ЛОГИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРОБЛЕМЫ МОЗ
(Вычислительные системы)
1985 год Выпуск 107

УДК 517.11:518.5

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ НУМЕРАЦИЙ

Е.Г. Никифорова

В связи с широким развитием сложных вычислительных и управляющих систем, а также языков программирования высоких уровней приобретает актуальность изучение семантики подобных систем,а для этого, в свою очередь, может оказаться интересным исследование неформального математического мышления. К числу наиболее существенных особенностей такого мышления принадлежат интуитивные представления о бесконечном переборе и непрерывности. Очевидно, никакое физическое устройство не может осуществить бесконечный перебор. Но человек может выполнить его мысленно. Поэтому становятся интересными процессы, допускающие бесконечный перебор в качестве элементарного акта, а в остальном алгоритмические. В качестве теории бесконечного перебора выступает интенсивно развивающаяся в последнее время теория рекурсивных иерархий: объекты, рассматриваемые этой теорией,естественно интерпретировать как автоматы, способные к бесконечному перебору. Математическим уточнением простейшего бесконечного перебора является джамп-оператор E (определение этого понятия см. в [6]). Такие автоматы могут быть использованы для построения классического анализа с целью приблизить его формализацию к обычному неформальному изложению этой дисциплины. Логическое уточнение такого способа изложения анализа в терминах вычислимости с оракулами дано в [3]. По-видимому,существует глубокая аналогия между построением дедекиндова континуума и проблемой остановки. Изучение этой аналогии интересно в связи с проблемами искусственного интеллекта и в связи с вопросами методологии естествознания [7]. Такую ориентацию имеют работы [1,2] Н.В.Белякина. Настоящая работа идейно примыкает к ним. В основе исследований лежит понятие вычислимости с оракулами. Оракул можно рассматривать как часть работающей с ним машины и считать машину с оракулом автоматом, способным к бесконечному перебору. В [I] разработан общий механизм построения иерархий*), основанный на итерированной клиниевской вычислимости. Этот механизм использовался в дальнейшем для построения моделей классического анализа [2]. Автор искренне благодарен Н.В.Белякину за постановку задачи и большое внимание к работе.

I. Основные понятия. Напомним некоторые определения и обозначения из [I-2]: T_1 - множество всюду определенных числовых функций, T_2 - множество всюду определенных функционалов, ν - произвольная ординальная нумерация, $|\nu|$ - ее длина, $\nu\restriction\tau$ - ее начальный отрезок длины τ, $K_\tau[\nu]$ - его номерное множество. В [I] на ординальную нумерацию нанизывались оракулы, вычисляющие некоторые заранее указанные функционалы типа 2 и разрешающие графики предыдущих оракулов равномерным образом, чем обусловлено существенное возрастание силы оракулов с увеличением номера. Иногда вводить по определению свойство разрешения графиков предыдущих оракулов становится неудобным. Например, если в ходе построения иерархии нужно возвращаться и усиливать оракулы, релятивизируя их к новым функционалам, то требование разрешимости графиков может привести к нарушению некоторых свойств построенной нумерации. Здесь мы не требуем свойства равномерного разрешения графиков в определении оракулов. Навесим на нумерацию ν следующие оракулы. Пусть $G \in T_2$. Если оракулы $H^G_{\nu,\sigma}$, соответствующие точкам $\sigma<\tau$ нумерации уже построены, то оракул $H^G_{\nu,\tau}$ есть минимальная функция такая, что:

1. Если $\eta = \lambda t\{z\}^{H^G_{\nu,\tau}}(t) \in T_1$, то

$$H^G_{\nu,\tau}(5^{z+1}) = E(\eta), \qquad H^G_{\nu,\tau}(7^{z+1}) = G(\eta),$$

где E - джамп-оператор, т.е. для $\alpha \in T_1$

$$E(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{если } \exists t(\alpha(t)=0), \\ 1 & \text{- в противном случае,} \end{cases}$$

2. $$H^G_{\nu,\tau}(3^{\langle i,j\rangle}) = \begin{cases} 0, & \text{если } j \in K_\tau[\nu],\ i \in K_{\nu j}[\nu], \\ 1, & \text{если } j \in K_\tau[\nu],\ i \notin K_{\nu j}[\nu]. \end{cases}$$

*) Обычно строят трансфинитные последовательности оракулов, так что вычислимые с ними объекты образуют некоторую иерархию.

Небольшой модификацией условия I можно получить оракулы вида $H^J_{\nu,\sigma}$, где J - некоторое нумерованное семейство функционалов. Заметим, что для построения оракула $H^G_{\nu,\tau}$ не нужно знать номер ординала τ в нумерации, и можно говорить о заключительном оракуле $H^G_{\nu,|\nu|}$. Для вопросов x из области определения оракулов определим ранговую функцию $\rho_\tau(x)$, полагая: $\rho_\tau(3^{\langle i,j\rangle}) = 0$, $\rho_\tau(5^{z+1}) = \rho_\tau(7^{z+1}) = \sup\{\rho_\tau(y)\,|\,z$ задает вопрос $y\}$. Для произвольного оракула F определим $B^*(F)$ - множество геделевских номеров машин, вычисляющих с оракулом F всюду определенные функции. Аналогично: ранг $r_\tau(z)$ для $z \in B^*(H^G_{\nu,\tau})$ есть 0, если машина z не задает вопросов, иначе $r_\tau(z) = \sup\{\rho_\tau(x)\,|\,z$ задает вопрос $x\}$. Пусть также $|H^G_{\nu,\tau}| = \sup\{r_\tau(z)\,|\,z \in B^*(H^G_{\nu,\tau})\}$. Оракул F называется слабо фундированным, если множество геделевских номеров F-вычислимых деревьев с обрывом всех цепей F-перечислимо. Множество F-перечислимо, если оно есть область определения некоторой F-вычислимой функции. Очевидно, что множество $B^*(H^G_{\nu,\sigma})$ будет $H^G_{\nu,\sigma}$-перечислимо при $\sigma \le |\nu|$.

