ЛОГИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРОБЛЕМЫ МОЗ
(Вычислительные системы)
1985 год Выпуск 107

УДК 681.3:512.8

МОДЕЛИ ДАННЫХ И ЯЗЫКИ ИХ ОПИСАНИЙ

С.С. Гончаров

Одной из важных проблем в современной прикладной математике, ориентированной на использование вычислительных средств, является проблема представления и обработки данных. Первый этап изучения, связанный с их использованием лишь в качестве явных вычислителей числовых функций, активно разрабатывается в последние годы. Разработаны быстро работающие алгоритмы и методы их обоснования; методы приближений (например, интервальный анализ [13]), которые успешно применяются и позволяют анализировать возникающие в этом разделе проблемы, оставаясь в рамках используемого формализма. Понятие конструктивного вещественного числа [12] позволяет изучать вычислительные эффекты различных математических утверждений [12], а также применять его для решения конкретных как математических, так и прикладных задач [10].

Следующий этап развития вычислительной техники [14] связан с проблемой обработки логической информации. На практике такие проблемы возникают уже давно. Это проблемы анализа, понимания и обработки текстов на естественном языке, проблемы создания и работы экспертных систем, проблемы обнаружения закономерностей и другие.

Все эти проблемы упираются в проблему организации и представления данных и разработки методов и языков их обработки.

В статье излагается логический подход к пониманию модели данных и ее представления. В [3] было показано, что выразительность языка исчисления предикатов не всегда достаточна для адекватного выражения различных конструкций, и был предложен фрагмент более мощного языка. Наша цель - выбрать достаточно богатый язык с хорошей алгоритмической интерпретацией и использовать его для формализации свойств структур данных.

I. Под моделью или структурой данных мы будем понимать многосортную алгебраическую систему $\langle\{A_i\}; \hat{\Sigma}\rangle$ некоторой фиксированной сигнатуры Σ [8,9,16]. Напомним некоторые основные понятия.

Под **сигнатурой** Σ мы будем понимать набор $\Sigma = \langle I, \Sigma_0, \Sigma_1, \rho\rangle$, где I – непустое множество сортов, Σ_0 – множество символов предикатов, Σ_1 – множество символов операций, а ρ – функция из $\Sigma_0 \cup \Sigma_1$ в множество $L(I)$ упорядоченных наборов из I, причем для любого $f \in \Sigma_1$ значение $\rho(f)$ не пустой набор. **Алгебраической многосортной системой сигнатуры** Σ мы будем называть пару $\langle\{A_i\}_{i\in I}, Int\rangle$, где $\{A_i\}$ – семейство непустых множеств, заиндексированное элементами i из I, а Int-отображение из $\Sigma_0 \cup \Sigma_1$ в множества отношений и функций на множествах $A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_k}$, $i_1, \ldots, i_k \in I$, причем $\hat{P} = Int(P) \subseteq A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_k}$, если $P \in \Sigma_0$ и $\rho(P) = \langle i_1, \ldots, i_k\rangle$, если же $\rho(P) = \Lambda$ – пустой набор, то $\hat{P}$ принимает значение "истина или ложь"; для f из Σ_1, если $\rho(t) = \langle i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}\rangle$, то $\hat{f} = Int(f)$ – функция из $A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_k}$ в $A_{i_{k+1}}$, если же $\rho(f) = \langle i\rangle$, то $\hat{f}$ – константа, выделяющая элемент из A_i. Будем называть значения $\rho(P)$ и $\rho(f)$ типами этих элементов. Будем писать $A \models P(a_1, \ldots, a_n)$, если $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in \hat{P}$, и $A \models f(a_1, \ldots, a_n) = a$, если $\hat{f}(a_1, \ldots, a_n) = a$, где $\hat{f} = Int(f)$, $\hat{P} = Int(P)$ и $f \in \Sigma_1$, $P \in \Sigma_0$.

Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ – две многосортные системы сигнатуры Σ, то гомоморфизмом φ из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ назовем семейство отображений $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ такое, что φ_i для любого символа $i \in I$ отображает A_i в B_i, и для любого символа P из Σ_0 и элементов $a_1, \ldots, a_n$, если $\mathfrak{A} \models P(a_1, \ldots, a_n)$, то $\mathfrak{B} = P(\varphi_{i_1}(a_1), \ldots, \varphi_{i_n}(a_n))$, и для символа f из Σ_1 и элементов $a_1, \ldots, a_n$, a, если $\mathfrak{A} \models f(a_1, \ldots, a_n) = a$, то $\mathfrak{B} \models f(\varphi_{i_1}(a_1), \ldots, \varphi_{i_n}(a_n)) = \varphi_i(a)$.

Пусть $X = (X_i)_{i\in I}$ – семейство множеств, заиндексированное элементами i из I. Пусть для любого $i \in I$ существует элемент x из X_i или константный символ c из Σ_1 такой, что $\rho(c) = \langle i\rangle$. В таком случае определим абсолютно свободную многосортную систему, порожденную семейством $X = \{X_i\}_{i\in I}$.

а) **Термы над** X **сигнатуры** Σ:

I^0. Любой элемент из множества X_i и константу типа $\langle i\rangle$ назовем термом типа i.

2^0. Если $t_1,\dots,t_n$ – соответственно термы типов $i_1,\dots,i_n$ и f – функциональный символ типа $\langle i_1,\dots,i_n, i \rangle$, то $f(t_1,\dots,t_n)$ будет термом типа i.

3^0. Других термов нет.

