ЛОГИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРОБЛЕМЫ МОЗ
(Вычислительные системы)
1985 год Выпуск 107

УДК 53.02+519.7+519.812.2

ЧИСЛОВОЕ, АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ И КОНСТРУКТИВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОДНОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

Е.Е. Витяев

Введение

В теории физических структур на основании принципа феноменологической симметрии получены числовые представления возможных фундаментальных законов [1-4]. Показано, что фундаментальные физические законы (кроме законов статистической физики и физики элементарных частиц), а также входящие в них величины могут быть выведены из этого принципа.

В теории измерений [5] изучается логическое представление величин и законов в виде эмпирических алгебраических систем, удовлетворяющих некоторым системам аксиом. Числовые представления являются гомоморфными образами эмпирических систем в числовые системы (например, в поле вещественных чисел).

В работе на примере физической структуры ранга (2,2) (законов вида $\chi(y) = R(x) \cdot S(z)$, законы Ньютона, Ома, Гука и т.д.) показано, что эти два подхода к представлению величин и законов связаны между собой. В §1 доказано (теорема 1), что система аксиом аддитивных соединительных структур, описывающая в теории измерений законы вида $\chi(y) = \varphi(x) \cdot \Psi(z)$, вытекает из требований предъявляемых к физическим структурам ранга (2,2).

Система аксиом аддитивной соединительной структуры сильно зависит от получаемого из нее числового представления - она должна обеспечить вложимость любой аддитивной соединительной структуры в поле вещественных чисел (см. теорему в §1). Поэтому в ней есть аксиомы, отражающие не эмпирическое содержание законов $\chi(y) = \varphi(x) \cdot \Psi(z)$, а свойства вещественных чисел (см., например, аксиому Архимеда). В связи с этим выясняется, какие аксиомы являются основными для законов $\chi(y) = \varphi(x) \cdot \psi(z)$. В §I доказано, что условие замыкания Томсена, входящее в систему аксиом аддитивных соединительных структур, следует из принципа феноменологической симметрии ранга (2,2). Можно заметить, что основу законов $\chi(y) = \varphi(x) \cdot \psi(z)$ составляет схема соизмерения и взаимосвязи величин, удовлетворяющая условию замыкания Томсена. В §2 на основе аксиом отношения эквивалентности, аксиом неограниченной разрешимости и условия замыкания Томсена эта схема формализуется. Таким образом, схема соизмерения и взаимосвязи величин описывается тремя из соответствующих шести аксиом аддитивных соединительных структур. Однако нельзя утверждать, что упомянутые три аксиомы являются следствием системы аксиом аддитивных соединительных структур, так как одна из трех аксиом - аксиома неограниченной разрешимости - сильнее аксиомы ограниченной разрешимости, входящей в систему аксиом аддитивных соединительных структур. Усиление аксиомы разрешимости потребовалось для представления схемы соизмерения и взаимосвязи величин с помощью абелевых групп. Это представление названо алгебраическим представлением законов $\chi(y) = \varphi(x) \cdot \psi(z)$. В нем величины представляются абелевыми группами, изоморфными между собой, а закономерная связь - групповой операцией. Для полученного алгебраического представления в общем случае нельзя получить числовое представление в поле вещественных чисел. Для конечно-порожденных абелевых групп можно получить конструктивное представление в виде прямой суммы бесконечных циклических групп целых чисел и примарных циклических групп вычетов целых чисел. Вид этого представления аналогичен виду исходного закона $y = x \cdot z$, только вместо вещественных чисел и умножения используются соответственно n-ки целых чисел и групповая операция.

§I. Соотношение между физической структурой ранга (2,2) и аддитивной соединительной структурой

I. Кратко сформулируем подход к анализу законов, развиваемый в теории физических структур. Пусть даны два множества $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ и вещественнозначная функция (измерительная процедура)

$$a: \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to \mathrm{Re}, \quad a(i,\alpha) = a_{i\alpha} \in \mathrm{Re}, \ i \in \mathfrak{M}, \ \alpha \in \mathfrak{N}.$$

На множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ задана физическая структура ранга (m,n) [2], если существует аналитическая функция Φ от $m \cdot n$ переменных, определенная в области $E \subset \mathrm{Re}^{m \cdot n}$ такая, что

$$\forall i_1, i_2, \ldots, i_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\, \Phi(a_{i_1\alpha_1}, a_{i_1\alpha_2}, \ldots, a_{i_m\alpha_n}) = 0 \qquad (1)$$

для $i_1, i_2, \ldots, i_m \in \mathscr{M}$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathscr{N}$. Функция Φ на E должна удовлетворять также некоторым другим условиям [2]. Требование (I) считается главным и называется принципом феноменологической симметрии [I]. Этот принцип выражает равноправие объектов из $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ по отношению к функциональной зависимости (I). В теории физических структур доказывается [2], что физические структуры рангов $m-n \geq 2$ (кроме случая $m=4$, $n=2$) не существуют. Для рангов $m-n \leq 1$ и ранга (4,2) найдены выражения для функций Φ и a. Эти выражения определяют вид фундаментального закона соответствующего ранга.