УТВЕРЖДЕНИЕ I. Если $\sigma \le \tau \le |\nu|$, то $H^G_{\nu,\sigma} \le H^G_{\nu,\tau}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Множество $K_\tau[\nu]$ - $H^G_{\nu,\tau}$-перечислимо для любого $\tau \le |\nu|$.

Свойства I,2 следуют из определения оракулов, доказательства свойств 3-6 являются модификацией доказательств соответствующих утверждений из [I].

Ординал γ называется F-вычислимым, если существует F-вычислимое дерево с обрывом всех цепей высоты γ.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Для $\tau \le |\nu|$ множество $T(H^G_{\nu,\tau})$ геделевских номеров $H^G_{\nu,\tau}$-вычислимых ординалов $H^G_{\nu,\tau}$-перечислимо.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Для $\tau \le |\nu|$ $|H^G_{\nu,\tau}|$ есть супремум высот деревьев из $T(H^G_{\nu,\tau})$.

Под выражением "функционал G типа 2 вычислим с оракулом F" понимается, что имеется некоторая процедура, вычисляющая с оракулом F по геделевскому номеру F-вычислимой функции значение функционала G на этой функции.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Если множество $K_\sigma[\nu]$ - F-перечислимо, для всякого $j\in K_\sigma[\nu]$, множества $K_{\nu j}[\nu]$ F-разрешимы равномерно по j, $G\in T_2$ F-вычислим, и оракул F слабо фундирован, то оракул $H^G_{\nu,\tau}$ F-вычислим.

Если для точки $\tau\le|\nu|$ множество $K_\tau[\nu]$ не является $H^G_{\nu,\tau}$-разрешимым, то ординал τ называется точкой насыщения для ν.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Точка $\tau\le|\nu|$ является точкой насыщения ν, если и только если $B^*(H^G_{\nu,\tau}) = \bigcup\limits_{\sigma<\tau} B^*(H^G_{\nu,\sigma})$.

Итак, учитывая утверждение I, считаем, что если τ - точка насыщения ν и машина z вычисляет с оракулом $H^G_{\nu,\tau}$ всюду определенную функцию,то найдется σ $(\sigma<\tau)$ такое,что z с оракулом $H^G_{\nu,\sigma}$ вычислит ту же функцию.В нашем случае,если $\tau\le|\nu|$ не является точкой насыщения ν, то либо найдется $\sigma<\tau$ такое, что оракул $H^G_{\nu,\tau}$ $H^G_{\nu,\sigma}$ -вычислим (и тогда для любого σ' такого, что $\sigma\le\sigma'\le\tau$, оракул $H^G_{\nu,\sigma'}$ будет $H^G_{\nu,\tau}$-вычислим), либо существует некоторое множество, разрешимое с оракулом $H^G_{\nu,\tau}$, но не разрешимое ни с одним из ранее построенных оракулов, так как множество $\Gamma_\tau = \{\langle i,j\rangle \mid \nu i<\nu j<\tau\}$ либо разрешимо с оракулом $H^G_{\nu,\sigma}$ для $\sigma<\tau$, и тогда имеем первое, либо оно впервые стало разрешимо с оракулом $H^G_{\nu,\tau}$, и тогда имеем второе.Точки насыщения могут быть изолированными или могут быть пределом предшествующих точек насыщения. Нас будут интересовать, в основном, предельные точки насыщения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Если точка τ есть точка насыщения для ν, то τ есть предельный ординал.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. Точка $|\nu|$ есть точка насыщения для ν, если $|H^G_{\nu,|\nu|}|=|\nu|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, тогда множество $K_{|\nu|}[\nu]$ $H^G_{\nu,|\nu|}$-разрешимо. Таким образом, множество $\Gamma_{|\nu|}$ тоже $H^G_{\nu,|\nu|}$ -разрешимо. Отсюда легко видеть, что можно построить машину $z \in B^*(H^G_{\nu,|\nu|})$ так, чтобы $r_{|\nu|}(z) = |\nu|$. Но тогда можно построить машину y, работающую с оракулом $H^G_{\nu,|\nu|}$ и задающую вопрос 5^{z+1}. Понятно, что $r_{|\nu|}(y) = |\nu|+1$, а поскольку для всякого $\zeta < |\nu|$ существует машина z_ζ, вычисляющая с оракулом $H^G_{\nu,|\nu|}$ ординал ζ, то, учитывая утверждение 4, получаем противоречие с условием $|H^G_{\nu,|\nu|}| = |\nu|$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. Для произвольной нумерации ν имеем: если при $\sigma \le \tau$ множество $K_\sigma[\nu]$ разрешимо с оракулом $H^G_{\nu,\tau}$ на машине w, то множество $R_z = \{y \in B^*(H^G_{\nu,\sigma}) \mid r_\sigma(y) < r_\tau(z)\}$, где $z \in B^*(H^G_{\nu,|\nu|}$ $H^G_{\nu,\sigma}$-разрешимо равномерно по z, w.

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. Если множество $B^*(H^G_{\nu,\sigma})$ $H^G_{\nu,\sigma}$-разрешимо, где $\sigma < \tau \le |\nu|$, то и график оракула $H^G_{\nu,\sigma}$ $H^G_{\nu,\tau}$-разрешим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО утверждения 9 проводится стандартным образом с помощью леммы Роджерса, а утверждение 10 очевидно.

