный порядок или даже отношение принадлежности. Вид аксиом, налагаемых на $<$, делает все же предпочтительным прочтение $<$ как $\in$. Введем также функцию $[x,y]$ – аналог неупорядоченной пары ($x<[x,y]$, $y<[x,y]$). Тогда $[x] \rightleftharpoons [x,x]$ играет роль одноэлементного множества, а отношение $x \subseteq y \rightleftharpoons \forall v < x(v < y)$ – роль теоретико-множественного включения. Наконец, фиксируем аналог операции объединения $\sqcup_{x<y} t(x,y,\bar{z})$, связывающей переменную x в терме $t(v<y \to t(v,y,\bar{z}) \subseteq \sqcup_{x<y} t(x,y,\bar{z}))$. Повторным применением эта операция распространяется на случай списков переменных $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Положим $\sqcup x \rightleftharpoons \sqcup_{v<x} v$, $x \sqcup y \rightleftharpoons \sqcup[x,y]$ и $[t \mid \bar{x} < \bar{y}] \rightleftharpoons \sqcup_{\bar{x}<\bar{y}}[t]$.

Используя также другие первичные предикатные и функциональные символы, мы можем как обычно образовывать формулы первого порядка. Формулы я з ы к а RB содержат, по определению, только связки $\wedge, \vee, \neg, \exists$ и ограниченные кванторы всеобщности вида $\forall x<t\ldots$, а точнее, $\forall x(\neg x < t \vee \ldots)$. Аналогично ограниченный квантор существования понимается как квантор вида $\exists x < t \ldots$, т.е. $\exists x(x < t \wedge \ldots)$. Естественно, в обоих случаях предполагается, что x не входит свободно в терм t. Формулы, содержащие только ограниченные кванторы, назовем Δ_0-формулами. Вхождение в формулу неограниченного квантора $\exists$ назовем д о с т у п н ы м, если оно не находится в области действия связки $\neg$. Формулы, у которых все вхождения (неограниченных) кванторов $\exists$ доступны (соответственно недоступны), образуют класс Σ (соответственно N). Секвенция – это выражение $\Gamma \to \Delta$, где Γ и Δ – произвольные конечные списки формул, возможно, пустые. Если $\Gamma, \Delta \subseteq \Delta_0(\Sigma)$, то $\Gamma \to \Delta$ называется $\Delta_0(\Sigma)$-секвенцией.

<u>Аксиомы RB:</u>

$\to x < [x,y];$

$\to y < [x,y];$

$$v < y \to t(v,y,\bar{z}) \subseteq \bigsqcup_{x<y} t(x,y,\bar{z});$$

$A \to A$, где A – любая формула языка.

Правилами вывода RB являются: правило подстановки термов вместо свободных переменных в секвенцию

$$\frac{\Gamma(\bar{x}) \to \Delta(\bar{x})}{\Gamma(\bar{s}) \to \Delta(\bar{s})},$$

а также все правила секвенциального исчисления Генцена LK с сечением (см. [5]), применяемые только к секвенциям языка RB с ограничением на правило

$$(\to \neg) \quad \frac{A, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \neg A},$$

которое считается применимым, если $A \in N$ или если список Δ пуст.

В частности, правила для $\forall$ имеют вид $\Gamma \to \Delta, \neg x < t \vee A / \Gamma \to \Delta, \forall x < tA$ и $\neg s < t \vee A(s), \Gamma \to \Delta / \forall x < tA(x), \Gamma \to \Delta$. Если допустить правило $(\to \neg)$ только для Δ_0-формул A или только для формул A из N, то получим соответственно исчисления RB_0 и RB_1. Заметим, что фрагмент $RB\Delta_0$ исчисления RB, в котором упоминаются только Δ_0-формулы, является по существу обычной классической логикой в языке с ограниченными кванторами плюс аксиомы для $<$, $[,]$ и $\sqcup$. Аналогично определяется $RB\Sigma$. Очевидно, $RB\Delta_0 \subseteq RB\Sigma \subseteq RB_0 \subseteq RB_1 \subseteq RB$, где включения понимаются в смысле состава (частных случаев) аксиом и правил вывода.