Пусть $A_i(X)$ – множество всех термов типа i над X сигнатуры Σ. Положим $\mathrm{Int}(P)=\emptyset$ для всех P из Σ_0, а в качестве $\hat{f}=\mathrm{Int}(f)$ для f из Σ_0 рассмотрим функцию $f\colon A_{i_1}(X)\times\dots\times A_{i_k}(X) \to A_i(X)$, полагая $f(t_1,\dots,t_n) \leftrightharpoons f(t_1,\dots,t_n)$, где $t_1,\dots,t_n$ – термы типов $i_1,\dots,i_n$, и $\rho(f) = \langle i_1,\dots,i_n, i \rangle$. В таком случае $A(X) = \langle \{A_i(X)\}, \mathrm{Int} \rangle$ – многосортная система сигнатуры Σ, которую называем абсолютно свободной.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.I [8]. *Пусть A – произвольная модель сигнатуры Σ. Если $\{\varphi_i\}$ – семейство отображений такое, что φ_i отображает X_i в A_i, тогда существует гомоморфизм $\{\hat{\varphi}_i\}$ системы $A(X)$ в A такой, что для любого i отображение $\hat{\varphi}_i$ совпадает с φ_i на X_i.*

Таким образом, любая система сигнатуры Σ может быть получена из некоторой абсолютно свободной системы сигнатуры Σ с некоторым подходящим семейством порождающих.

Определим теперь язык для выражения свойств данных. В качестве такого языка рассмотрим язык динамической логики Ершова [4], определив ее интерпретацию аналогично вышеуказанной работе, взяв в качестве допустимого множества наименьшую допустимую надстройку над многосортной системой A. Описанный язык обладает чрезвычайно большими выразительными возможностями как для свойств данных, так и для различных их алгоритмических свойств. Однако для работы с различными областями данных, как правило, используется небольшой фрагмент этого языка.

б) *Язык квазитождеств над семейством X сигнатуры Σ:*

I. Если $t_1,\dots,t_n$ – термы соответственно типов $i_1,\dots,i_n$, а P – символ из Σ_0 типа $\langle i_1,\dots,i_n \rangle$, то $P(t_1,\dots,t_n)$ – условное тождество (тождество); если t_1, t_2 – термы, то $t_1 = t_2$ – условное тождество (тождество).

2. Если p – условное тождество и q – тождество, то $q \to p$ – условное тождество.

3. Других тождеств и условных тождеств нет.

Естественным образом интерпретируя импликацию, нетрудно определить понятие истинности условного тождества (квазитождества) на многосортной структуре A [8], потребовав ее истинности при любых подстановках вместо переменных из X элементов из $\{A_i\}$ соответствующего типа.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.2 [8]. *Для любого семейства* $X = (X_i)$ *и непротиворечивого множества условных тождеств* T *существуют многоосновная система* $\mathfrak{A}$ *и гомоморфизм* φ *из* $A(X)$ *на* $\mathfrak{A}$ *такие, что в* $\mathfrak{A}$ *истинны все квазитождества из* T *и для любой системы* $\mathfrak{B}$ *такой, что в* $\mathfrak{B}$ *выполнены квазитождества из* T, *и гомоморфизма* ψ *из* $A(X)$ *на* $\mathfrak{B}$ *найдется гомоморфизм* $\hat{\varphi}$ *из* $\mathfrak{A}$ *в* $\mathfrak{B}$ *такой, что* $\psi = \hat{\varphi} \circ \varphi$

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A} \arrow[rr, dashed, "\hat{\varphi}"] & & \mathfrak{B} \\
& A(X) \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Указанная в предложении I.2 система $\mathfrak{A}$ называется *свободной системой* в квазимногообразии T с порождающими $X = (X_i)_{i \in I}$.

Данная система $\mathfrak{A}(X)$ обладает, как указано выше, свойством универсальности для класса систем с тем же множеством порождающих. Ее естественно считать универсальным представлением для данных с указанными свойствами. Именно поэтому в ряде работ [16,17] она и берется в качестве типа данных.

Рассмотрим вопрос о выразительных возможностях языка квазитождеств и проблему эффективности синтеза данных с заданными свойствами.

Выберем подходящие Σ и X и рассмотрим гёделевскую нумерацию γ множества всех термов над $X=(X_i)_{i \in I}$ сигнатуры Σ [5].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.3 [9]. *Если квазимногообразие* T *имеет рекурсивно-перечислимую систему аксиом, то в* T *для сво-*

б о д н о й с и с т е м ы $\mathfrak{A}$ и г о м о м о р ф и з м а φ и з $\mathfrak{A}(X)$ н а $\mathfrak{A}$ н у м е р а ц и я $\lambda n, \varphi\gamma(n): N \to A$ я в - л я е т с я п о з и т и в н о й, п р и ч е м р а з р е ш а - ю щ и й а л г о р и т м с т р о и т с я э ф ф е к т и в н о п о с и с т е м е а к с и о м к в а з и м н о г о о б р а - з и я T.

Это утверждение дает общий подход к построению модели данных по ее описанию на языке квазитождеств.

Н.Касымов [6] решил обратную задачу.Он показал,что, расширив подходящим образом сигнатуру за счет операций, мы любую позитив - ную нумерованную систему можем представить как свободную систему в некотором конечно-аксиоматизируемом квазимногообразии.Хорошо известно [5], что без расширения сигнатуры обойтись нельзя. Теорема Н.Касымова [6] показывает, что для простого адекватного описания данных нам необходимо выбрать достаточно выразительный язык.

Необходимость выбора богатого языка была ясна довольно дав - но. Хорошо известно, что выразить закон Ньютона $F = ma$ в сигнатуре лишь со сложением довольно трудно и громоздко, в то же время с умножением он выражается ясно и просто. Теорема Н.Касымова позволяет в любой системе данных получить просто и ясно записываемые на языке квазитождеств (условных тождеств) законы, позволяющие выразить все свойства этой системы. Но трудность проблемы состоит в выборе необходимого запаса основных операций. Причем выбранные операции должны быть "естественно" представимыми в нашей области данных, где под "естественностью" представимости мы будем пони - мать их простое представление в динамической логике Ершова.

