ЛОГИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРОБЛЕМЫ МОЗ
(Вычислительные системы)
1985 год Выпуск 107

УДК 519.7

ЛОГИКА С НЕДООПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ КАК ИНФОРМАЦИОННАЯ СИСТЕМА СКОТТА

А.С.Морозов

Введение

Как правило, информация, с которой приходится иметь дело, бывает неполной. Эта неполнота возникает по разным причинам: либо почему-то не смогли получить полностью всю информацию, либо есть основания сомневаться в тех или иных участках информации, либо процесс получения информации еще не закончен и т.д. В практике возникают ситуации, когда необходимо ответить на некоторый вопрос (или принять решение), не располагая информацией, которая традиционно считается достаточной для ответа на данный вопрос. Однако может оказаться, что имеющейся информации уже достаточно, чтобы точно ответить на вопрос.

Например, чтобы ответить на вопрос об истинности высказывания $x_1 \vee x_2$, вовсе не обязательно знать значение x_1, если известно, что x_2 истинно.

Можно, естественно, пытаться делать выводы из неполной информации и в том случае, когда ее совершенно недостаточно для точного ответа, осознавая, что существует определенный риск ошибиться. Подобные ситуации не будут рассматриваться в этой работе.

В настоящее время существует несколько моделей для изучения недоопределенности в информации. Условно их можно подразделить на два типа: непрерывный, развиваемый в основном в работах Л.А. Заде и его последователей (см., например, [1]), и дискретный, в рамках которого выполнены работы, например,[2-5]. Методологические вопросы работы с недоопределенными данными разрабатываются в работах А.С.Нариньяни [6,7].

Настоящая работа выполнена в рамках дискретного подхода. В ней предлагается использовать в качестве одного из инструментов при изучении подобной проблематики абстрактные информационные системы Д.Скотта [8]. Эта модель позволяет алгебраически представить себе устройство множества состояний информационной системы, в которых она уже в состоянии дать правильный ответ на поставленный вопрос, а также множество состояний, но в которых она еще не в состоянии ответить точно. Этому посвящен §I. В §2 с помощью модели Д.Скотта изучается вопрос о том, на какие вопросы в принципе сможет ответить информационная система, располагающая определенными знаниями и эмпирическим материалом.

Приведем определение абстрактной информационной системы, данное Д.Скоттом в [8].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Абстрактная информационная система есть упорядоченная четверка: $(D, \Delta, \mathrm{Con}, \vdash)$, где D – некоторое непустое множество (которое удобно представлять себе как некоторое множество утверждений), Δ – элемент D (наименее информативное утверждение), Con – некоторое семейство конечных подмножеств D, $\vdash \subseteq \mathrm{Con} \times D$. Множества Con и $\vdash$ удовлетворяют следующим свойствам:

I) если $u \subseteq v$ и $v \in \mathrm{Con}$, то $u \in \mathrm{Con}$;

2) если $x \in D$, то $\{x\} \in \mathrm{Con}$;

3) если $u \vdash x$ и $u \in \mathrm{Con}$, то $u \cup \{x\} \in \mathrm{Con}$;

4) если $u \in \mathrm{Con}$, то $u \vdash \Delta$;

5) если $x \in u$, то $u \vdash x$;

6) если $u, v \in \mathrm{Con}$, то из того, что для всех $y \in u$ выполнено $v \vdash y$ и $u \vdash x$, следует $v \vdash x$.

Удобно представлять себе элементы Con как совместные множества, а $\vdash$ – как отношение следования.

Следуя Скотту, будем называть элементами информационной системы $A = (D_A, \Delta_A, \mathrm{Con}_A, \vdash_A)$ такие подмножества $X \subseteq D_A$, что:

I) любое конечное подмножество из X лежит в Con,

2) $u \subseteq X$ и $u \vdash_A y$ влечет $y \in X$.

Для $a \subseteq D$ определим $\mathrm{Cons}(a) = \{b \in D \mid a' \vdash b$ для некоторого конечного подмножества $a' \subseteq a\}$.