Следующие секвенции легко выводимы в $RB\Delta_0$:

$$\to x < [x];$$

$$v < x \to v \subseteq \sqcup x;$$

$$\to x \subseteq x \sqcup y \wedge y \subseteq x \sqcup y;$$

$$\bar{v} < \bar{y} \to t(\bar{v},\bar{y},\bar{z}) \subseteq \bigsqcup_{\bar{x}<\bar{y}} t(\bar{x},\bar{y},\bar{z});$$

$$\bar{v} < \bar{y} \to t(\bar{v},\bar{y},\bar{z}) < [t(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \mid \bar{x} < \bar{y}].$$

Принципом $\mathcal{A}$-коллекции называется схема

$$(\mathcal{A}\text{-Coll}) \ \forall x < a \, \exists y \, A \to \exists b \forall x < a \, \exists y < b \, A,$$

где $A \in \mathcal{A}$ и $\mathcal{A}$ – фиксированный класс формул. Полный принцип коллекции Coll соответствует классу $\mathcal{A}$ всех формул. Положим RBC $\rightleftharpoons$ RB + Coll. Ниже мы покажем, что

$$RB_0 + \text{N-Coll} \vdash \text{Coll} \quad \text{и} \quad RB\Sigma + \Delta_0\text{-Coll} \vdash \Sigma\text{-Coll}. \qquad (*)$$

Фактически в этих случаях будут выведены даже формально более общие принципы коллекции, в которых вместо переменных x, a, y участвуют списки переменных $\bar{x}, \bar{a}, \bar{y}$.

Полный принцип коллекции в соединении с классической логикой позволяет доказывать осуществимость (точнее, всюду определенность) очень быстро растущих функций, по сравнению с функциями, задаваемыми термами языка. Для этого достаточно, чтобы график $F(x,y)$ такой функции удовлетворял следующему естественному условию для всех a:

$$\exists b \forall x < a(\exists y F(x,y) \supset \exists y < b\, F(x,y)) \supset \forall x < a\, \exists y\, F(x,y).$$

Действительно, на основе закона исключенного третьего, принципа коллекции, приведенного свойства F и аксиомы $x < [x]$ последовательно получаем (для $a = [x]$):

$$\forall x < a\, \exists y(\exists z F(x,y) \supset F(x,y)),$$

$$\exists b\, \forall x < a\, \exists y < b(\exists z F(x,z) \supset F(x,y)),$$

$$\forall x < a\, \exists y\, F(x,y) \quad \text{и} \quad \forall x \exists y\, F(x,y).$$

Например, так доказывается осуществимость экспоненты 2^n (теорема 7.3.I в [2]) и даже "растущей башни"

$$\left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\right\} n \text{ раз}$$

в теории T_0 + Coll, где T_0 – все истинные бескванторные формулы, составленные из полиномиально вычислимых предикатов и функций.

Чтобы исключить такие последствия введения принципа коллекции (см. также введение), мы будем далее рассматривать вместо классической логики исчисление RB.

Обозначим через A^t результат замены в A всех доступных вхождений (неограниченных) кванторов $\exists x$ на $\exists x < t$. Как и в теории Крипке-Платека [I], нетрудно показать индукцией по структуре A, что

$$RB_0 \vdash A^v \to A; \quad RB_0 \vdash \exists v A^v \to A;$$

$$RB_0 \vdash u \subseteq v \wedge A^u \to A^v \text{ (монотонность);}$$

$$RB_0 + N\text{-}Coll \vdash A \to \exists v A^v.$$

Причем для Σ-формул A вместо RB_0 можно взять $RB\Sigma$, а вместо N-Coll схему Δ_0-Coll. Например, последнее утверждение для A вида $\forall x < tA_0$ получается по схеме:

$$\forall x < tA_0 \to \forall x < t\,\exists u A_0^u \to \exists w \forall x < t\,\exists u < w\, A_0^u \to$$
$$\to \exists v\, \forall x < t\,\exists u \sqsubseteq v\, A_0^u \to \exists v\, \forall x < t\, A_0^v.$$