2. Рассмотрим подробнее физическую структуру ранга (2,2) [4]. Для нее принцип феноменологической симметрии имеет вид

$$\forall i, j, \alpha, \beta (\Phi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{j\alpha}, a_{j\beta}) = 0), \qquad (2)$$

где $i, j \in \mathscr{M}$, $\alpha, \beta \in \mathscr{N}$. В [4] доказано, что существуют монотонные функции R, S и строго монотонная функция χ такие, что

$$a_{i\alpha} = \chi(R(a_{i\alpha_0}) \cdot S(a_{i_0\alpha})),$$

$$\Phi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{j\alpha}, a_{j\beta}) = \chi^{-1}(a_{i\alpha}) \cdot \chi^{-1}(a_{j\beta}) -$$

$$- \chi^{-1}(a_{i\beta})\, \chi^{-1}(a_{j\alpha}) = 0 .$$

Если обозначить $y_{i\alpha} \doteq \chi^{-1}(a_{i\alpha})$, $x_i \doteq R(a_{i\alpha_0})$, $z_\alpha \doteq S(a_{i_0\alpha})$, то получим обычное выражение закона $y_{i\alpha} = x_i \cdot z_\alpha$ (законы Ньютона, Ома, Гука и др.). Если вместо функции χ подставить строго монотонную функцию $\chi'\ln$, то получим другое выражение для физической структуры ранга (2,2) [3]:

$$a_i = \chi'(R'(a_{i\alpha_0}) + S'(a_{i_0\alpha})), \qquad (3)$$

$$\Phi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{j\alpha}, a_{j\beta}) = (\chi')^{-1}(a_{i\alpha}) - (\chi')^{-1}(a_{i\beta}) -$$

$$- (\chi')^{-1}(a_{j\alpha}) + (\chi')^{-1}(a_{j\beta}) = 0. \qquad (4)$$

3. Покажем, что физическая структура ранга (2,2) может быть описана системой аксиом аддитивных соединительных структур теории

измерений. Модель $\langle \mathfrak{M}\times\mathfrak{N};\ \le\rangle$ называется аддитивной соединительной структурой [5], если $\mathfrak{M}\neq\emptyset$, $\mathfrak{N}\neq\emptyset$, $a\sim b \doteq a\le b\ \&\ b\le a$ и для любых $i,j,k,\ldots\in\mathfrak{M}$; $\alpha,\beta,\gamma,\ldots\in\mathfrak{N}$ выполнены следующие аксиомы:

1) $\le$ – слабый линейный порядок,

2*) $\exists i(i,\alpha)\le(i,\beta)\to\forall j(j,\alpha)\le(j,\beta)$,

3) $(j,\alpha)\sim(i,\beta)\ \&\ (k,\beta)\sim(j,\gamma)\to(k,\alpha)\sim(i,\gamma)$,

4*) $(i,\alpha)\le(j,\beta)\le(i,\gamma)\to\exists\varepsilon(i,\varepsilon)\sim(j,\beta)$,

5*) $\exists i,j,\alpha(i,\alpha)\not\sim(j,\alpha)$,

6) если $\exists i\ (i,\alpha)\not\sim(i,\beta)$ и определена ограниченная последовательность $i_1,i_2,\ldots\in\mathfrak{M}$, $(i_k,\alpha)\le(j,\gamma)$, $k=1,2,\ldots$, такая, что $(i_1,\alpha)\sim(i_2,\beta),(i_2,\alpha)\sim(i_3,\beta),(i_3,\alpha)\sim(i_4,\beta)\ldots$, то она конечна.

Аксиомы, отмеченные звездочкой, сформулированы относительно элементов множества $\mathfrak{M}$, аналогичные аксиомы должны выполняться относительно элементов множества $\mathfrak{N}$. Вторая аксиома позволяет определить отношения порядка на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Третья аксиома, называемая условием замыкания Томсена, соответствует принципу феноменологической симметрии и будет обсуждена ниже. Четвертая аксиома ограниченной разрешимости гарантирует существование необходимых для построения элементов. Пятая аксиома гарантирует невырожденность модели. Шестая аксиома является вариантом аксиомы Архимеда.