Определим $\bot_A = \mathrm{Cons}(\Delta)$.

Область для информационной системы A есть упорядоченная пара $\langle |A|, \sqsubseteq \rangle$, где $|A|$ – множество элементов информационной системы A, а $\sqsubseteq$ – отношение аппроксимации: $x \sqsubseteq y$ (x аппроксимирует y) эк –

вивалентно $x \subseteq y$. Очевидно, что $\langle |A|, \subseteq \rangle$ является нижней полурешеткой, т.е. $\subseteq$ - такой частичный порядок, что для любых X и Y из $|A|$ существует их точная нижняя грань.

§I. Множества неопределенности в одном классе информационных систем

В этом параграфе мы будем изучать ситуацию, когда имеется счетный набор пропозициональных переменных $x_0, x_1, \ldots$, каждой из которых приписано какое-либо значение истинности (0 или I), причем нам известны лишь некоторый (конечный) набор из этих значений, а также некоторый конечный набор утверждений, связывающий значения x_j. Тем или иным образом мы можем получать сообщения об истинности остальных x_i, а также о связи между ними в виде формул исчисления высказываний, например, x_5, $(x_6 \& x_7) \to x_0$ и т.д. Предполагается, что поступающие сообщения друг другу не противоречат.

Определим две информационные системы Скотта:

$$A = (D, \Delta, \vdash, \mathrm{Con}) \quad \text{и} \quad A' = (D', \Delta', \vdash', \mathrm{Con}')$$

следующим образом:

В системе A в качестве D возьмем множество всех непротиворечивых формул исчисления высказываний, $\vdash$ - обычное отношение выводимости, Δ - тождественно истинное высказывание, Con - множество, состоящее из всех совместных конечных подмножеств D. Пусть C - множество, состоящее из всех элементарных конъюнкций вида $x_{i_1}^{\varepsilon_1} \& \ldots \& x_{i_n}^{\varepsilon_n}$, где $x_j^0 = \neg x_j$, $x_j^1 = x_j$.

В системе A' в качестве D' возьмем множество $(D \cap C) \cup \{\Delta\}$, Con' состоит из всех совместных конечных подмножеств D', $\Delta' = \Delta$, $\vdash' = \vdash \cap (\mathrm{Con}' \times D')$, в дальнейшем мы не будем различать $\vdash$ и $\vdash'$. Области для двух данных информационных систем мы обозначим соответственно $\langle S, \subseteq \rangle$ и $\langle S', \subseteq' \rangle$.

Определим:

$N(\varphi) = \{a \in S \mid$ для любого конечного подмножества $a' \subseteq a$ из a' не выводима ни формула φ, ни формула $\neg\varphi\}$;

$N'(\varphi) = \{a \in S' \mid$ для любого конечного подмножества $a' \subseteq a$ из a' не выводима ни формула φ, ни формула $\neg\varphi\}$.

Несложно доказывается следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ.

$$N'(\varphi) = \{a \cap C \mid a \in N(\varphi)\} .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО автор оставляет читателю.

Будем называть $N(\varphi)$ и $N'(\varphi)$ множествами неопределенности формулы φ. Это множества таких состояний информационной системы, при которых об истинности φ еще ничего сказать нельзя.

В этом параграфе мы будем изучать связь между формулами и их множествами неопределенности.

ТЕОРЕМА I. Если $N(\varphi_0) = N(\varphi_1)$, то либо φ_0 эквивалентно φ_1, либо φ_0 эквивалентно $\neg\varphi_1$.

Эта теорема допускает достаточно простое самостоятельное доказательство, однако мы получим ее как следствие теоремы 2 и предложения.

ТЕОРЕМА 2. Если $N'(\varphi_0) = N'(\varphi_1)$, то φ_0 эквивалентна либо φ_1, либо $\neg\varphi_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть n – максимальное натуральное число такое, что переменная x_n входит либо в запись φ_0, либо в φ_1. Рассмотрим формулу $x_1 \& \ldots \& x_n$. Очевидно, что из $x_1 \& \ldots \& x_n$ следует либо формула φ_0, либо ее отрицание. То же верно и для формулы φ_1. Перейдя, если нужно, к отрицаниям, мы будем считать, что $x_1 \& \ldots \& x_n \vdash \varphi_0$ и $x_1 \& \ldots \& x_n \vdash \varphi_1$. Докажем, что φ_0 эквивалентно φ_1.