2. Точки насыщения. В определении оракулов не требовалось свойства разрешения графиков предыдущих оракулов, да это и не всегда верно теперь. Действительно, если τ не есть точка насыщения для ν, то множество $K_{\tau+1}[\nu] = K_\tau[\nu] \cup \{\nu^{-1}\tau\}$ $H^G_{\nu,\tau}$-разрешимо, и значит, $H^G_{\nu,\tau}$-перечислимо, все его начальные отрезки, т.е. множества $K_{\nu j}[\nu]$ для $j \in K_{\tau+1}[\nu]$ $H^G_{\nu,\tau}$-разрешимы, следовательно, оракул $H^G_{\nu,\tau+1}$ $H^G_{\nu,\tau}$-вычислим (по утверждению 5), и значит, график оракула $H^G_{\nu,\tau}$ не может быть $H^G_{\nu,\tau+1}$-разрешимым, иначе $H^G_{\nu,\tau+1}$ разрешил бы свой график, чего не может быть, поскольку оракулы вычисляют джамп-оператор. Но если даже τ есть точка насыщения для ν, то оракул $H^G_{\nu,\tau}$ не обязан разрешать графики предыдущих оракулов, так как может найтись $\sigma < \tau$ такое, что оракул $H^G_{\nu,\tau}$ будет $H^G_{\nu,\sigma}$-вычислим. Построим пример такой нумерации.

УТВЕРЖДЕНИЕ II. Существует нумерация ν такая, что $|\nu|$ является точкой насыщения и оракул $H^G_{\nu,|\nu|}$ $H^G_{\nu,0}$-вычислим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При построении ν, пока это возможно, полагаем $\nu^{-1}\tau = 2^u$, где u – машина с минимальным рангом $r_0(u)$ из множества $B^*(H^G_{\nu,0})\setminus\{u' \mid 2^{u'} \in K_\tau[\nu]\} = R$ и среди всех таких машин машина u имеет минимальный геделевский номер. Построение заканчивается, когда множество R оказывается пустым. Всякое множество $K_\tau[\nu]$ построено из машин z, ранг $r_0(z)$ которых меньше некоторого ординала ζ и еще, возможно, конечного числа машин ранга ζ, и значит, по утверждению 9 всякое множество $K_\tau[\nu]$ $H^G_{\nu,0}$-разрешимо равномерно. Поскольку множество $B^*(H^G_{\nu,0})$, и значит, множество $K_{|\nu|}[\nu]$ $H^G_{\nu,0}$-перечислимо, то по утверждению 5 оракул $H^G_{\nu,|\nu|}$ $H^G_{\nu,0}$-вычислим. Очевидно, $|\nu| = |H^G_{\nu,0}| = |H^G_{\nu,|\nu|}|$, тогда по утверждению 8 $|\nu|$ есть точка насыщения для ν.

В построенной нумерации заключительный оракул не разрешал график ни одного из предыдущих оракулов. Изменим построение нумерации с тем, чтобы заключительный оракул разрешал графики всех ранее построенных оракулов. Пусть уже построен отрезок нумерации $\nu|\tau$, тогда номер для τ определяется так. Пусть

$$K'_\tau[\nu] = \{z' \mid 2^{z'} \in K_\tau[\nu]\}; \quad C^G_\tau = B^*(H^G_{\nu,\tau})\setminus K'_\tau[\nu].$$

Если $C^G_\tau \neq \emptyset$, то $\nu^{-1}\tau = 2^z$, где $z \in C^G_\tau \cap B^*(H^G_{\nu,\sigma})$ и $\sigma = \min\{\sigma' \leq \tau \mid C^G_\tau \cap B^*(H^G_{\nu,\sigma'}) \neq \emptyset\}$, причем машина z имеет минимальный ранг $r_\sigma(z)$ среди всех машин, удовлетворяющих этим условиям, и среди всех таких машин машина z имеет минимальный геделевский номер. Если $C^G_\tau = \emptyset$, то построение ν обрывается на шаге τ.

УТВЕРЖДЕНИЕ I2. Для построенной нумерации $|\nu|$ есть точка насыщения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $C^G_{|\nu|} = \emptyset$, то $K'_{|\nu|}[\nu] = B^*(H^G_{\nu,|\nu|})$, а множество $B^*(H^G_{\nu,|\nu|})$ не может быть $H^G_{\nu,|\nu|}$-разрешимым, иначе оракул $H^G_{\nu,|\nu|}$ разрешил бы свой график.

УТВЕРЖДЕНИЕ I3. а) В нумерации ν графики оракулов $H^G_{\nu,\sigma}$ $H^G_{\nu,|\nu|}$-разрешимы, $\sigma < |\nu|$.

б) Разрешающая машина строится равномерно по номеру ординала $\sigma < |\nu|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Из построения ν видно, что для любого $z \in B^*(H^G_{\nu,|\nu|})$ найдется $\sigma < |\nu|$ такое, что $z \in B^*(H^G_{\nu,\sigma})$, $z \notin B^*(H^G_{\nu,\sigma'})$ для $\sigma' < \sigma$. Будем далее обозначать такое σ через $l(z)$. Для произвольного $\sigma < |\nu|$ построим машину $z_{1,\sigma} \in B^*(H^G_{\nu,|\nu|})$ так: $z_{1,\sigma}$ задает оракулу $H^G_{\nu,|\nu|}$ один вопрос вида $3^{\langle 0,\sigma \rangle}$ и затем останавливается[ж)]. Понятно, что $l(z_{1,\sigma}) = \sigma + 1$. Поскольку по утверждению 7 $|\nu|$ есть предельный ординал, то $\sigma+1 < |\nu|$. По построению ν имеем $2^{t_{1,\sigma}} \in K_{|\nu|}[\nu]$. Понятно, что для всякого $z \in B^*(H^G_{\nu,|\nu|})$ найдется такое $\tau < |\nu|$, что 2^z есть номер ординала τ. Ординал τ с номером 2^z обозначим через $\gamma(z)$, т.е. $\gamma(z) = \nu(2^z)$. Итак, $\gamma(z_{1,\sigma}) = \nu(2^{z_{1,\sigma}}) < |\nu|$. Если $l(z_1) < l(z_2)$, то номер 2^{z_1} встретится в нумерации раньше, чем номер 2^{z_2}. Таким образом, имеем $B^*(H^G_{\nu,\sigma}) = K'_\delta[\nu]$ для некоторого δ, $\delta \leq \gamma(z_{1,\sigma}) < |\nu|$. С учетом утверждения 10 имеем: график оракула $H^G_{\nu,\sigma}, \sigma < |\nu|$ $H^G_{\nu,|\nu|}$-разрешим.