Пусть $\mathfrak{A}$ - некоторая многосортная система сигнатуры Σ,представляющая данные некоторой области. В качестве одной из аксиом теории данных примем следующий

ТЕЗИС. В с я к а я п р а в и л ь н о п о с т р о е н н а я м о д е л ь д а н н ы х и м е е т п о з и т и в н у ю н у - м е р а ц и ю.

Пусть $\mathfrak{A}(X)$ - многосортная система, свободная в конечно-аксиоматизируемом квазимногообразии K в подходящем обогащении Σ_0 сигнатуры операциями, которая и задает нашу многосортную систему $\mathfrak{A}$ (существующая по теореме из [5]).

Б а з о й д а н н ы х (B,R) с и с т е м ы $\mathfrak{A}$ будем называть конечное множество B L-формул над X сигнатуры Σ_0 (где L - некоторый фрагмент языка, построенный в динамической логике Ершова DLE), включающее в себя систему аксиом квазимногообразия K, вместе с некоторой системой R обогащенных правил вывода.

База данных (B,R) п р а в и л ь н а я, если любая формула, выводимая в (B,R), будет истинна на свободной системе $\mathfrak{A}(X)$.

База данных (B,R) L-п о л н а я, если любая формула L-языка, истинная в $\mathfrak{A}(X)$, выводима в (B,R).

Таким образом, при построении баз данных на вычислительных системах и задании правил их обработки предлагается вопрос об адекватности представления данных в базе данных формализовать как правильность этой базы данных, а вопрос полноты свести к указанию того фрагмента языка, для которого эта база полна, т.е. к установлению пределов "хорошей" работы этой базы данных. Естественно требовать при этом, чтобы этот фрагмент мог охватить все разумные вопросно-ответные ситуации, возникающие в области, для которой эта база данных строится. Этот фрагмент должен быть описан точно и просто, и проблема вхождения в него должна быть заданной алгоритмической сложности.

Выделив полный и достаточно просто заданный фрагмент Φ нашего языка, мы естественно приходим к важному вопросу, касающемуся построения языка L^* (расширяющего язык L), на котором будут задаваться вопросы и формулироваться ответы, а также к вопросу трансляции фрагмента естественного языка, специализированного для исследуемого объекта (области) в этот язык L^*. Язык L^* должен быть разрешим в том смысле, что на любой правильно заданный вопрос данных в построенной базе данных на языке L^* мы должны автоматически получить ответ, если же ответ не правильно или недостаточно определенно сформулирован, то в диалоге с базой мы должны уметь поставить уже правильный вопрос, на который сможем получить ответ. Однако такая хорошая база данных возможна лишь для достаточно полно и хорошо изученных областей данных, в структурно просто устроенной области (например, АСУ - техническими объектами, АСУ - предприятие и т.д.). В случае же ограниченности наших знаний при необходимости выделения новых законов функционирования объекта, мы имеем возможность определить в каждый момент времени t лишь фрагмент Σ^t сигнатуры Σ_0 системы $\mathfrak{A}(X)$, который разработан к этому моменту t, и множество A^t аксиом, описывающих функционирование нашего объекта на языке в сигнатуре Σ^t. В таком случае мы получаем систему $\mathfrak{A}_t$, свободную в многообразии, с аксиомами A^t сигнатуры Σ^t. Если мы в сигнатуре Σ_0 определим аксиомами

A^t свободную систему $\mathfrak{A}^*_t$, то система $\mathfrak{A}_t$ будет подсистемой $\mathfrak{A}^*_t$, а искомая система $\mathfrak{A}(X)$ может быть получена как гомоморфный образ системы $\mathfrak{A}^*_t$.

Таким образом, задача обнаружения закономерностей сводится в итоге к построению системы $\mathfrak{A}(X)$, являющейся адекватной математической моделью нашей области, и к выявлению основных законов на языке условных тождеств (квазитождеств).

ПРИМЕР I (логический анализ вероятности выполнения гипотезы). Пусть в нашей области данных выполнены законы их построения $T^t = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, в сигнатуре Σ^t мы построили базу данных (B^t, R^t) в момент времени t и нам нужно сформировать на основе имеющихся данных гипотезы об остальных возможных законах функционирования (строения) наших данных.

Для любого условного тождества p определим число $n(p) \leqslant$ наибольшему числу n (B^t, R^t)-неэквивалентных условных тождеств $q_1, \ldots$ $\ldots, q_n$ таких, что из B^t с помощью правил R^t выводима формула

$$(\forall x q_i \rightarrow \forall x\, q_{i+1}) \,\&\, \neg(\forall x\, q_{i+1} \rightarrow \forall x\, q_i) \quad \text{и} \quad q_1 = p,$$

и тогда число $1/n(p)$ задает степень достоверности гипотезы на основе знаний (B^t, R^t) и T^t. Число $n(p)$ определяет глубину гипотезы по отношению к имеющимся данным. Если наша база (B^t, R^t) обладает свойством разрешимости по отношению к нашему языку условных тождеств, а структура классов, эквивалентных относительно (B^t, R^t) квазитождеств с отношением выводимости достаточно просто алгоритмически устроена (например, сильно конструктивна для естественной гёделевской нумерации), в таком случае мы можем эффективно определять глубину формируемых гипотез, а также формулировать возможные альтернативы, автоматически исходя из имеющихся данных.