Числовые представления аддитивных соединительных структур определяет следующая

ТЕОРЕМА [5,с.257]. Если модель $\langle\mathfrak{M}\times\mathfrak{N};\le\rangle$ является аддитивной соединительной структурой, то существуют функции $\varphi:\ \mathfrak{M}\to\mathrm{Re}$, $\psi:\mathfrak{N}\to\mathrm{Re}$, удовлетворяющие для любых $i,j\in\mathfrak{M}$; $\alpha,\beta\in\mathfrak{N}$ соотношению

$$(i,\alpha)\le(j,\beta)\to\varphi(i)+\psi(\alpha)\le\varphi(j)+\psi(\beta). \tag{5}$$

Если φ' и ψ' – другие функции, удовлетворяющие (5), то существуют $\varepsilon>0$, $x_1,x_2\in\mathrm{Re}$ такие, что $\varphi'=\varepsilon\varphi+x_1$, $\psi'=\varepsilon\psi+x_2$.

Пусть в модели $\langle\mathfrak{M}\times\mathfrak{N},\le\rangle$ отношение порядка задается соотношением

$$(i,\alpha)\le(j,\beta)\leftrightarrow a_{i\alpha}\le a_{j\beta}. \tag{6}$$

ТЕОРЕМА I. Пусть для модели $\langle\mathfrak{M}\times\mathfrak{N};\le\rangle$ выполнено соотношение (6) и на множествах $\mathfrak{M},\mathfrak{N}$ задана физическая структура ранга (2,2). Тогда эта модель является аддитивной соединительной структурой и для функций R', S' из (3) существуют $\varepsilon > 0$, $x_1, x_2 \in Re$ такие, что $R'(a(i,\alpha_0)) = \varepsilon\varphi(i) + x_1$, $S'(a(i_0,\alpha)) = \varepsilon\phi + x_2$ для φ и ϕ из (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аксиома I следует из (6). Поскольку функция χ' в (3) строго монотонна, то

$$a_{i\alpha} \le a_{j\beta} \Leftrightarrow R'(a_{i\alpha_0}) + S'(a_{i_0\alpha}) \le R'(a_{j\alpha_0}) + S'(a_{i_0\beta}). \quad (7)$$

Нетрудно проверить, что аксиомы 2*, 3 и 6 следуют из (6),(7). Аксиомы 5* следуют из требования Б (см. [4]) на физическую структуру ранга (2,2): множество всех точек $\langle a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{j\alpha}, a_{j\beta} \rangle \in Re^4$, $i,j \in \mathfrak{M}$, $\alpha,\beta \in \mathfrak{N}$ образует открытое относительно M подмножество M (M – множество наборов в Re^4, удовлетворяющих принципу феноменологической симметрии (2)). Для доказательства аксиом 4* воспользуемся условием Г (см. [4]): для любых x, y, удовлетворяющих уравнению $\Phi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, x, y) = 0$, $i \in \mathfrak{M}$; $\alpha\ \beta \in \mathfrak{N}$, существует $j \in \mathfrak{M}$ такое, что $a_{j\alpha} = x$, $a_{j\beta} = y$; а также для любых x, y, удовлетворяющих уравнению $\Phi(a_{i\alpha}, x, a_{j\alpha}, y) = 0$, $i,j \in \mathfrak{M}$; $\alpha \in \mathfrak{N}$, существует элемент $\beta \in \mathfrak{N}$ такой, что $a_{i\beta} = x$, $a_{j\beta} = y$. Пусть выполнено условие аксиомы 4*, $(i,\alpha) \le (j,\beta) \le (i,\gamma)$ для элементов множества $\mathfrak{M}$. Возьмем элементы $a_{i\beta}, a_{j\beta}$ и значение $x = a_{j\beta}$. Из (4) следует, что функция Φ однозначно разрешима относительно любого своего аргумента, поэтому существует единственное значение y такое, что $\Phi(a_{i\beta}, x, a_{j\beta}, y) = 0$. Тогда, по условию Г, существует $\varepsilon \in \mathfrak{N}$ такое, что $x = a_{i\varepsilon}$, $y = a_{j\varepsilon}$. Это дает нам требуемый элемент (i,ε), для которого $(i,\varepsilon) \sim (j,\beta)$ в силу равенства $a_{i\varepsilon} = x = a_{j\beta}$. Аналогично доказывается аксиома 4* для элементов множества $\mathfrak{N}$. Таким образом, модель $\langle \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}, \le \rangle$ является аддитивной соединительной структурой. Тогда, в силу теоремы из [5], существуют отображения φ и ϕ, удовлетворяющие (5). В силу (6),(7), отображения $R'(a(i,\alpha_0)) : \mathfrak{M} \to Re$, $\alpha_0 \in \mathfrak{N}$, и $S'(a(i_0,\alpha)) : \mathfrak{N} \to Re$, $i_0 \in \mathfrak{M}$, также удовлетворяют (5). Отсюда, в силу теоремы из [5], существуют $\varepsilon > 0$, $x_1, x_2 \in Re$ такие, что $R'(a(i,\alpha_0)) = \varepsilon\varphi(i) + x_1$, $S'(a(i_0,\alpha)) = \varepsilon\phi(\alpha) + x_2$ □.