Здесь первая импликация основана на индукционном предположении, вторая - на принципе коллекции, третья - на переходе от w к $v = \sqcup w$ и четвертая - на монотонности A^u по u.

Фактически схема $A \to \exists v A^v$ равносильна принципу коллекции. Действительно, $\forall \bar{x} < a\, \exists \bar{y} B$ влечет $\exists v \forall \bar{x} < \bar{a}\, \exists \bar{y} < vB^v$, откуда, по монотонности, $\exists v\, \forall \bar{x} < \bar{a}\, \exists \bar{y} < vB$. Тем самым мы заодно приходим к упомянутым выше утверждениям (ж).

2. Основной результат

Секвенция $S^{t(v)} \Rightarrow \Gamma^v \to \Delta^{t(v)}$ называется релявитизацией секвенции $S \Rightarrow \Gamma \to \Delta$ к терму t по переменной v(v не входит в S).

ТЕОРЕМА (о релятивизации). а) П о л ю б о м у в ы в о д у $RBC + \{S_i\} \vdash S$ и т е р м а м $\{t_i(v)\}$ м о ж н о э ф ф е к т и в н о п о с т р о и т ь т е р м $t(v)$ и в ы в о д $RBC + \{S_i^{t_i(v)}\} \vdash S^{t(v)}$.

б) П р и э т о м е с л и п е р в ы й в ы в о д п р о в е д е н в RB_1+Coll + $\{S_i\}$ и л и в $RB\Sigma + \Sigma$-Coll$+ \{S_i\}$ (и $S_i, S \in \Sigma$), т о в т о р о й - в $RB_1 + \{S_i^{t_i(v)}\}$ и л и с о о т в е т с т в е н н о в $RB\Delta_0 + \{S_i^{t_i(v)}\}$ $(S_i^{t_i(v)} \in \Delta_0)$.

СЛЕДСТВИЕ I. Е с л и $RBC \vdash \to \exists x A$, т о д л я н е к о т о р о г о т е р м а t $RBC \vdash \exists x < tA^t$ и $RBC \vdash \exists x < tA$.

Пункт "б" теоремы, а также вытекающее из него следствие 2 можно рассматривать как некоторые относительные обоснования принципа коллекции.

СЛЕДСТВИЕ 2. Е с л и $IK + \{S_i\} + \Sigma$-Coll$\vdash S$ и $S_i, S \in \Sigma$, т о д л я л ю б ы х $\{t_i\}$ с у щ е с т в у ю т t и IK - в ывод S^t из аксиом для $[,]$ и $\sqcup$ и $\{S^{t_i}\}$, состоящий только из Δ_0-формул, т.е. вывод в $RB\Delta_0 + \{S_i^{t_i}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следствия 2 легко получается с помощью следующей теоремы при $Ax = \Sigma$, поскольку она гарантирует в этом случае существование LK-вывода, состоящего из Σ-формул т.е. вывода S в $RB\Sigma + \{S_i\} + \Sigma$-Coll.

Обобщенная теорема об устранении сечения [2]. Пусть Ax – множество секвенций исчисления LK, замкнутое относительно подстановок термов. Тогда сечения по формулам, не встречающимся в секвенциях из Ax, могут быть устранены из любого вывода в $LK + Ax$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы о релятивизации. Очевидно, не ограничивая общности, можно считать, что S получается из $\{S_i\}$ применением ровно одного правила вывода RB или S – аксиома RBC. Разберем наиболее характерные случаи.