Универсальный вид закономерностей, как отмечено в [I,2], обладает рядом важных свойств:

I) они поддаются экспериментальной проверке, т.е. их можно заведомо опровергнуть в конечном эксперименте, если они неверны;

2) они разложимы на простые формулы стандартного вида.

В связи с этим важной методологической проблемой в распознавании закономерностей является полнота данной проблемной области относительно универсальных закономерностей.

Универсально аксиоматизируемые классы обладают рядом хороших семантических свойств. Хорошо известна для аксиоматизируемых классов следующая характеризация: аксиоматизируемый класс универсально аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подсистем.

В [8] имеется характеризация класса конечных моделей K универсально аксиоматизируемого в классе τ. Данная характеризация может быть применена как средство анализа при рассмотрении различных областей данных, как это сделано в [I] для анализа универсальной аксиоматизируемости множества протоколов. А именно показано, что достаточным условием универсальной аксиоматизируемости является следующая пара свойств:

I) для любого множества $\mathbf{A}$ выполнено равенство

$$pr^{\omega} = \langle \pi(\mathbf{A}), \omega \rangle = \mathrm{Obs}^{\omega}(\mathbf{A});$$

2) для любого протокола $pr^{\omega} = \langle \pi(\mathbf{A}), \omega \rangle$ и любого подмножества $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ протокол $pr' = \langle \pi'(\mathbf{B}); \omega \rangle = \mathrm{obs}^{\omega}(\mathbf{B})$, полученный на этом подмножестве, изоморфен подмодели $\langle \pi(B); \omega \rangle$ протокола pr^{ω}, $\pi(\mathbf{B}) \subset \pi(\mathbf{A})$.

Нетрудно понять, что для физических экспериментов такие свойства, как правило, выполнены и это является методологическим обоснованием поиска закономерностей в подобном виде.

ПРИМЕР 2. Вероятностные меры на формулах [I,2].

ПРИМЕР 3. Обоснованность универсальной гипотезы по конечному набору данных в компактных пространствах данных.

Рассмотрим ситуацию, когда рассматриваемая нами область $\mathfrak{M} = \langle M, \rho \rangle$ представляет собой компактное нормированное пространство. Пусть R_0 – множество конструктивных вещественных чисел, т.е. вещественных чисел, которые могут рассматриваться как аппроксимируемые вычислимыми последовательностями рациональных чисел с рекурсивными регуляторами сходимости [I2], а R – всех вещественных чисел. Назовем $\mathfrak{M}$ эффективно представимым, если существует нумерация $\nu: N \to M_0 \to M$, где M_0 – плотное подмножество в M, а N – множество натуральных чисел, причем существует пара рекурсивных функций F и r, таких, что для любых $n, m \in N$ пара функций $(\lambda k F(n,m,k), \lambda k r(n,m,k))$ задает соответственно вычислимую последовательность рациональных чисел, сходящуюся к $\rho(\nu(n), \nu(m))$ с регулятором сходимости $\lambda k r(n,m,k)$.

Потребуем также, чтобы эффективное представление (M, ρ) обладало свойством эффективной покрываемости, т.е. по любому семейству шаров $B(x_i, \rho_i)$, $i \le n$, если $\bigcup_{i=0}^{n} B(x_i, \rho_i) \ge M$, то через гонечное число шагов наш алгоритм проверки покрываемости остановится, а в противном случае он работает бесконечно.

Назовем свойство P элементов из M устойчивым, если множество $\{\bar{x} \mid P(\bar{x})\}$ открыто.

Устойчивое свойство P эффективно обосновано, если существует алгоритм A такой, что для любого набора $l_1,\ldots,l_n$, если на $\nu l_1,\ldots,\nu l_n$ выполнено свойство P, то значение $A(l_1,\ldots,l_n)$ определено и оно определяет код конструктивного вещественного числа $\rho(l_1,\ldots,l_n) > 0$ такого, что шар $B((\nu l_1,\ldots,\nu l_n),\rho(l_1,\ldots,l_n)) \subseteq P$.

Метод доказательства, предложенный в [10], позволяет доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА. Если (M,ρ) – эффективно представимое нормированное пространство со свойством эффективной покрываемости, то существует алгоритм A такой, что для любого устойчивого свойства P и его эффективного обоснования алгоритм заканчивает работу, если в M свойство P выполнено на любых элементах, и работает бесконечно в других случаях.

На базе этого алгоритма проводился [10] ряд численных экспериментов, которые позволили обнаружить новые закономерности. В частности, на основе этого алгоритма получено новое, более точное приближение в задаче об упаковке [10] и ряд других.

К сожалению, мы не всегда можем ограничиться рассмотрением лишь первоначальных понятий, так как в них закономерности не всегда выразимы на достаточном для проверок языке универсальных предложений и тем более условных тождеств. Это заставляет нас вводить новые более мощные понятия. Тем не менее они базируются на старых, но способ их образования может быть различным. Это и квантификация по выписанным отношениям, которые могут быть получены лишь взятием проекций и дополнений. Однако часто встречаются в современной практике рекурсивно введенные понятия.

Такой способ мы имеем в арифметике, определив по операции прибавления единицы вначале сложения, а затем умножения. Оператор цикла одна из основных программистских конструкций, без которой трудно представить себе современное программирование. Хорошую семантику для работы с такими определениями и дает как раз теория допустимых множеств, над которыми мы можем определить семантику динамической логики [4]. В рамках теории допустимых множеств мы можем выделить любой интересующий нас фрагмент и исследовать его свойства, не изобретая для них каких-либо специальных конструкций, так как доказанные теоремы о существовании в теории допустимых множеств гарантируют довольно широкий круг имеющихся там конструкций и объектов.