4. Проанализируем глубже соотношение между этими двумя представлениями. Из (4) следует, что функция Φ разрешима относительно первого аргумента и, следовательно, существует функция f

$$\forall i, j, \alpha, \beta (a_{i\alpha} = f(a_{i\beta}, a_{j\alpha}, a_{j\beta})). \tag{8}$$

Кроме того, как видно из (4), функция f удовлетворяет условию

$$\forall i, j, \alpha, \beta (f(a_{i\beta}, a_{j\alpha}, a_{j\beta}) = f(a_{j\alpha}, a_{i\beta}, a_{j\beta})). \tag{9}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ I. Если выполнены соотношения (8),(9) для некоторой функции f и соотношение (6), связывающее функцию f с моделью $\langle \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}, \le \rangle$, то на этой модели выполнена аксиома 3 (условие Томсена).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(j,\alpha) \sim (i,\beta)$ и $(k,\beta) \sim (j,\gamma)$ (рис.I). Тогда $a_{j\alpha} = a_{i\beta}$ и $a_{k\beta} = a_{j\gamma}$. Подставив в (8) γ вместо α, получим $a_{i\gamma} = f(a_{i\beta}, a_{j\gamma}, a_{j\beta})$. Из равенств $a_{j\alpha} = a_{i\beta}$, $a_{k\beta} = a_{j\gamma}$ следует, что $f(a_{i\beta}, a_{j\gamma}, a_{j\beta}) = f(a_{j\alpha}, a_{k\beta}, a_{j\beta})$. Из (9) следует $f(a_{j\alpha}, a_{k\beta}, a_{j\beta}) = f(a_{k\beta}, a_{j\alpha}, a_{j\beta}) = a_{k\alpha}$. Отсюда $a_{i\gamma} = a_{k\alpha}$ и $(i,\gamma) \sim (k,\alpha)$ □.

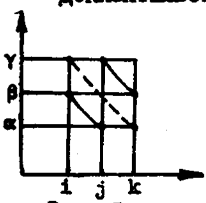

Рис. I

5. Таким образом, принцип феноменологической симметрии (2), усиленный свойствами (8), (9), дает нам условие замыкания Томсена. Этот принцип,а также условие Томсена являются основными характеристиками законов вида $y = x \cdot z$. Если мы возьмем произвольные два элемента $i, j \in \mathfrak{M}$ и элемент $\alpha \in \mathfrak{N}$ и подберем элемент $\beta \in \mathfrak{N}$ такой, что $a_{i\beta} \sim a_{j\alpha}$, то различие между элементами i и j при заданном α, определяемое значениями $a_{i\alpha}$, $a_{j\alpha}$, будет равно различию между α и β при заданном i, определяемому значениями $a_{i\alpha}, a_{i\beta}$ (рис.2). Так, благодаря измерительной процедуре a, мы можем соизмерять объекты двух разных множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Поэтому сам факт существования эксперимента, позволяющего произвольным двум объектам $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$ сопоставлять некоторое число $a(i,\alpha) = a_{i\alpha}$, позволяет соизмерять объекты этих двух множеств. Процедуру соизмерения можно продолжать (см.рис.2),что,в принципе, позволяет ввести некоторую величину на множестве $\mathfrak{M}$ и некоторую величину на множестве $\mathfrak{N}$. Значение $a_{i\alpha}$ может тогда быть некоторой функцией этих двух величин и выражать некоторый закон.Вид закона и свойства величин зависят от взаимосвязи одних процедур

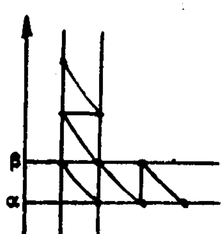

Рис. 2

соизмерения с другими при различном выборе $i \in \mathfrak{M}$, $\alpha \in \mathfrak{N}$. Эта взаимосвязь и определяется принципом феноменологической симметрии и условием Томсена. В законах, получающихся такими процедурами, функциональная зависимость и входящие в нее величины неразрывно связаны и определяют друг друга. Можно показать, что многие фундаментальные физические законы обладают этим свойством [5,6].