1. $S \rightleftharpoons$ Coll. Положив $t \rightleftharpoons v\sqcup[v]$, получим вывод Coll^t:

$$\frac{\begin{matrix}\dots\\ \forall x < a\, \exists y < v\, A^v \to v < v\sqcup[v] \wedge \forall x < a\, \exists y < v\, A^{v\sqcup[v]}\end{matrix}}{\forall x < a\, \exists y < v\, A^v \to \exists b < v\sqcup[v]\, \forall x < a\, \exists y < b\, A^{v\sqcup[v]}}.$$

2. Подстановка: $\Gamma(\bar{x}) \to \Delta(\bar{x}) / \Gamma(\bar{s}) \to \Delta(\bar{s})$. Для любой релятивизации $\Gamma^v(\bar{x}) \to \Delta^{t(v,\bar{x})}(\bar{x})$ имеем требуемый вывод релятивизации секвенции $\Gamma(\bar{s}) \to \Delta(\bar{s})$ к $t(v,\bar{s})$:

$$\frac{\Gamma^v(\bar{x}) \to \Delta^{t(v,\bar{x})}(\bar{x})}{\Gamma^v(\bar{s}) \to \Delta^{t(v,\bar{s})}(\bar{s})}.$$

3. Сечение

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A \qquad A\Pi \to \Lambda}{\Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda}$$

преобразуется в вывод (считаем для простоты, что $RB\Delta_0 \vdash\, \to v \subseteq t_1(v)$):

$$\dfrac{\dfrac{\dots}{\to v \subseteq t_1} \qquad \dfrac{\Gamma^v \to \Delta^{t_1}, A^{t_1} \qquad \dfrac{A^v, \Pi^v \to \Lambda^{t_2(v)}}{A^{t_1}, \Pi^{t_1} \to \Lambda^{t_2(t_1)}}}{\Gamma^v, \Pi^{t_1} \to \Delta^{t_1}, \Lambda^{t_2(t_1)}}}{\dfrac{\Gamma^v, \Pi^v \to \Delta^{t_1}, \Lambda^{t_2(t_1)}}{\Gamma^v, \Pi^v \to \Delta^{t_1\sqcup t_2(t_1)}, \Lambda^{t_1\sqcup t_2(t_1)}}}$$

4. Правило $(\to \wedge)$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A \qquad \Gamma \to \Delta, B}{\Gamma \to \Delta,\ A \wedge B}$$

преобразуется в вывод

$$\frac{\dfrac{\Gamma^{v} \to \Delta^{t_1}, A^{t_1}}{\Gamma^{v} \to \Delta^{t_1 \sqcup t_2}, A^{t_1 \sqcup t_2}} \qquad \dfrac{\Gamma^{v} \to \Delta^{t_2}, B^{t_2}}{\Gamma^{v} \to \Delta^{t_1 \sqcup t_2}, B^{t_1 \sqcup t_2}}}{\Gamma^{v} \to \Delta^{t_1 \sqcup t_2}, (A \wedge B)^{t_1 \sqcup t_2}},$$

5. Правило $(\to\ \exists$ неогр.$)$ $\Gamma \to \Delta, A(s)/\Gamma \to \Delta, \exists x A(x)$ преобразуется в вывод

$$\frac{\dfrac{\Gamma^{v} \to \Delta^{t}, A^{t}(s)}{\Gamma^{v} \to \Delta^{t \sqcup [s]},\ s < t \sqcup [s] \wedge A^{t \sqcup [s]}(s)}}{\Gamma^{v} \to \Delta^{t \sqcup [s]}, \exists x < t \sqcup [s]\ A^{t \sqcup [s]}(x)}$$

6. Правило $(\exists$ неогр. $\to)$ $A(x), \Gamma \to \Delta/\exists x A(x), \Gamma \to \Delta$ преобразуется в вывод

$$\frac{\dfrac{A^{v}(x), \Gamma^{v} \to \Delta^{t(v,x)}}{x < v \wedge A^{v}(x), \Gamma^{v} \to \Delta^{T(v)}}}{\exists x < v A^{v}(x), \Gamma^{v} \to \Delta^{T(v)}},$$

где $T(v) \geq \sqcup_{x<v} t(v,x)$.