Пример 3 показывает, что при доказательстве каких-либо свойств P для множества вычислимых объектов хотя мы и привлекаем свойство компактности - пополнения этих конструктивных объектов до неконструктивных,тем не менее эта конструкция пополнения в допустимых множествах определена и обладает рядом хороших уже конструктивных свойств.

2. В первой части данной работы была попытка рассмотреть формальный математический язык для работы с данными и описания их свойств и конструкций над ними, а также на этой основе рассмотреть некоторые методологические вопросы теории типов данных.

Пользуясь предложенным формальным языком, мы можем выписать аксиоматизацию некоторой области данных и построить экспертную систему для автематической обработки данных и обнаружения закономерностей либо с какой-либо степенью достоверности, или вероятностью (как это сделано в примерах I и 2), либо гарантированным образом (как предложено в примере 2). Кроме того, на основе теории допустимых множеств и динамической логики на них, предложенной Ю.Л.Ершовым [4], мы можем рассматривать проблему существования объектов с нужными свойствами и их трансформации.

Рассмотрим теперь проблему полноты описания.Хорошо известна теорема А.И.Мальцева [9] о расширении, по которой для любой бесконечной модели существуют ее элементарные расширения сколь угодно большой мощности. Более того, если теория T достаточно сложная, т.е. содержит в себе аксиоматику Пеано, то любая рекурсивно-аксиоматизируемая теория $T' \supseteq T$ будет неполна, т.е. найдется предложение φ такое, что φ и $\neg\varphi$ не выводимы из T' [I8].

Однако, как будет показано ниже,для адекватного описания эффективно заданной модели логическая полнота ее аксиоматизации не обязательна, т.е. мы можем построить такое описание структуры, из которого не можем извлечь с помощью логического вывода все свойства, тем не менее реализация этой модели единственна.

Рассмотрим модель арифметики в сигнатуре $\langle +,\cdot,s,0,\leq \rangle$, где $+,\cdot$ – бинарные операции, s – унарная, 0 – константа и $\leq$ – бинарное отношение.

Аксиомы Пеано P :

1) $(\forall xy)(s(x) = s(y) \rightarrow x=y)$,
2) $(\forall x)(s(x) \neq 0)$,
3) $(\forall x)(x\neq 0 \rightarrow (\exists y)(s(y) = x))$,
4) $(\forall x)(x+0 = x)$,
5) $(\forall xy)(x+s(y) = s(x+y))$,
6) $(\forall x)(x\cdot 0 = 0)$,
7) $(\forall xy)(x\cdot s(y) = x\cdot y+x)$,
8) $(\forall xy)(x \leq y \leftrightarrow (\exists z)(x+z=y)$,
9) $(\forall xyz)(x \leq x \,\&\, (x \leq y \,\&\, y \leq x \rightarrow x = y)\,\&$
$\&(x \leq y \,\&\, y \leq z \rightarrow x \leq z) \,\&\, (x \leq y \vee y \leq x))$,
10) $(\mathfrak{A}(0,\bar{y}) \,\&\, (\forall x)(\mathfrak{A}(x,\bar{y}) \rightarrow \mathfrak{A}(s(x),\bar{y}))) \rightarrow$
$\rightarrow (\forall x)\mathfrak{A}(x,\bar{y})$,аксиома индукции для каждой формулы $\mathfrak{A}(x\ \bar{y})$.

Рассмотрим стандартную модель аксиоматики Пеано $\mathfrak{N}=\langle N,+,\cdot, s,0,\leq \rangle$, где $N = \{0,1,2,3,\ldots\}$ и $+,\cdot$ – обычные операции сложения и умножения, s – операция прибавления единицы, 0 – нулевой элемент, $\leq$ – естественный порядок.

Характеристическим свойством стандартной модели арифметики является то, что любой элемент является значением терма $\Delta_k = \underbrace{s\ \ldots\ s}_{k}(0)$ для некоторого натурального числа k.

Пусть ν: $N \rightarrow N$ – позитивная нумерация [3] стандартной модели $\mathfrak{N}$, т.е. все отношения перечислимы, операции рекурсивны на номерах и отношение нумерационной эквивалентности позитивно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Любая позитивная нумерация ν стандартной модели $\mathfrak{N}$ является конструктивизацией.

Для доказательства достаточно показать, что нумерационная эквивалентность разрешима и отношение $\leq$ тоже разрешимо.

Но $\nu x \neq \nu y$ тогда и только тогда, когда найдутся такие k и m, что $k \neq m$, а $\nu x = s^k(0) \,\&\, \nu(y) = s^m(0)$, таким образом, дополнение к η_ν также перечислимо и, следовательно, по теореме Поста, η_ν разрешимо, $\eta_\nu = \{\langle n,m \rangle \mid \nu n = \nu m\}$.

Осталось доказать, что отношение $\leq$ также рекурсивно. Вновь по теореме Поста достаточно показать, что его дополнение рекурсивно-перечислимо, но $\nu x \nleq \nu(y) \Rightarrow \nu(y) \leq \nu(x)$ & $\nu x \neq \nu y$, где справа стоит конъюнкция рекурсивно-перечислимых отношений, следовательно, и отношение $\nleq$ рекурсивно-перечислимо, а $\leq$ рекурсивно.

СЛЕДСТВИЕ. Любые две позитивные нумерации стандартной модели арифметики рекурсивно эквивалентны.

Действительно, так как они в силу предложения 2.I являются конструктивизациями, а $\mathfrak{N}$ - конечно-порожденная модель, а по теореме из [9] $\mathfrak{N}$ рекурсивно устойчива, следовательно, они будут рекурсивно эквивалентны.

Изучим теперь нестандартные модели аксиоматики Пеано P.