Выберем какой-либо набор значений переменных

$$x_1, \ldots, x_n;\ \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n,\quad \varepsilon_i \in \{0, 1\}.$$

Требуется доказать, что $x_1^{\varepsilon_1} \& \ldots \& x_n^{\varepsilon_n} \vdash \varphi_0$ тогда и только тогда, когда $x_1^{\varepsilon_1} \& \ldots \& x_n^{\varepsilon_n} \vdash \varphi_1$.

Заметим, что от $x_1 \& \ldots \& x_n$ к $x_1^{\varepsilon_1} \& \ldots \& x_n^{\varepsilon_n}$ можно перейти конечным числом преобразований, заключающихся в замене вхождения x_i на $\neg x_i$.

Покажем, что если

$$(x_1^{\gamma_1} \& \ldots \& x_i \& \ldots x_n^{\gamma_n} \vdash \varphi_0) \leftrightarrow (x_1^{\gamma_1} \& \ldots \& x_i \& \ldots \& x_n^{\gamma_n} \vdash \varphi_1),$$

то

$$(x_1^{\gamma_1} \& \ldots \& \neg x_i \& \ldots \& x_n^{\gamma_n} \vdash \varphi_0) \leftrightarrow (x_1^{\gamma_1} \& \ldots \& \neg x_i \& \ldots \& x_n^{\gamma_n} \vdash \varphi_1).$$

Рассмотрим $\phi = \underset{1\le j\le n, j\ne i}{\&} x_j^{\gamma_j}$. Предположим, что $\phi \nvdash \varphi_0$ и $\phi \nvdash \neg\varphi_0$, тогда множество следствий из ϕ, лежащих в C, есть элемент из S', обозначим его a_ϕ. Ясно, что выполнено $a_\phi \in N'(\varphi_0)$. Тогда существуют такие выполнимые формулы ϕ' и ϕ'', что $\phi' \vdash \phi$, $\phi'' \vdash \phi$, $\phi' \vdash \varphi_0$ и $\phi'' \vdash \neg\varphi_0$. Можно считать, что все пропозициональные переменные ϕ' и ϕ'' содержатся среди $\{x_1, \ldots, x_n\}$. (Вместо остальных переменных можно поставить значение "истина" или "ложь" с таким расчетом, чтобы полученные формулы были снова выполнимы.) В нашей ситуации эти формулы определены однозначно — это $\phi \& x_i$ и $\phi \& \neg x_i$. Поскольку $a_\phi \in N'(\varphi_1)$, аналогичное рассуждение показывает, что формулы $\phi \& x_i$ и $\phi \& \neg x_i$ обладают теми же свойствами для φ_1, что и ϕ', ϕ'' для φ_0. Если $x_1^{\gamma_1} \& \ldots \& x_i \& \ldots \& x_n^{\gamma_n} \vdash \varphi_0$, то поскольку $a_\phi \in N'(\varphi_0)$, $x_1^{\gamma_1} \& \ldots \& \neg x_i \& \ldots \& x_n^{\gamma_n} \vdash \neg\varphi_0$. По предположению, $x_1^{\gamma_1} \& \ldots \& x_i \& \ldots \& x_n^{\gamma_n} \vdash \varphi_1$. Из того, что $a_\phi \in N'(\varphi_0)$, следует, что $x_1^{\gamma_1} \& \ldots \& \neg x_i \& \ldots \& x_n^{\gamma_n} \vdash \neg\varphi_1$.

Случай $x_1^{\gamma_1} \& \ldots \& x_i \& \ldots \& x_n^{\gamma_n} \vdash \neg\varphi_0$ разбирается аналогично.