§2. Алгебраическое и конструктивное представление структур ранга (2,2)

I. Получим алгебраическое представление процедур соизмерения и связывания величин, лежащих в основании фундаментальных законов ранга (2,2).

Рассмотрим модель $\langle \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}; \sim \rangle$, $\mathfrak{M} \neq \emptyset$, $\mathfrak{N} \neq \emptyset$, удовлетворяющую следующей аксиоме.

Аксиома I. $\sim$ – отношение эквивалентности.

Определим на $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ отношения эквивалентности

$$i \sim j \rightleftharpoons \forall \alpha (i,\alpha) \sim (j,\alpha); \quad \alpha \sim \beta \rightleftharpoons \forall i (i,\alpha) \sim (i,\beta). \tag{10}$$

Эти отношения позволяют определить отображение

$$f : \mathfrak{M}/\sim \times \mathfrak{N}/\sim \to \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}/\sim, \; f([i],[\alpha]) = [i,\alpha], \tag{11}$$

где $[i]$, $[\alpha]$, $[i,\alpha]$ – классы эквивалентных элементов в $\mathfrak{M}/\sim$, $\mathfrak{N}/\sim$ и $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}/\sim$. Определение корректно, так как, в силу (10), из $i' \in [i]$, $\alpha' \in [\alpha]$ следует $(i',\alpha') \sim (i,\alpha') \sim (i,\alpha)$. Отношения эквивалентности будут согласованы, если выполнены следующие аксиомы подстановочности [5]:

Аксиомы II.

$$(i,\alpha) \sim (i,\beta) \Leftrightarrow (j,\alpha) \sim (j,\beta),$$

$$(i,\alpha) \sim (j,\alpha) \Leftrightarrow (i,\beta) \sim (j,\beta).$$

ЛЕММА I. Из аксиом I, II следует, что

а) отображения $f_{\alpha_0} : \mathfrak{M}/\sim \to \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}/\sim$, $f_{\alpha_0}([i]) = [i,\alpha_0]$, $\alpha_0 \in \mathfrak{N}$ взаимно-однозначны;

б) отображения $f_{i_0} : \mathfrak{N}/\sim \to \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}/\sim$, $f_{i_0}([\alpha]) = [i_0,\alpha]$, $i_0 \in \mathfrak{M}$ взаимно-однозначны;

в) в отображении f (II) классы $[i]$, $[i,\alpha]$ однозначно определяют класс $[\alpha]$, а классы $[\alpha]$, $[i,\alpha]$ – класс $[i]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображения $f_{\alpha_0}, f_{i_0}, \alpha_0 \in \mathcal{N}, i_0 \in \mathcal{M}$, взаимно-однозначны, так как, в силу аксиом II, из $(i,\alpha_0) \sim (i',\alpha_0)$ следует $\forall\alpha (i,\alpha) \sim (i',\alpha)$ и $[i] = [i']$, а из $(i_0,\alpha) \sim (i_0,\alpha')$ следует $\forall i (i,\alpha) \sim (i,\alpha')$ и $[\alpha] = [\alpha']$. Если $f([i],[\alpha']) = [i,\alpha]$ и $f([i],[\alpha]) = [i,\alpha]$, то $(i,\alpha') \sim (i,\alpha)$ и по первой из аксиом II $[\alpha'] = [\alpha]$. Единственность класса $[i]$ доказывается аналогично $\square$.

Так как f_{α_0} и f_{i_0} – взаимно-однозначны, то существуют обратные отображения $f^{-1}_{\alpha_0}$, $f^{-1}_{i_0}$, определенные соответственно на $\mathcal{M}_{\alpha_0} \rightleftharpoons f_{\alpha_0}(\mathcal{M}/\sim)$ и $\mathcal{N}_{i_0} = f_{i_0}(\mathcal{N}/\sim)$. Определим на множестве $\mathcal{M}_{\alpha_0} \times \mathcal{N}_{i_0}$ операцию

$$[i,\alpha_0]\cdot[i_0,\alpha] \rightleftharpoons f(f^{-1}_{\alpha_0}([i,\alpha_0]), f^{-1}_{i_0}([i_0,\alpha])) = [i,\alpha]. \qquad (12)$$

Если множества $\mathcal{M}_{\alpha_0}, \mathcal{N}_{i_0}$ совпадают со всем множеством $\mathcal{M}\times\mathcal{N}/\sim$ и операция (12) обратима справа и слева, то мы получим квазигруппу. Эти требования выполняются, если имеет место следующая

А к с и о м а III. Неограниченная разрешимость: для любых трех из четырех элементов $i,j \in \mathcal{M}$; $\alpha,\beta \in \mathcal{N}$ четвертый можно подобрать так, что $(i,\alpha) \sim (j,\beta)$.