б) Требуется по номеру ординала $\sigma < |\nu|$ эффективно построить машину z, разрешающую график оракула $H^G_{\nu,\sigma}$. Поскольку $l(z_{1,\sigma}) = \sigma+1$, то можно построить машину z_2, разрешающую с оракулом $H^G_{\nu,|\nu|}$ множество $K'_{\gamma(z_{1,\sigma})}[\nu]$ для построенной выше машины $z_{1,\sigma}$. Очевидно, $K'_{\gamma(z_{1,\sigma})}[\nu] \subseteq B^*(H^G_{\nu,|\nu|})$. Всякой такой машине z сопоставим равномерным образом $H^G_{\nu,|\nu|}$-разрешимое множество D_z: все вопросы, задаваемые машиной z оракулу $H^G_{\nu,|\nu|}$ принадлежат D_z, если $5^{y+1} \in D_z$ или $7^{y+1} \in D_z$, то все вопросы, задаваемые машиной y оракулу $H^G_{\nu,|\nu|}$ тоже принадлежат D_z. Разрешимость этого множест-

---

[ж)] Имеется в виду номер σ в нумерации ν, но мы будем пользоваться таким обозначением для сокращения записи.

ва легко доказать индукцией по $r_{|\nu|}(z)$. Определим множество $\mathcal{L}_z=\{\sigma' | \exists\sigma'': \sigma' \le \sigma''; 3^{\langle t,\sigma''\rangle} \in D_z$ для некоторого $t\}$. Очевидно, оно $H^G_{\nu,|\nu|}$-разрешимо равномерно по $r_{|\nu|}(z)$. Осталось заметить, что для интересующего нас σ и для $y \in K_{\gamma(z_{1,\sigma})}[\nu]$ имеем:

$$y \in B^*(H^G_{\nu,\gamma(z_{1,\sigma})}) \leftrightarrow \sigma \notin \mathcal{L}_z .$$

Итак, множество $B^*(H^G_{\nu,\sigma})$ $H^G_{\nu,|\nu|}$-разрешимо равномерно по σ, и по утверждению 9 имеем требуемое.

3. Иерархии с растяжением. В предыдущем пункте описана некоторая процедура построения нумерации; она применялась либо к пустой нумерации (в начале построения), либо к отрезку, построенному в соответствии с ней же. Применим теперь ее к произвольной нумерации с целью продолжить ее таким способом. (Множество $K'_{|\nu|}[\nu]$ уже не находится во взаимно-однозначном соответствии с $K_{|\nu|}[\nu]$, так как в нем могут появиться номера, не имеющие вида 2^z, $z \in B^*(H^G_{\nu,|\nu|})$.) Упомянутая процедура такова, что номер вида 2^z, использованный в нумерации, не может повториться при продолжении нумерации указанной процедурой. Тогда по всякой нумерации ν можно построить ее продолжение ν_1. Оператор, осуществляющий такое продолжение, обозначим через φ, т.е. $\varphi(\nu) = \nu_1$. Нас будет интересовать случай, когда $\varphi(\nu) = \nu$. Мы убедимся, что применение оператора φ в некотором смысле улучшает[*)] нумерацию. Но если ν не поддается продолжению с помощью φ, то это не значит, что она "хорошая", поскольку в ней могут быть номера вида 2^z, $z \notin B^*(H^G_{\nu,|\nu|})$, или, что еще неудобнее, номера вида 2^z, $z \in B^*(H^G_{\nu,|\nu|})$, но расположенные в нумерации беспорядочно, так что рассуждения из утверждения 13 здесь не проходят. Наложим на нумерацию $\varphi(\nu)$ некоторое условие монотонности. Индексом ind(z) машины z назовем тройку $\langle l(z), r_{|\nu|}(z), z\rangle$. Пусть $z_1, z_2 \in B^*(H^G_{\nu,|\nu|})$, тогда

$$\langle l(z_1), r_{|\nu|}(z_1), z_1\rangle = \mathrm{ind}(z_1) < \mathrm{ind}(z_2) = \langle l(z_1), r_{|\nu|}(z_2), z_2\rangle \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow [l(z_1) < l(z_2)] \vee [l(z_1) = l(z_2) \,\&\, r_{|\nu|}(z_1) < r_{|\nu|}(z_2)] \vee$$

---

*) "Хорошая нумерация" означает, что в некоторых характерных точках имеем разрешения графиков предыдущих оракулов.

$\forall[l(z_1) = l(z_2)\ \&\ r_{|\nu|}(z_1) = r_{|\nu|}(z_2)\ \&\ z_1 < z_2]$.

Для произвольных $z_1, z_2 \in B^*(H^G_{\nu,|\nu|})$ требуем:

$$ind(z_1) < ind(z_2) \to \gamma(z_1) < \gamma(z_2), \qquad (1)$$

т.е. чтобы употребление машин из $B^*(H^G_{\nu,|\nu|})$ в качестве номеров было упорядочено в соответствии с условиями процедуры построения нумерации из п.2. Назовем нумерацию монотонной, если для нее выполнено условие (I).