Предположим, что $a_\phi \notin N'(\varphi_0)$. Это означает, что $\phi \& x_i \vdash \varphi_0$ эквивалентно $\phi \& \neg x_i \vdash \varphi_0$, что, в свою очередь, эквивалентно $\phi \& x_i \vdash \varphi_1$ и эквивалентно $\phi \& \neg x_i \vdash \varphi_1$.

Производя нужные нам замены x_i на $\neg x_i$ в $x_1 \& \ldots \& x_n$, мы получим, что $x_1^{\varepsilon_1} \& \ldots \& x_n^{\varepsilon_n} \vdash \varphi_0$ тогда и только тогда, когда $x_1^{\varepsilon_1} \& \ldots \& x_n^{\varepsilon_n} \vdash \varphi_1$. Значит, φ_0 эквивалентно φ_1. Теорема 2 доказана.

В теореме 2 моделируется ситуация, когда нашей информационной системе необходимо решить вопрос об истинности формулы φ на основании непосредственной информации об истинности пропозициональных переменных, т.е. на вход системы поступают сообщения типа: "x_3 – ложно", "x_9 – истинно" и т.д. Обладая неполной информацией, система в некоторых случаях может наверняка решить вопрос об истинности φ. Например, если в систему поступило сообщение "x_1 – истинно", у системы есть все основания сообщить, что формула $x_1 \vee x_2$ – истинна независимо от значения x_2. Формулы из C отвечают различным состояниям информационной системы. Например, $x_1 \& \neg x_2 \& \neg x_3$ соответствует знанию системы о том, что x_1 – истинно, а x_2 и x_3 – ложны. Формулы $N'(\varphi)$ соответствуют таким состояниям информационной системы, в которых из системы нет еще оснований делать вывод о ложности или истинности φ.

В теореме I изучается ситуация, когда на вход системы разрешается подавать более "туманную" информацию типа: "одно из значений x_1 и x_2 – истинно, что соответствует $x_1 \vee x_2$". Как уже отмечалось, $N(\varphi)$ в этом случае имеет тот же смысл, что и $N'(\varphi)$ в предыдущем.

Оказывается, связь между формулами и их множествами неопределенности весьма жесткая. Можно сказать, что всякая формула исчисления высказываний почти полностью определяется своим множеством неопределенности.

У множеств неопределенности есть простое алгебраическое описание, которое дается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 3. Для всякой формулы φ исчисления высказываний существуют такие n и разбиение множества $C_n = \{x_1^{\varepsilon_1} \& \ldots \& x_n^{\varepsilon_n} \mid \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n \in \{0,1\}\}$ на подмножества M_0 и M_1 (в соответствии с истинностью φ на $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$), что

$$N(\varphi) = \{a \in S \mid \exists \lambda \in M_0\ \forall \alpha \in a\ \lambda \vdash \alpha\} \cap \{a \in S \mid \lambda \in M_1\ \forall \alpha \in a\ \lambda \vdash \alpha\},$$

$$N'(\varphi) = \{a \in S' \mid \exists \lambda \in M_0\ \forall \alpha \in a\ \lambda \vdash \alpha\} \cap \{a \in S' \mid \exists \lambda \in M_1\ \forall \alpha \in a\ \lambda \vdash \alpha\}.$$

Это разбиение однозначно определяется любым из множеств $N(\varphi)$, $N'(\varphi)$. Обратно, всякому разбиению C_n на M_0 и M_1 соответствует некоторая формула φ, для которой $N(\varphi)$ и $N'(\varphi)$ строятся указанным способом.

Отметим, что можно было бы с самого начала рассматривать конечный, а не бесконечный набор переменных $\{x_0, \ldots, x_n\}$ такой, что все переменные φ_0 и φ_1 содержатся среди них, и получить аналогичные результаты.