ЛЕММА 2. И з а к с и о м I–III с л е д у е т, ч т о о п е р а ц и я (12) о п р е д е л я е т н а $\mathcal{M}\times\mathcal{N}/\sim$ к в а з и г р у п п у.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства леммы надо показать 1) $f_{\alpha_0}(\mathcal{M}/\sim) = f_{i_0}(\mathcal{N}/\sim) = \mathcal{M}\times\mathcal{N}/\sim$ для любых $i_0 \in \mathcal{M}$, $\alpha_0 \in \mathcal{N}$. 2) для любых классов $[i,\alpha],[j]$ существует единственный класс $[\beta]$ такой, что $f([j],[\beta]) = [i,\alpha]$, а для любых классов $[i,\alpha],[\beta]$ существует единственный класс $[j]$ такой, что $f([j],[\beta]) = [i,\alpha]$.

1. Возьмем $[i,\alpha] \in \mathcal{M}\times\mathcal{N}/\sim$. Из аксиомы III следует, что для любых $i_0 \in \mathcal{M}$, $\alpha_0 \in \mathcal{N}$ существуют $i',\alpha',(i',\alpha_0) \sim (i,\alpha) \sim (i_0,\alpha')$. Отсюда $f_{\alpha_0}([i']) = f_{i_0}([\alpha']) = [i,\alpha]$.

2. Для любых $[j]$, $[i,\alpha]$ существует $\beta,(i,\alpha) \sim (j,\beta)$, что дает $f([j],[\beta]) = [i,\alpha]$. Единственность класса $[\beta]$ следует из леммы 1. Аналогично доказывается существование класса $[j]$ для классов $[i,\alpha],[\beta]$ $\square$.

Обозначим полученную квазигруппу через

$$\langle Q;\cdot\rangle, \quad Q \rightleftharpoons \mathcal{M}\times\mathcal{N}/\sim, \ \text{"}\cdot\text{"} - \text{операция (12)}, \qquad (13)$$

Эта квазигруппа является лупой с единицей $e \rightleftharpoons [i_0, \alpha_0]$. Действительно, если q – некоторый элемент из Q, то, по аксиоме III, существвуют $i\in\mathcal{M}$, $\alpha\in\mathcal{N}$, $[i,\alpha_0]=[i_0,\alpha]=q$. Тогда $[i,\alpha_0]\cdot[i_0,\alpha_0]=[i,\alpha_0]$, $[i_0,\alpha_0]\cdot[i_0,\alpha]=[i_0,\alpha]$ и, следовательно, $eq=qe=q$.

2. Нетрудно видеть (см.рис.2), что аксиомы I–III необходимы для построения процедур соизмерения величин из $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Из аксиом I–III следует, что взаимосвязь величин $\mathcal{M}/\sim$ и $\mathcal{N}/\sim$, осуществляемая отображением (11), может быть представлена лупой с операцией (12). Более точно вид зависимости между величинами определяется условием Томсена.

ЛЕММА 3. Из условия Томсена вытекают аксиомы подстановочности II.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(i,\alpha)\sim(i,\beta)$ и дано произвольное $j\in\mathcal{M}$ (рис.3). Надо доказать, что $(j,\alpha)\sim(j,\beta)$. По аксиоме неограниченной разрешимости, для (i,α) и j существует γ, $(i,\alpha)\sim(j,\gamma)$. Тогда $(j,\gamma)\sim(i,\beta)$. Подставляя в условие Томсена i вместо j, j вместо i и k, а α,β,γ вместо α,γ,β, получим $(j,\alpha)\sim(j,\beta)$. Вторая из аксиом подстановочности доказывается аналогично □.

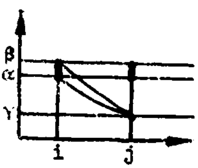

Рис. 3

Определим, как будет формулироваться условие Томсена в лупе $\langle Q;\cdot\rangle$. Представим классы $[j,\alpha],[i,\beta],[k,\beta],[j,\gamma],[k,\alpha],[i,\gamma]$ как результат применения операции к некоторым другим классам $[j,\alpha_0]\cdot[i_0,\alpha]=[j,\alpha]$, $[i,\alpha_0]\cdot[i_0,\beta]=[i,\beta]$ и т.д. Если $[j,\alpha]=[i,\beta]$ и $[k,\beta]=[j,\gamma]$, то $(j,\alpha)\sim(i,\beta)$ и $(k,\beta)\sim(j,\gamma)$ и, по условию Томсена, $(k,\alpha)\sim(i,\gamma)$ и $[k,\alpha]=[i,\gamma]$. Так как $i,j,k,\alpha,\beta,\gamma$ – произвольные элементы множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, то классы $[j,\alpha_0],[i_0,\alpha],[i,\alpha_0],[i_0,\beta]$ и т.д. – произвольные элементы Q. Поэтому условие Томсена в $\langle Q;\cdot\rangle$ будет иметь вид следующей аксиомы.