ТЕОРЕМА I. Если $\varphi(\nu) = \varphi$ и ν монотонна, то

а) $|\nu|$ есть точка насыщения ν,

б) заключительный оракул $H^G_{\nu,|\nu|}$ разрешает графики предыдущих оракулов $H^G_{\nu,\sigma}$, $\sigma < |\nu|$, равномерно по номеру σ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Покажем, что для $z \in B^*(H^G_{\nu,|\nu|})$ имеем $r_{|\nu|}(z) = \lambda < |\nu|$, т.е. что $|H^G_{\nu,|\nu|}| \le |\nu|$. Тогда поскольку $|\nu| > |H^G_{\nu,|\nu|}|$ не может быть, то $|\nu| = |H^G_{\nu,|\nu|}|$, и по утверждению 8 $|\nu|$ есть точка насыщения для ν. Итак, пусть $z \in B^*(H^G_{\nu,|\nu|})$, $r_{|\nu|}(z) = \lambda$, $D'_z = \{y \in B^*(H^G_{\nu,|\nu|}) | 5^{y+1} \in D_z \vee 7^{z+1} \in D_z\}$. Понятно, что D'_z $H^G_{\nu,|\nu|}$-разрешимо. Теперь для произвольного $y \in D'_z$ имеем $ind(y) < ind(z)$, а значит, по (I) имеем $\gamma(y) < \gamma(z)$. Трансфинитной индукцией по $r_{|\nu|}(z)$ легко доказать, что для любого $\zeta < \lambda$ найдется $y_\zeta \in D'_z$ такое, что $r_{|\nu|}(y_\zeta) = \zeta$. Однако такая машина y_ζ может быть не одна, поэтому, выбрав для $\zeta < \lambda$ одну машину $y_\zeta \in D'_z$ со свойством $r_{|\nu|}(y_\zeta) = \zeta$, причем так, чтобы для любого $\zeta_1 < \zeta$ выполнялось $y_{\zeta_1} \in D'_{y_\zeta}$, имеем вполне упорядоченную по рангам машин y последовательность номеров вида 2^y длины не меньше λ. С учетом (I) получаем $\gamma(z) \ge \lambda$. Итак, для любого $z \in B^*(H^G_{\nu,|\nu|})$ имеем $r_{|\nu|}(z) = \lambda < \gamma(z) < |\nu|$, что и требовалось установить.

б) Очевидно, что для $\sigma < |\nu|$ имеем

$$|H^G_{\nu,\sigma}| = \{r_\sigma(y) | y \in B^*(H^G_{\nu,\sigma})\} = \{r_{|\nu|}(y) | y \in B^*(H^G_{\nu,\sigma})\}.$$

Обозначим последнее через λ и покажем, что $\lambda \le \delta$ для некоторого $\delta < |\nu|$. Напомним, что $l(z_{1,\sigma}) = \sigma + 1$. Построим машину $z_{1,\sigma}$. Поскольку $z \in B^*(H^G_{\nu,\sigma}) \to l(z) \le \sigma$, то для $z \in B^*(H^G_{\nu,\sigma})$ будет $l(z) < l(z_{1,\sigma})$. Тогда в силу (I) для любого $z \in B^*(H^G_{\nu,\sigma})$ имеем $\gamma(z) < \gamma(z_{1,\sigma})$. Выберем для $\zeta \le \lambda$ машину $z_\zeta \in B^*(H^G_{\nu,\sigma})$ так, чтобы $r_{|\nu|}(z_\zeta) = \zeta$, и построим, как в "а", последовательность номеров вида 2^{z_ζ}; $z_\zeta \in B^*(H_{\nu,\sigma})$, длина которой не меньше λ. Все эти номера расположены в нумерации до точки $\gamma(z_{1,\sigma}) = 2^{z_{1,\sigma}}$. Значит, $\lambda = |H_{\nu,\sigma}| \le \gamma(z_{1,\sigma}) < |\nu|$. Теперь построим (эффективно по $z_{1,\sigma}$) машину $z' \in B^*(H^G_{\nu,|\nu|})$, такую, что $r_{|\nu|}(z') = \gamma(z_{1,\sigma})$. Теперь имеем $B^*(H^G_{\nu,\sigma}) = \{y \in B^*(H^G_{\nu,\sigma}) \mid r_0(y) < r_{|\nu|}(z')\}$, и по утверждению IO разрешим график оракула $H^G_{\nu,\sigma}$, поскольку по утверждению 9 $B^*(H^G_{\nu,\sigma})$ $H^G_{\nu,|\nu|}$-разрешимо.

Одно из самых простых применений оператора φ следующее. Пусть строится нумерация ν и имеется вспомогательная нумерация μ. Пусть уже построен отрезок $\nu\restriction\tau$. При продолжении нумерации $\nu\restriction\tau$ действуем сначала оператором φ. Если $\nu\restriction\tau = \varphi(\nu\restriction\tau)$, то полагаем $\nu^{-1}\tau = 3^i$, где $i \in K_{|\mu|}[\mu] \setminus \{j \mid 3^j \in K_\tau[\nu\restriction\tau]\}$, если такое i существует. Поскольку для $\tau_1 < \tau_2$ имеем $\nu\restriction\tau_1 = (\nu\restriction\tau_2)\restriction\tau_1$, то для предельного γ имеем $\nu\restriction\gamma = \bigcup_{\tau'<\tau} \nu\restriction\tau'$. Нумерация μ "растягивается", в нее вставляются отрезки, построенные с помощью оператора φ. Для построенной нумерации выполняются условия теоремы I, поэтому верно

УТВЕРЖДЕНИЕ I4. *Точка $|\nu|$ нумерации есть точка насыщения для ν и оракул $H^G_{\nu,|\nu|}$ разрешает графики оракулов $H^G_{\nu,\sigma}$, $\sigma < |\nu|$, равномерно по номеру ординала σ.*

Процесс "растягивание" нумерации μ зависит от функционала $G \in T_2$, т.е. если брать различные функционалы $G_1, G_2 \in T_2$, то полученные нумерации ν_1, ν_2 будут различны. Нумерация μ берется произвольной, поэтому прием растяжения позволяет строить нумерации произвольной длины, обладающие достаточно хорошими свойствами.