§2. Информационные системы как модели для эмпирических исследований

В этом параграфе мы будем изучать следующую ситуацию: имеется некоторая модель $\mathfrak{M}$ конечно-аксиоматизируемой теории T в языке сигнатуры σ, $\sigma \cap \omega = \emptyset$ (см. [9]), у которой основное множество (в дальнейшем будем обозначать его $|\mathfrak{M}|$) есть множество натуральных чисел ω. В информационную систему могут поступать сообщения следующих типов:

1) предикат P^k истинен на наборе $\langle n_1,\ldots,n_k \rangle$,

2) предикат P^k ложен на наборе $\langle n_1,\ldots,n_k \rangle$,

3) $f^s(m_1,\ldots,m_s) = m_{s+1}$,

4) $f^s(m_1,\ldots,m_s) \neq m_{s+1}$,

5) булевы комбинации сообщений типа 1-4 (т.е. построенные из указанных с помощью логических связок $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\to$).

Определим абстрактную информационную систему Скотта, соответствующую описываемой ситуации: $D = \{\varphi \mid \varphi$ - бескванторное предложение сигнатуры $\sigma \cup \{i \mid i < \omega\}$, не являющееся тождественно ложным в $T\}$, $\Delta = (0=0)$, Con есть множество всех конечных подмножеств D, совместных с T, отношение $\vdash$ совпадает с обычным отношением выводимости.

Обозначим через S область для данной информационной системы.

Пусть $A \in S$, φ - предложение сигнатуры $\sigma \cup \omega$. Мы будем говорить, что A обеспечивает φ (и записывать это так: $A \Vdash \varphi$), если для любой модели $\mathfrak{M}_1$ теории $T \cup A$ такой, что $|\mathfrak{M}_1| = \omega$, справедливо $\mathfrak{M}_1 \models \varphi$.

ПРИМЕР. Пусть $T = \emptyset$, $\sigma = \langle P^1 \rangle$, $A = \{P^1(0), P^1(1), \ldots\}$, тогда $A \Vdash \forall x P^1(x)$.

Справедливо следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Если для $A \in S$ существует такое конечное подмножество $A' \subseteq D$, что $A = \mathrm{Cons}(A')$, то $A \Vdash \varphi$ эквивалентно выводимости φ из $A \cup T$.*

Мы опускаем теоретико-модельное доказательство этого утверждения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Предложение φ сигнатуры $\sigma \cup \omega$ называется конечно устанавливаемым в T, если для всякого $A \in S$ такого, что $A \Vdash \varphi$, существует такое конечное подмножество $A' \subseteq A$, что $\mathrm{Cons}(A') \Vdash \varphi$.

Конечно устанавливаемые предложения (т.е. такие предложения, истинность которых в реальной ситуации в принципе возможно установить) допускают весьма простое описание. Класс таких предложений достаточно узок и его определяет следующая

ТЕОРЕМА 4. Если φ - конечно устанавливаемое в T предложение, то φ эквивалентно $\exists$-предложению относительно T.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что φ устойчиво относительно расширений моделей.

Пусть $\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{M}_1$ - такие счетные модели, что $\mathfrak{M}_0 \subseteq \mathfrak{M}_1$, и $\mathfrak{M}_0 \models T$, $\mathfrak{M}_1 \models T$ и $\mathfrak{M}_0 \models \varphi$. Тогда $D\mathfrak{M}_0 \models \varphi$, где $D\mathfrak{M}_0$ - диаграмма $\mathfrak{M}_0$. По условию, для подходящего конечного подмножества $A \subseteq D\mathfrak{M}_0$ справедливо $\mathrm{Cons}(A) \Vdash \varphi$. Поскольку $\mathfrak{M}_1 \models A$, а $\mathfrak{M}_1$ - счетная модель, мы можем считать, что $|\mathfrak{M}_1| = \omega$. Ввиду того, что $\mathrm{Cons}(A) \Vdash \varphi$, имеем $\mathfrak{M}_1 \models \varphi$. Мы доказали, что φ устойчиво относительно счетных расширений счетных моделей. Пусть $\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{M}_1$ - произвольные модели теории T такие, что $\mathfrak{M}_0 \subseteq \mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_0 \models \varphi$. По теореме Левенгейма-Сколема, в $\mathfrak{M}_0$ существует счетная элементарная подмодель $\mathfrak{M}_0^* < \mathfrak{M}_0$. Расширим ее до счетной элементарной подмодели $\mathfrak{M}_1^* < \mathfrak{M}_1$. По условию, $\mathfrak{M}_0^* \models \varphi$. Значит, $\mathfrak{M}_1^* \models \varphi$, стало быть, $\mathfrak{M}_1 \models \varphi$. Свойство устойчивости доказано. По [9, с. 176], φ эквивалентно $\exists$-формуле относительно T. Теорема доказана.