Нетрудно, опираясь на теорему о полноте, получить следующие утверждения:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2 [I8].

1) $P \vdash (\forall y)(y \leq \Delta_k \to \bigvee_{i=0}^{k} \Delta_i = y)$,

2) $P \vdash (\forall xy)(x \leq s(y)$ & $x \neq s(y) \to x \leq y)$,

3) $P \vdash (\forall x)(0 \leq x)$.

Из аксиом индукции нетрудно извлечь такие следствия для формулы $\varphi(x)$:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.

1) $P \vdash (\forall y)((\forall x)(x < y \to \varphi(x)) \to \varphi(y)) \to \forall x \varphi(x)$,

2) $P \vdash \exists x \varphi(x) \to (\exists x)(\varphi(x)$ & $(\forall y)(\varphi(y) \to x \leq y))$,

3) $P \vdash (\forall t)((\exists x)(\varphi(x)$ & $x \leq t) \to (\exists x)(\varphi(x)$ &

& $x \leq t$ & $(\forall y)((\varphi(y)$ & $y \geq x) \to (t \leq y$ & $t \neq y))))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4 [I8].

1) $P \vdash (\forall x)(0+x = x)$ & $(\forall x)(0 \cdot x = 0)$,

2) $P \vdash (\forall xy)(x+y = y+x$ & $x \cdot y = y \cdot x)$,

3) $P \vdash (\forall xyz)((x+y) + z = x + (y+z)$ & $(x \cdot y) \cdot z =$

$= x \cdot (y \cdot z)$ & $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z)$,

4) $P \vdash \Delta_n + \Delta_m = \Delta_{n+m}$,

5) $P \vdash \Delta_n \cdot \Delta_m = \Delta_{n \cdot m}$,

6) $P \vdash s(\Delta_n) = \Delta_{n+1}$,

7) $P \vdash \Delta_n \neq \Delta_m$, если $n \neq m$,

8) $P \vdash \Delta_n \leq \Delta_m$, если и только если $n \leq m$.

Доказывается по индукции на основе теоремы о полноте исчисления предикатов (см. [18]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $f: N^k \to N$ называется строго представимой в P, если существует формула $\Phi(\bar{x},y)$ такая, что

а) $P \vdash (\forall\bar{x})(\exists y)(\Phi(\bar{x},y) \,\&\, (\forall z)(\Phi(\bar{x},z) \to y = z))$,

б) если $f(n_1,\ldots,n_k) = m$, то $P \vdash \Phi(\Delta_{n_1},\ldots,\Delta_{n_k},\Delta_m)$,

в) если $f(n_1,\ldots,n_k) \neq m$, то $P \vdash \neg\Phi(\Delta_{n_1},\ldots,\Delta_{n_k},\Delta_m)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5 [18]. Следующие функции строго представимы в P:

1) $s(x) = x+1$;

2) $x+y$;

3) $x \dot{-} y$;

4) $x \cdot y$;

5) $[\sqrt{x}]$ – целая часть корня из x;

6) $\left[\frac{x}{y}\right]$ – целая часть от деления x на y, где $\left[\frac{x}{0}\right] = 0$;

7) $rest(x,y)$ – остаток от деления x на y, где $rest(x,0) = x$.

Предложение доказывается выписыванием простейших формул, определяющих функции.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6 [18]. Подстановка в строго представимую функцию строго представимых функций дает строго представимую функцию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидным образом получаем из написания формулы, определяющей подстановку.

Пусть $c: N^2 \to N$, $l: N \to N$, $r: N \to N$ – примитивно-рекурсивные функции, нумерующие пары [20].

Тогда

$$c(x,y) = \left[\frac{(x+y)(x+y+1)}{2}\right] + x,$$

$$l(n) = n \dot{-} \left[\frac{\left[\frac{[\sqrt{8n+1}]+1}{2}\right]\cdot\left(\left[\frac{[\sqrt{8n+1}]+1}{2}\right] \dot{-} 1\right)}{2}\right],$$

$$r(n) = \left[\frac{[\sqrt{8n+1}]+1}{2}\right] \dot{-} (l(n)+1).$$

СЛЕДСТВИЕ. Функции c, l, r строго представимы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. Функция Гёделя

$$\Gamma(n,m) = rest(l(n), 1+(1+m)r(n))$$

строго представима формулой $\Phi(x,y,z)$, причем в P выводима формула

$$(\forall x)(\forall y)(\forall a)(\exists x')((\forall t)(t \le y \to (\forall z)(\Phi(x,t,z) \to \Phi(x',t,z))) \,\&\, \Phi(x',s(y),a)). \qquad (*)$$

Строгая представимость получается из предложения 2.6 и его следствия, а выводимость формулы (*) с помощью теоремы о полноте доказывается аналогично проверке свойств стандартной функции Гёделя [20].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8. Всякая примитивно – рекурсивная функция строго представима в P.

Для доказательства этого предложения достаточно показать, что класс строго представимых функций замкнут относительно примитивной рекурсии.

Пусть g и h – строго представимые функции и

$$\left.\begin{aligned} f(\bar{x},0) &= g(\bar{x}),\\ f(\bar{x},n+1) &= h(\bar{x},n,f(\bar{x},n)). \end{aligned}\right\}$$

Пусть Φ_g, Φ_h – формулы, строго представляющие функции g и h, а $\Phi(x,y,z)$ – формула, представляющая функцию Гёделя из предложения 2.7.