4. *Иерархии с возвращением.* Условие монотонности (I) выделяет большой класс "хороших" нумераций, но не

исчерпывает всех их. Опишем одну такую нумерацию. Пусть на некоторой нумерации ν расположены оракулы $H^{G}_{\nu,\sigma}$, причем $\varphi(\nu)=\nu$. Пусть $G_1 \in T_2$. Вернемся теперь к началу нумерации и усилим построенные оракулы, добавив в их определение вопросы, касающиеся функционала G_1:

$$H^{GG_1}_{\nu,\sigma}(5\,7^{z+1}) = G_1(\eta); \quad \eta = \lambda t\{z\}^{H^{GG_1}_{\nu,\sigma}}(t) \in T_1.$$

Очевидно:

I) оракул $H^{G}_{\nu,\sigma}$ вычислим с оракулом $H^{GG_1}_{\nu,\sigma}$;

2) $H^{G}_{\nu,\sigma} \subseteq H^{GG_1}_{\nu,\sigma}$ при $\sigma \le |\nu|$.

Второй факт особенно интересен, именно из-за него мы отказались от введения свойства разрешения графиков в определении оракулов. Свойство 2 означает, что при усилении оракулов сохраняется смысл уже построенных номеров: машина z, вычисляющая с оракулом $H^{G}_{\nu,\sigma}$ всюду определенную функцию, будет вычислять с оракулом $H^{GG_1}_{\nu,\sigma}$ ту же функцию. Поскольку $B^*(H^{G}_{\nu,\sigma}) \subsetneqq B^*(H^{GG_1}_{\nu,\sigma})$ для любого номера σ из уже построенного отрезка нумерации, то в случае оракула $H^{GG_1}_{\nu,\sigma}$ увеличивается запас "хороших" машин, таким образом, к нумерации ν, на которой теперь расположены оракулы $H^{GG_1}_{\nu,\sigma}$, применим оператор φ_{GG_1} *). Обозначим $\bar{\nu} = \varphi_{GG_1}(\nu)$. (После точки $|\nu|$ тоже располагаем усиленные оракулы.) Для машин $z \in B^*(H^{G}_{\nu,\sigma})$ индекс $\langle l(z), r_{|\nu|}(z), z\rangle$ в нумерации $\bar{\nu}$ совпадает с индексом ее в нумерации ν – $\langle l(z), r_{|\nu|}(z), z\rangle$, поэтому мы не будем оговаривать, в какой нумерации рассматривается индекс машины. Точка насыщения для нумерации ν не обязана быть точкой насыщения для нумерации $\bar{\nu}$, а также если $z' \in B^*(H^{G}_{\nu,\sigma})$, $z \in B^*(H^{GG_1}_{\bar{\nu},\sigma}) \setminus B^*(H^{G}_{\nu,\sigma})$, то $\gamma(z') < \gamma(z)$. В связи с этим уточним понятие "хорошей" нумерации и покажем, что основные свойства нумерации, с которыми удобно работать, сохраняются при каждом новом усилении оракулов. Назовем машину

*) Оператор φ, применяемый к нумерации, где расположены оракулы H^{G}, H^{GG_1} или H^{J}, обозначим соответственно φ_G, φ_{GG_1}, φ_J.

$z \in B^*(H^J_{\nu,|\nu|})$ правильно задействованной, если для всякого $z' \in$ $\in B^*(H^J_{\nu,|\nu|})$ имеем: $ind(z') < ind(z) \to \gamma(z') < \gamma(z)$. Будем в дальнейшем обозначать этот факт $P(z)$. Нумерация называется правильной, если в ней нет номеров вида 2^z, $z \notin B^*(H^G_{\nu,|\nu|})$, и выполняется

$$\forall\sigma(\sigma \leq |\nu| \to \exists z^*(z^* \in B^*(H^G_{\nu,|\nu|}) \& P(z^*) \& l(z^*) = \sigma+1.$$

После возвращения и усиления оракулов, т.е. после продолжения нумерации ν до $\varphi_{GG_1}(\nu)$ ни одна машина из $K'_{|\varphi_G(\nu)|}[\varphi_G(\nu)]$ не может быть правильно задействована в нумерации $\varphi_{GG_1}(\nu)$, тем более нарушается условие (I), и теорема I не применима, но верна

ТЕОРЕМА 2. *Если* $\varphi_G(\nu) = \nu$ *и* ν *- правильная нумерация, то* $|\nu|$ *есть точка насыщения для* ν, *и оракул* $H^G_{\nu,|\nu|}$ *разрешает графики оракулов* $H^G_{\nu,\sigma}$, $\sigma < |\nu|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, $B^*(H^G_{\nu,|\nu|}) \subsetneqq K_{|\varphi_G(\nu)|}[\nu]$, а так как нумерация $\varphi_G(\nu)$ правильная, т.е. не содержит номеров вида 2^z, $z \notin B^*(H^G_{\nu,|\nu|})$, то из $H^G_{\nu,|\nu|}$-разрешимости множества $K_{|\varphi_G(\nu)|}[\nu]$ вытекает $H^G_{\nu,|\nu|}$-разрешимость множества $B^*(H^G_{\nu,|\nu|})$, и по утверждению I0 оракул $H^G_{\nu,|\nu|}$ может разрешить свой график, чего быть не может. Пусть теперь $\sigma < |\nu|$. Нумерация $\varphi_G(\nu)$ правильная, значит, найдется $z^*_{\sigma+1} \in B^*(H^G_{\nu,|\nu|})$ такое, что $P(z^*_{\sigma+1}) \& l(z^*_{\sigma+1}) = \sigma + 1$. Очевидно, для всех $z \in B^*(H^G_{\nu,\sigma})$ имеем $ind(z) < ind(z^*_{\sigma+1})$, следовательно, $\gamma(z) < \gamma(z^*_{\sigma+1})$. Итак, $B^*(H^G_{\nu,\sigma}) \subset K_{\gamma(z^*_{\sigma+1})}[\nu]$; так как в нумерации ν нет номеров вида 2^z, $z \notin B^*(H^G_{\nu,|\nu|})$, то $H^G_{\nu,|\nu|}$-разрешая множество $K_{\gamma(z^*_{\sigma+1})}[\nu]$ (а это по построению оракулов мы можем сделать, так как $\gamma(z^*_{\sigma+1}) < |\nu|$), разрешим и множество $B^*(H^G_{\nu,\sigma})$ и по утверждению I0 $H^G_{\nu,|\nu|}$-разрешим график оракула $H^G_{\nu,\sigma}$.