Аксиома IV. Из $p_1\cdot q_2=p_2\cdot q_1$ и $p_3\cdot q_1=p_1\cdot q_3$ следует $p_3\cdot q_2=p_2\cdot q_3$.

ЛЕММА 4 [7]. Модель $\langle\mathcal{M}\times\mathcal{N};\sim\rangle$, $\mathcal{M}\neq\emptyset$, $\mathcal{N}\neq\emptyset$, удовлетворяющая аксиомам I, III и условию Томсена, определяет абелеву группу с операцией (12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 3 следует, что на модели выполнены аксиомы II. Из леммы 2 следует, что на модели определима лупа (13). На лупе выполнено условие Томсена (аксиома IV). Докажем, что лупа коммутативна. Подставим в аксиому IV единичный элемент e вместо элемента p_1. Получим, что если $q_2=p_2\cdot q_1$ и $p_3\cdot q_1=q_3$, то $p_3\cdot q_2=p_2\cdot q_3$ или

$$p_3\cdot(p_2,q_1) = p_2\cdot(p_3,q_1). \tag{14}$$

Подставив $q_1 = e$, получим $p_3\cdot p_2 = p_2\cdot p_3$. Докажем ассоциативность. Из (I4) и коммутативности следует $p_2\cdot(q_1\cdot p_3)=p_2\cdot(p_3\cdot q_1)=p_3\cdot(p_2\cdot q_1)=(p_2\cdot q_1)\cdot p_3$. Обратным элементом к элементу $[i,\alpha_0]$ является элемент $[i_0,\alpha']$, в котором α' определяется по разрешимости из эквивалентности $(i,\alpha')\sim(i_0,\alpha_0)$. Тогда $[i,\alpha_0]\,[i_0,\alpha'] = [i,\alpha'] = [i_0,\alpha_0]$ □.

По лемме 2, $f_{\alpha_0}(\mathcal{M}/\sim) = f_{i_0}(\mathcal{N}/\sim)=\mathcal{M}\times\mathcal{N}/\sim$. Тогда операцию (I2) можно преобразованиями $f_{\alpha_0}^{-1}$ и $f_{\alpha_0}^{-1}$ перевести на множества $\mathcal{M}/\sim$, $\mathcal{N}/\sim$. Получим операции

$$\begin{aligned} &[i]\cdot[j] \rightleftharpoons f_{\alpha_0}^{-1}(f_{\alpha_0}([i])\cdot f_{\alpha_0}([j])) = f_{\alpha_0}^{-1}([i,\alpha_0]\cdot[j,\alpha_0]),\\ &[\alpha]\cdot[\beta] \rightleftharpoons f_{i_0}^{-1}(f_{i_0}([\alpha])\cdot f_{i_0}([\beta])) = f_{i_0}^{-1}([i_0,\alpha]\cdot[i_0,\beta]). \end{aligned} \tag{15}$$

Эти операции на $\mathcal{M}/\sim$ и $\mathcal{N}/\sim$ определяют абелевы группы, изоморфные абелевой группе (I3). Функциональная зависимость f (II) определяется операцией (I2) этой абелевой группы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Алгебраическим представлением законов ранга (2,2) будем называть модель $\langle\mathcal{M}\times\mathcal{N};\sim\rangle$, удовлетворяющую аксиомам I,Ш и условию Томсена. Величинами будем называть абелевы группы $\langle\mathcal{M}/\sim;\cdot\rangle$, $\langle\mathcal{N}/\sim;\cdot\rangle$, $\langle\mathcal{M}\times\mathcal{N}/\sim;\cdot\rangle$ с операциями (I5) и (I2), изоморфные между собой. Закономерной связью между величинами будем называть операцию (I2).

3. Построим числовое представление полученного алгебраического представления. Числовое представление в действительных числах (вложение в числовую систему $\mathcal{R} = \langle Re^k,\Omega\rangle$) налагает определенные ограничения на алгебраические системы (требуются аксиомы линейной упорядоченности, Архимеда и др.), которые не всегда оправданы эмпирически. Поэтому получим конструктивное представление, используя натуральные числа. Оно не предъявляет дополнительных требований к алгебраическим системам и, кроме того, является эффективным, что важно для машинной обработки. Получим конструктивное представление для конечно-порожденных абелевых групп. Для произвольных абелевых групп вопрос о построении конструктивных числовых представлений остается открытым.