Построим формулу Ψ:

$$\Psi(\bar{x},y,z) \leftrightharpoons (\exists a)(\Phi(a,y,z)\ \& \\ \& (\forall z)(\Phi(a,0,z) \to \Phi_g(\bar{x},z))\ \& \\ \& (\forall t)(t \le y\ \& (\forall z_1 z_2)(\Phi(a,t,z_1)\ \& \\ \& \Phi_h(\bar{x},t,z_1,z_2) \to \Phi(a,s(t),z_2))).$$

Формула Ψ удовлетворяет условиям "б" и "в" строгой представимости. Доказывается так же, как представимость в [18]. Условие "а" строгой представимости следует из-за выводимости формулы в предложении 2.7 и аксиом индукции.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.9. Функция $n \to P_n$ (n-е простое число) строго представима в P формулой $\Psi(x,y)$, причем для нее выполнены следующие свойства:

1) $P \vdash \Psi(x,y) \to (y$ – простое$)$,

2) $P \vdash (x < x'\ \& \Psi(x,y)\ \& \ \Psi(x',y')) \to y < y'$,

3) $P \vdash (\forall y)(y$ – простое $\to (\exists x)\Psi(x,y))$.

Рассмотрим в качестве Ψ формулу $(\exists s)((\forall t)(t < x \to (\forall z_1\ z_2)$, $(\Phi(s,t,z_1)\ \&\ (z_2$ – наименьшее простое, большее $z_1)) \to \Phi(s,\ s(t),\ z_2)))\ \&\ \Phi(s,0,\Delta_2)\ \&\ \Phi(s,x,y)$, где Φ – формула из предложения 2.6, представляющая функцию Гёделя. Проверка всех свойств – аналогична таковой для предложения 2.8 с использованием предложения 2.3.

Если функция f строго представима формулой Φ_f в P, то f можно продолжить до функции в любой нестандартной модели P. В формулах, если мы пишем, что $\Phi(\bar{z},\ f(\bar{x}))$, то это является сокращением для формулы $(\exists d)(\Phi_f(\bar{x},d)\ \&\ \Phi(\bar{z},d))$ или эквивалентной ей формуле $(\forall d)(\Phi_f(\bar{x},d) \to \Phi(\bar{z},d))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.10. В P выводимы следующие формулы:

1. $(\forall x)(\forall p)$ $(p$ – простое $\to \exists y\, \exists t\ x = y \cdot t\ \&$ $\neg(\exists m)\ (y = mp)\ \&\ (\forall q)((q$ – простое $\&\ q$ делит $t) \to$ $\to\ q = p)$,

2. $(\forall x)(\exists y)(\exists z)(\forall t)(t \le x \to ((\varphi(t) \to ((P_t$ делит $y)\ \&$ $\&(P_t$ не делит $z)))\ \&\ (\neg\varphi(t) \to ((P_t$ делит $z)\ \&\ (P_t$

не делит y))))), где φ - произвольная формула.

Доказывается это предложение применением аксиом индукции.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.II [21] Существуют рекурсивно-перечислимые множества A_0 и A_1 такие, что $A_0 \cap A_1 = \emptyset$, и не существует рекурсивного R такого, что $R \supseteq A_0$ и $R \supseteq A_1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Такие пары множеств называются рекурсивно-неотделимыми.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.I2 [20,7]. Для любого непустого рекурсивно-перечислимого множества A существует примитивно-рекурсивная функция f, отображающая N на A.

ТЕОРЕМА. Всякая позитивная модель для аксиом Пеано рекурсивно изоморфна стандартной модели арифметики с тождественной нумерацией.

Если $(\mathfrak{M},\nu)$-позитивная модель арифметики Пеано, то покажем, что она рекурсивно изоморфна $(\mathfrak{N},id)$ стандартной модели арифметики с естественной нумерацией. Если $\mathfrak{M}$ - стандартная модель, то, по предложению 2.I, она рекурсивно изоморфна стандартной. Покажем, что $\mathfrak{M}$ не может быть нестандартной. Допустим, это не так. Тогда существует элемент такой, что $a \neq \underbrace{ss\ldots s(0)}_{t}$ для любого t.

Рассмотрим пару рекурсивно-перечислимых неотделимых множеств A_0, A_1 (предложение 2.II). Очевидно, A_0 и A_1 не пустые множества. По предложению 2.I2, существуют примитивно-рекурсивные функции f и q, перечисляющие соответственно множества A_0 и A_1. Пусть Ψ_f и Ψ_g - формулы, строго представляющие функции f и g (существуют по предложению 2.8). Пусть $\Psi(x,y)$ - формула из предложения 2.9, строго представляющая функцию $n \to P_n$. Определим формулу $\varphi(x) \leftrightharpoons$ $\leftrightharpoons (\exists y)(\Psi_f(y,x)\ \&\ \neg(\exists z)(z \leq y\ \&\ z \neq y\ \&\ \Psi_g(z,x))$. Тогда, по предложению 2.I0, в P выводима формула $(\forall x)(\exists y)(\exists z)(\forall t)(t \leq x \to$ $\to ((\varphi(t) \to ((P_t$ делит $y)\ \&\ (P_t$ не делит $z)))\ \&\ (\neg\varphi(t) \to ((P_t$ делит $z)\ \&\ (P_t$ не делит $y))))$ для этой формулы φ. Но в таком случае эта формула истинна в $\mathfrak{M}$, а так как она имеет вид

$$(\forall x)(\exists y)(\exists z)\ \Delta(x,y,z),$$

то $\mathfrak{M} \models (\exists y)(\exists z)\Delta(a,y,z)$ и, следовательно, найдутся элементы b и c такие, что $\mathfrak{M} \models \Delta(a,b,c)$. Рассмотрим для этих элементов их ν-номера. Пусть $\nu(n) = a$, $\nu(k) = b$ и $\nu(l) = c$.

Отметим следующие свойства.