Заметим, что в теореме 2 разрешимость графиков оракулов $H^G_{\nu,\sigma}$, $\sigma<|\nu|$, будет равномерной, если на существование машины $z^*_{\sigma+1}$ наложить требование эффективности. Заметим также, что в условиях теоремы I допускалось существование в нумерации ν номеров вида 2^z, $z \notin B^*(H^G_{\nu,|\nu|})$, но требовалось монотонное упорядочение всех номеров вида 2^z, где z – "хорошая машина", т.е. где $z \in B^*(H^G_{\nu,|\nu|})$. В теореме 2 при сходных результатах требуется, чтобы в нумерации не содержалось номеров вида 2^z, $z \notin B^*(H^G_{\nu,|\nu|})$, но зато допускается некоторый разнобой в использовании "хороших" машин. Дело в том, что условие монотонности (I) нарушается даже в случае, когда нумерация $\tilde{\nu} = \varphi_{GG_1}(\nu)$ получается из нумерации $\nu = \varphi_G(\emptyset)$, которая, очевидно, монотонна. А вот свойство "быть правильной нумерацией" сохраняется при возвращениях, поэтому мы и ввели его в рассмотрение.

УТВЕРЖДЕНИЕ I5. Если ν – правильная нумерация, $\nu = \varphi_{G_1,\ldots,G_n}(\nu)$, то $\tilde{\nu} = \varphi_{G_1,\ldots,G_n,G_{n+1}}(\nu)$ – правильная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При действии оператора $\varphi_{G_1,\ldots,G_{n+1}}$ новые номера вида 2^z, $z \notin B^*(H^G_{\nu,|\nu|})$, появиться не могут; затем все машины из (непустого) множества $B^*(H^{G_1,\ldots,G_{n+1}}_{\tilde{\nu},\sigma}) \setminus B^*(H^{G_1,\ldots,G_n}_{\nu,\sigma})$ при $\sigma \le |\nu|$ правильно задействованы (в силу свойств оператора φ), поэтому для $\sigma \le |\nu|$ существует правильно задействованная машина $z \in B^*(H^{G_1,\ldots,G_{n+1}}_{\tilde{\nu},\sigma})$ такая, что $l(z) = \sigma+1$.

Очевидно, что ν – правильная, если $\nu = \varphi(\emptyset)$; ν – монотонна и в ней нет номеров вида 2^z, $z \notin B^*(H^G_{\nu,|\nu|})$; ν получается растяжением некоторой нумерации μ.

Пусть теперь $J = \{G_\delta\}_{\delta < |\pi|}$ – нумерованное ординальной нумерацией π семейство функционалов. Строим нумерацию ν, применяя оператор $\varphi_\emptyset$ (т.е. оракулы, расположенные на нумерации, релятивизованы только к джамп-оператору E). Пусть на шаге τ_0 построили отрезок нумерации $\nu \restriction \tau_0$, причем $\varphi_\emptyset(\nu \restriction \tau_0) = \nu \restriction \tau_0$ и $G_0 \in J$. Возвращаеся к началу нумерации и усиливаем все построенные оракулы, т.е. добавляем в их определение вопросы, касающиеся функционала G_0:

$$H^{G_0}_{\nu\restriction\tau_0,\sigma}(5^{\pi^{-1}(0)+1} \cdot 7^{z+1}) = G_0(\eta), \quad \eta = \lambda t\{z\}^{H^{G_0}_{\nu\restriction\tau_0,\sigma}}(t) \in T_1.$$

После этого применяем к полученной нумерации оператор φ_{G_0}. Если на шаге τ_γ построения нумерации использовались функционалы $G_0, \ldots$

$\ldots, G_\gamma \in J$, то обозначим эту последовательность $J\restriction\gamma+1$, а оператор, с помощью которого строился этот отрезок нумерации, через $\varphi_{J\restriction\gamma+1}$. Итак, пусть на шаге τ_γ построен отрезок $\nu\restriction\tau_\gamma$, причем $\varphi_{J\restriction\gamma+1}(\nu\restriction\tau_\gamma) = \nu\restriction\tau_\gamma$. Берем $G_{\gamma+1} \in J$, возвращаемся к началу нумерации, усиливаем все построенные оракулы, добавляя в их определение вопросы:

$$H^{J\restriction\gamma+1}_{\nu\restriction\tau_\gamma,\sigma}(5^{\pi^{-1}(\gamma+1)+1}\cdot 7^{z+1}) = G_{\gamma+1}(\eta);\ \eta = \lambda t\{z\}^{H^{J\restriction\gamma+1}_{\nu\restriction\tau_\gamma,\sigma}}(t) \in T_1,$$