Нетрудно показать, что справедлива и обратная теорема.

Можно было бы пойти дальше и определить класс сильно устанавливаемых формул следующим образом: φ сильно устанавливаема, если φ и $\neg\varphi$ - устанавливаемые формулы. Если допустить, что для любого атомарного предложения α сигнатуры $\sigma \cup \omega$ в нашу систему рано или поздно поступит либо сообщение α, либо $\neg\alpha$, то система рано или поздно будет иметь достаточно информации для того, чтобы ответить, какое из утверждений φ или $\neg\varphi$ имеет место в $\mathfrak{M}$. Таким образом, класс сильно устанавливаемых формул возникает вполне естественно. Было бы естественно пытаться доказать, например, что все эти формулы эквивалентны в T бескванторным формулам. Однако это предположение неверно. Автором построен соответствующий контрпример.

Описанную выше модель можно считать абстрактной моделью для эмпирических исследований. В качестве "мира" в модели участвует алгебраическая система $\mathfrak{M}$. Предполагается, что мы знаем, какими могут быть всевозможные элементы мира $\mathfrak{M}$, и нам надо установить, каковы отношения между ними, что мы и делаем тем или иным способом (наблюдая, производя эксперименты и т.п.). Имеются априорные знания T о мире $\mathfrak{M}$. Утверждения о мире $\mathfrak{M}$ мы формулируем в языке первого порядка. Оказывается, что все, что мы сможем сказать о мире $\mathfrak{M}$ на основании имеющихся эмпирических данных и априорных знаний, нисколько не рискуя ошибиться,- тривиальные суждения, если учитывать наши имеющиеся знания. Это говорит о том, что для получения новых нетривиальных знаний о мире необходимо существенно использовать также нестрогие методы, такие, как, например,индукция.

Мы описали две абстрактные информационные системы Скотта, моделирующие логику с недоопределенностью. Изучение логики с недоопределенностью как абстрактной информационной системы позволяет описывать классы вопросов, на которые можно ответить, запрашивая, быть может, дополнительную информацию об объекте, а также позволит делать некоторые методологические заключения для создания реальных систем,делающих выводы из неполной информации.Определенный интерес представляет изучение подобных систем как математических структур.

Л и т е р а т у р а

I. ZADEH L.A. Fuzzy sets. - Information and Control, 1965, v.8, p.338-353.

2. LEVESQUE H.I. A formal treatment of incomplete knowledge bases. Tech.Rep.CSRG-139. Toronto,1982.

3. VASSILIOU Y. A formal treatment of Imperfect Information in Database Management.Tech.Rep.CSRS-123. Toronto,1980.

4. БЕЛНАП И., СТИЛ Т. Логика вопросов и ответов. -М.: Прогресс, I981. - 288 с.

5. LIPSKI W.,jr. On the logic of incomplete information. ICS PAS report N 300, Warsawa,1977,preprint, 16 p.

6. НАРИНЬЯНИ А.С. Недоопределенные модели и операции с недоопределенными значениями. -Новосибирск, I982. -34 с. (Препринт/ВЦ СО АН СССР: №400).

7. НАРИНЬЯНИ А.С. Средства моделирования неполных данных в аппарате представления знаний. -В кн.: Представление знаний и моделирование процесса понимания. Новосибирск, I980, с. I53-I62.

8. SCOTT D. Domains for denotational semantics.- Lecture notes in computes science,140: 1982,p.577-610.

9. ЕРШОВ Ю.Л., ПАЛЮТИН Е.А. Математическая логика. -М.: Наука, I979. -320 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
2I февраля I984 года