Если $t \in A_0$, то $\mathfrak{M} \models \varphi(s^t(0))$ и, следовательно, $s^{P_t}(0)$ делит b и $s^{P_t}(0)$ не делит c.

Если $t \in A_1$, то $\mathfrak{M} \models \neg\varphi(s^t(0))$ и, следовательно, $s^{P_t}(0)$ делит c и $s^{P_t}(0)$ не делит b.

Если $t \in N$, то $\mathfrak{M} = (s^t(0))$ или $\mathfrak{M} = \neg\varphi(s^t(0))$ и, следовательно, либо $s^{P_t}(0)$ делит b и $s^{P_t}(0)$ не делит c, либо $s^{P_t}(0)$ делит c и $s^{P_t}(0)$ не делит b.

Определим множество R, положив $t \in R \leftrightarrow s^{P_t}(0)$ делит b.

Заметим, что R – рекурсивно-перечислимо. Действительно, $t \in R \leftrightarrow (\exists x)(s^{P_t}(0) \cdot x = \nu(k))$, где прибавление единицы и умножение на номерах – рекурсивные функции, a = – рекурсивно-перечислимое отношение. Аналогично показывается, что дополнение R также рекурсивно-перечислимо. Следовательно, по теореме Поста, R – рекурсивное отношение. А в силу вышеперечисленных свойств $R \supseteq A_0$ и $\bar{R} \supseteq A_1$. Но это противоречит рекурсивной неотделимости. Полученное противоречие доказывает теорему.

СЛЕДСТВИЕ [9]. Теория арифметики не имеет нестандартных рекурсивных моделей.

Полученные в работе результаты показывают наличие двух сторон полноты – реализационной и логической. С точки зрения синтеза программ и данных с заданными свойствами важна именно реализационная полнота, для верификации же свойств этих данных и программ трудности упираются в проблемы логической полноты. Вышесказанное позволяет предположить, что в построении языков программирования при задании тех рамок (фреймов), в которых работают те или иные конструкции, наиболее целесообразно добиваться логической полноты, что позволит с большей вероятностью верифицировать строящиеся в этом языке на основе этих конструкций программы, в рамках же реализации этого мощного языка, в языке более близкому к машинному, первостепенную роль играют уже вопросы реализационной полноты. Здесь,следуя предложенной Ю.Л.Ершовым концепции,мы рассматриваем структуру современного языка программирования иерархической, в которой более мощные фрагменты, рассчитанные на удобства работы пользователя, интерпретируются или сводятся к более машинно ориентированным фрагментам,трансформируя,таким образом,глобальные конструкции этого языка в машинный язык.

Литература

I. ВИТЯЕВ Е.Е. Анализ данных с применением языка эмпирических систем: Автореф. дис. на соиск. ученой степени канд.техн.наук. - Новосибирск, 1982.

2. ВИТЯЕВ Е.Е. Обнаружение закономерностей, выраженных универсальными формулами. -В кн.: Эмпирическое предсказание и распознавание образов (Вычислительные системы, вып. 79). Новосибирск, 1979, с. 57-59.

3. ГОНЧАРОВ С.С. Матрицы как абстрактный тип данных.-В кн.: Математическое обеспечение ВС из микро-ЭВМ (Вычислительные системы, вып. 96). Новосибирск, 1983, с. 75-86.

4. ЕРШОВ Ю.Л. Динамическая логика над допустимыми множествами. -Докл. АН СССР, 1983, т. 273, № 5, с.1045-1048.

5. ЕРШОВ Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. -М.: Наука, 1980.

6. КАСЫМОВ Н. Алгебраическое описание рекурсивно-перечислимых типов данных. -В кн.: Структурный анализ символьных последовательностей (Вычислительные системы, вып.101). Новосибирск, 1984.

7. МАЛЬЦЕВ А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции. -М.: Наука, 1965.

8. МАЛЬЦЕВ А.И. Алгебраические системы. -М.: Наука, 1970.

9. МАЛЬЦЕВ А.И. Избранные труды, т.2. -М.: Наука, 1976.

10. ПАНКОВ П.С., БАЯЧОРОВА Д.Б., ЮГАЙ С.А. Доказательные вычисления на ЭВМ и результаты их применения в различных разделах математики. -Кибернетика, 1982, №6, с.111-116.

11. TARSKI A. Contributions to the theory of models I,II.-Koninkl.Ned.Akad.Wetensch.Proc. Ser. A. 57 (=Indag. Math.16),p.572-588.

12. ШАНИН Н.А. Конструктивные вещественные числа и конструктивные метрические пространства. -Труды МИ АН СССР, 1962, № 67, с. 15-294.

13. ШОКИН Ю.И. Интервальный анализ. - Новосибирск: Наука, 1981. - 112 с.

14. ЭВМ пятого поколения (Перевод с японского языка материалов симпозиума Японского общества по обработке информации, 1981, т.I, г. I-V). -Всесоюзный центр переводов научно-технической литературы и документации, М., 1982. - 185 с.

15. BERGSTRA J.A., TUCKER J.V. A characterisation of computable data types by means of a finite equational specification method.- Proc.7th ICALP, Springer LNCS,1980,v.85.

16. RUS I. Data structures and operating systems.-Bucuresti: Ditura Academiei,1979.- 364 p.

17. Данные в языках программирования.—Сборник статей. Математическое обеспечение ЭВМ. -М.: Мир, 1982. - 327 с.

18. МЕНДЕЛЬСОН Э. Введение в математическую логику. -М.: Мир, 1972. - 624 с.

19. TANNENBAUM C. Non-archimedian models for arithmetic. -Noties Amer.Math.Soc.,1959,v.6, N 3,p.270.

20. РОДЖЕРС Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972. - 624 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
20 октября 1984 года