и применяем к полученной нумерации оператор $\varphi_{J\restriction\gamma+2}$, получая при этом нумерацию $\nu\restriction\tau_{\gamma+1} = \varphi_{J\restriction\gamma+2}(\nu\restriction\tau_{\gamma+1})$, и т.д. Если γ - предельный ординал, полагаем $\nu\restriction\tau_\gamma = \bigcup\limits_{\delta<\gamma} \nu\restriction\tau_\delta$, возвращаемся к началу нумерации и усиливаем построенные оракулы так, чтобы на всей нумерации располагались теперь оракулы $H^{J\restriction\gamma}_{\nu\restriction\tau_\gamma,\sigma}$, применяем к получившейся нумерации оператор $\varphi_{J\restriction\gamma}$ и т.д. Процесс построения заканчивается, если мы на шаге 1 исчерпали множество $J = \{G_\delta\}_{\delta<|\pi|}$ и имеем $\varphi_J(\nu\restriction\tau_1) = \nu\restriction\tau_1$. Так построенную иерархию назовем иерархией с возвращением. Пусть в процессе ее построения использовались функционалы $J = \{G_\delta\}_{\delta<\lambda}$, тогда верна

ТЕОРЕМА 3. Для иерархии с возвращением выполняется:

а) если $\lambda < |\nu|$, то график оракула $H^J_{\nu,\sigma}$, $\sigma<|\nu|$, разрешим с оракулом $H^J_{\nu,|\nu|}$ равномерно по номерам σ,λ;

б) если $\lambda = |\nu|$, то для любого $\zeta<\lambda$ график оракула $H^{J\restriction\zeta}_{\nu,\sigma}$ $H^J_{\nu,|\nu|}$-разрешим равномерно по номерам ординалов ζ,σ;

в) точка $|\nu|$ есть точка насыщения для ν.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть $\sigma<|\nu|$. Построим машину $z^*_\sigma \in B^*(H^J_{\nu,|\nu|})$ так: на каждом аргументе она задает оракулу $H^J_{\nu,|\nu|}$ вопрос $3^{\langle o,\sigma\rangle}$ и один из вопросов $5^{\delta+1}\cdot 7^{z+1}$, где z - общерекурсивная функция, причем на всех своих аргументах она спрашивает про все функционалы из $J = \{G_\delta\}_{\delta<\lambda}$, и поэтому в силу построения нумерации она будет правильно задействована. Так как $ind(z) < ind(z^*_\sigma)$ для $z \in B^*(H^J_{\nu,\sigma})$, то для таких z имеем $\gamma(z) < \gamma(z^*_\sigma)$. Теперь, как в теореме I, разрешая с оракулом $H^J_{\nu,|\nu|}$ множество $K_{\gamma(z^*_\sigma)}[\nu]$, разрешим и множество $B^*(H^J_{\nu,\sigma})$. Остается применить утверждение 10.

б) Доказательство этой части теоремы проводится аналогично предыдущей, но машина $z^*_\sigma \in B^*(H^J_{\nu,|\nu|})$ задает два вопроса: $3^{\langle 0,\sigma\rangle}$ и $5^{\zeta+1}\, 7^{z+1}$ оракулу $H^J_{\nu,|\nu|}$ и останавливается.

в) Очевидно.

В условиях "б" графики оракулов $H^J_{\nu,\sigma}$, $\sigma < |\nu|$, не могут быть разрешимы с оракулом $H^J_{\nu,|\nu|}$, так как в противном случае мы разрешили бы последовательность номеров вида 2^z, $z \in B^*(H^J_{\nu,\sigma})$, конфинальную $|\nu|$, т.е. могли бы разрешить множество $K_{|\nu|}[\nu]$, а это противоречие с тем, что $|\nu|$ – точка насыщения.

Теперь мы располагаем методом растяжения произвольной нумерации с помощью оператора φ и можем по мере построения возвращаться и усиливать оракулы с сохранением "хороших" свойств нумерации. Эти два способа построения нумераций можно комбинировать, т.е. можно получить метод, позволяющий строить произвольно длинные нумерации с "хорошими" свойствами. Можно определить и соответствующий вариант автономного процесса (см. [2]) для таких нумераций. В работе [2] разработан некоторый пульсирующий процесс построения нумерации, позволяющий заглядывать в будущее на любое конечное число шагов и, возвращаясь, использовать полученную информацию для построения оракулов. Там были использованы многозначные нумерации, и в процессе построения иерархии некоторые множества номеров для уже построенных ординалов могли расширяться. Здесь описана некоторая возможность изменения прошлого с учетом некоторых будущих параметров. Важно, что разрешимость графиков оракулов отчасти удалось сохранить и что при усилении оракулов сохраняется их монотонность. Это означает некоторую монотонность самого пульсирующего процесса: сохраняется смысл уже построенных отрезков нумерации. Здесь не рассматривается вопрос, откуда берется последовательность функционалов $J = \{G_\delta\}_{\delta < |\varkappa|}$, этот вопрос решается по-разному, в зависимости от рассматриваемой ситуации.

Л и т е р а т у р а

1. БЕЛЯКИН Н.В. Итерированная клиниевская вычислимость и супер-джамп. -Математический сборник, 1976, т.101, №143, с.21-43.

2. БЕЛЯКИН Н.В. Об одном способе моделирования классической арифметики второй ступени. -Алгебра и логика, 1983, т.22, №1, с.3-25.

3. ГАНОВ В.А. Обобщенно-конструктивный континуум.-Сиб.матем. ж., 1973, т.14, №5, с.1235-1259.

4. КЛИНИ С.К. Введение в математику.-М.: ИЛ, 1957. -479 с.

5. ПОБЕДИН Л.Н. Некоторые вопросы обобщенной вычислимости. - Алгебра и логика, 1973, т.12, №2, с.220-231.

6. РОДЖЕРС Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. -М.: Мир, 1972. - 624 с.

7. ШАНИН Н.А. Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства.-В кн.: Труды МИАН СССР, 1962, т. 67, с. 13-293.

Поступила в ред.-изд.отд.
6 июня 1984 года