ТЕОРЕМА 2. Модель $\langle\mathcal{M}\times\mathcal{N};\sim\rangle$, удовлетворяющую аксиомам I,Ш и условию Томсе -

на, конечно-порожденную относительно операции (I2), можно отобразить в прямую сумму бесконечных циклических групп целых чисел и примарных циклических групп вычетов целых чисел $Z = Z_1 \oplus \ldots \oplus Z_a \oplus Z_1^{p_1} \oplus \ldots \oplus Z_1^{p_1}$ так, что величины, представленные абелевыми группами $\langle \mathfrak{M}/\sim;\cdot\rangle$, $\langle \mathfrak{N}/\sim;\cdot\rangle$, $\langle \mathfrak{M}\times\mathfrak{N}/\sim;\cdot\rangle$, будут изоморфны Z, а закономерная связь, представленная операцией (I2), перейдет в операцию сложения в Z. Точнее, будут существовать изоморфизмы $\varphi: \mathfrak{M}/\sim \to Z$; $\psi: \mathfrak{N}/\sim \to Z$; $\chi: \mathfrak{M}\times\mathfrak{N}/\sim \to Z$, связанные соотношением

$$\chi([i,\alpha]) = \varphi([i]) + \psi([\alpha]), \qquad (16)$$

где "+" - операция в Z.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 4 и условию теоремы, в модели $\langle \mathfrak{M}\times\mathfrak{N};\sim\rangle$ определима конечно-порожденная абелева группа (I3). Известно [8], что такие абелевы группы изоморфны прямой сумме бесконечных циклических групп целых чисел и примарных групп вычетов целых чисел. Пусть $\chi: \langle \mathfrak{M}\times\mathfrak{N}/\sim;\cdot\rangle \to Z$ - такой изоморфизм, где "$\cdot$" - операция (I2). Тогда

$$\chi([i,\alpha]) = \chi([i,\alpha_0]\cdot[i_0,\alpha]) = \chi([i,\alpha_0]) + \chi([i_0,\alpha]) =$$

$$= \chi(f_{\alpha_0}([i])) + \chi(f_{i_0}([\alpha])),$$

где $i_0 \in \mathfrak{M}$, $\alpha_0 \in \mathfrak{N}$, "+" - сложение в Z. □

4. Алгебраическое представление закона ранга (2,2) в разных областях знания может дополняться разными аксиомами. В физике, поскольку используемые там физические величины линейно упорядочены и архимедовы, могут добавляться аксиомы типа I-6*. В других областях таких, как экономика, социология, психология и т.д., должны использоваться не только линейные порядки и аксиома Архимеда, но и более сложные порядки (частичные, деревья, структуры и т.д.) и неархимедовы аксиомы.

Числовым представлением законов ранга (2,2) в этих областях может служить упомянутое конструктивное числовое представление или какое-либо другое числовое представление алгебраического представления, расширенного соответствующими аксиомами.

Л и т е р а т у р а

1. КУЛАКОВ Ю.И. Элементы теории физических структур.-Новосибирск, 1968. - 215 с. (НГУ).

2. МИХАЙЛИЧЕНКО Г.Г. Решение функциональных уравнений в теории физических структур. -ДАН, 1972, т.206, №5, с.1056-1058.

3. КУЛАКОВ Ю.И. О теории физических структур.-В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций.15. Л., 1983, с.103-151. (Зап.сем. ЛОМИ, т.127).

4. КУЛАКОВ Ю.И. Математическая формулировка теории физических структур. -Сиб.мат.ж., 1971, т.XII, №5, с.1142-1145.

5. KRAUTZ D.H., LUCE R.D., SUPPES P., TVERSKY A. Foundations of mesurement.V.1.-New York and London: Academic press,1971.-576p.

6. ВИТЯЕВ Е.Е. Закономерности в языках эмпирических систем и законы классической физики. -В кн.: Эмпирическое предсказание и распознавание образов (Вычислительные системы, вып. 79). Новосибирск, 1979, с.45-56.

7. БЕЛОУСОВ В.Д. Алгебраические сети и квазигруппы.-Кишинёв, 1971. - 165 с.

8. КАРГАПОЛОВ М.И., МЕРЗЛЯКОВ Ю.И. Основы теории групп. -М.: Наука, 1982. - 182 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
31 января 1985 года