7. Правило $(\exists$ огр. $\to)$ $x < s \wedge A(x), \Gamma \to \Delta/\exists x < s\ A(x), \Gamma \to \Delta$ преобразуется в вывод

$$\frac{\dfrac{x < s \wedge A^{v}(x), \Gamma^{v} \to \Delta^{t(v,x)}}{x < s \wedge A^{v}(x), \Gamma^{v} \to \Delta^{T_1(v)}}}{\exists x < s \wedge A^{v}(x), \Gamma^{v} \to \Delta^{T_1(v)}},$$

где $T_1(v) = \bigsqcup_{x<s} t(v,x)$.

8. Правило $(\to\ \forall$ огр.$)$ $\Gamma \to \Delta, \neg x < s \vee A(x)/\Gamma \to \Delta, \forall x < s\ A(x)$ преобразуется в вывод

$$\frac{\dfrac{\Gamma^{v} \to \Delta^{t(v,x)}, \neg x<s \vee A^{t(v,x)}(x)}{\overline{\Gamma^{v} \to \Delta^{T_1(v)}, \neg x < s \vee A^{T_1(v)}(x)}}}{\Gamma^{v} \to \Delta^{T_1(v)}, \forall x < s\ A^{T_1(v)}(x)},$$

где $T_1(v) \rightleftharpoons \bigsqcup_{x<s} t(v,x)$.

9. Правило $(\neg \to)$ $\Gamma \to \Delta, A / \neg A, \Gamma \to \Delta$ преобразуется в вывод

$$\frac{\dfrac{\Gamma^{v} \to \Delta^{t}, A^{t} \qquad \overset{\cdots}{A^{t} \to A}}{\Gamma^{v} \to \Delta^{t}, A}}{\neg A, \Gamma^{v} \to \Delta^{t}}.$$

10. Правило $(\to \neg)$ $A, \Gamma \to \Delta / \Gamma \to \Delta, \neg A$ преобразуется: в случае, когда A не содержит доступных вхождений неограниченных кванторов $\exists$, в вывод $A, \Gamma^{v} \to \Delta^{t} / \Gamma^{v} \to \Delta^{t}, \neg A$, и в случае, когда Δ пусто, в вывод

$$\frac{\dfrac{\begin{matrix}(\mathrm{Coll}) \\ \cdots \\ A \to \exists u A^{u}\end{matrix} \qquad \dfrac{\overline{\overline{A^{v}, \Gamma^{v} \to}}}{\begin{matrix}A^{u}, \Gamma^{v} \to \\ \hline \exists u A^{u}, \Gamma^{v} \to\end{matrix}}}{A, \Gamma^{v} \to}}{\Gamma^{v} \to \neg A}.$$

Заметим, что этот последний подслучай является единственным местом в доказательстве, где используется принцип коллекции и где могли бы появиться не- Δ_0-формулы.

Литература

1. BARWISE J. Admissible sets and structures.- Berlin: Springer, 1975.

2. SAZONOV V.Yu. A logical approach to the problem "P=NP?".- In: MFCS'80, Lecture Notes in Computer Science, 1980, N 88, p.562-575.

3. SAZONOV V.Yu. Polynomial computability and recursivity in finite domains.-Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik (EIK), 1980, Bd 16, N 7, S.319-323.

4. САЗОНОВ В.Ю. Проблема перебора с точки зрения логики. - В кн.: Логика и основания математики, Вильнюс, 1982, с.77-80.
5. ТАКЕУТИ Г. Теория доказательств. -М.: Мир, 1978.

Поступила в ред.-изд.отд.
12 февраля 1985 года